Alejandro E. García Venturini
Axel Kicillof

ALGEBRA

para estudiantes de Ciencias Económicas

Ediciones Cooperativas

COLECCIÓN: EL NÚMERO DE ORO

Álgebra

para estudiantes de Ciencias Económicas

COLECCIÓN: EL NÚMERO DE ORO
Director: *Act. Alberto Landro*

Acerca de la Probabilidad – 2da. edición
Alberto Landro

Álgebra, para Estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E.García Venturini – Axel Kicillof

Análisis Matemático I para Estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E.García Venturini – Axel Kicillof

Análisis Matemático II para Estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E. García Venturini – Axel Kicillof

Los matemáticos que hicieron la historia
Alejandro E. García Venturini

Análisis de Series de Tiempo, univariadas y multivariadas
Heriberto Urbisaia – Juana Brufman

Decisión Estadística Bayesiana, a modo de introducción
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Estadística no Paramétrica, a modo de introducción
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Teoría de los Conjuntos Borrosos
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Estadística: Herramientas de Inferencia
Gabriela Kurincic

Estadística: Probabilidades y Distribuciones
Gabriela Kurincic

Los Métodos Cuantitativos en las Ciencias Sociales
Alejandro E. García Venturini – Federico Castelli

Aplicaciones del Análisis Matemático a la Economía
Blanca R. Vitale

Modelos para el Análisis de Series de Tiempo
Juan Carlos Abril

Alejandro E. García Venturini - Axel Kicillof

Álgebra

para estudiantes de Ciencias Económicas

2ª EDICIÓN

EDICIONES COOPERATIVAS

Ediciones Cooperativas es un emprendimiento cooperativo de docentes de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires para difundir sus trabajos e investigaciones

García Venturini, Alejandro Ezequiel .- Kicillof, Axel
Algebra: para estudiantes de ciencias económicas. – 2ª. ed. – Buenos Aires: Ediciones Cooperativas, 2009.
280 p.; 21x14 cm.

ISBN 987-98315-5-7

1. Algebra. I. Título
CDD 515

Tucumán 3227, (1189) Buenos Aires Argentina
☎ Tel.: 54 11 15 4 198 5667
info@edicionescoop.gov.ar
✉ www.edicionescoop.gov.ar

Colección: *El número de oro*
Director*: Act. Alberto Landro*

HECHO EL DEPÓSITO QUE ESTABLECE LA LEY 11.723

1º edición, Agosto 2000
2º edición, Marzo 2009

Editorial asociada a: CÁMARA ARGENTINA DEL LIBRO

IMPRESO EN ARGENTINA – PRINTED IN ARGENTINE

Prólogo

La publicación de esta obra es en realidad la culminación de un proyecto iniciado hace cerca de ocho años. En aquella ocasión nos planteamos elaborar un material acorde a las necesidades de los estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires que cumpliera con un doble requisito: ser accesible desde el punto de vista expositivo y de alta calidad académica.

El resultado de ese esfuerzo se plasmó en la Serie Notas Teóricas, publicada por la Secretaría de Cultura del Centro de Estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas a partir de 1993. Trabajamos conjuntamente en tres títulos: Análisis Matemático I, Análisis Matemático II y Álgebra, con la pretensión de hacer un aporte original, en especial en el complejo problema del tratamiento de los temas económicos en materias de la rama matemática. Allí es donde resultó provechoso el intercambio entre las perspectivas aportadas por cada uno de nosotros, desde su respectiva especialidad.

Inmediatamente las publicaciones tomaron vida, nutriéndose de los comentarios de estudiantes y profesores que las hicieron propias, transformándolas. Por nuestra parte el compromiso se renovaba, a lo largo de las casi veinte ediciones y los más de 10.000 ejemplares impresos, a través de un proceso de actualización permanente.

En la presente edición se han agregado algunos temas y reformulado otros A pesar de que en la reforma de 1997 se suprimió del programa de Algebra, en forma inexplicable, la unidad de Transformaciones Lineales, nosotros decidimos mantenerla en este texto, no sólo por su importancia y porque permite comprender el sentido de otras unidades, como la de Espacios Vectoriales, sino también porque es de suma utilidad para la comprensión de otras materias como Matemática para Economistas.

El haber convertido en libro lo que nació como un simple material de estudio nos llena de orgullo ya que corona un esfuerzo de muchos años. Para nosotros ese esfuerzo no es más que una forma de reafirmar nuestro compromiso con la Universidad Pública, a la que este trabajo va dedicado.

Agradecemos a todos los que han contribuido a que este libro hoy pueda ponerse a consideración de alumnos y colegas.

Los autores
Agosto 2000

Capítulo 1

Matrices

Definición de Matriz.

Matrices Especiales.

Operaciones con Matrices.

Matriz Transpuesta.

Matriz Simétrica y Antisimétrica.

Matriz Compleja, de Hermite.

Matriz Inversa.

Matriz Adjunta.

Determinante de una Matriz, propiedades.

Aplicaciones a la Economía y a la Teoría de Gráficos.

MATRICES

Intervalo natural inicial

Es el conjunto formado por los ***n*** primeros números naturales: $I_n=\{1,2,3,....,n\}$

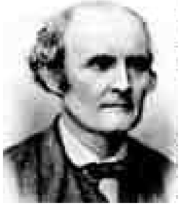
Matrices reales

Consideramos dos intervalos naturales iniciales $\mathbf{I_m}$ e $\mathbf{I_n}$. Calculamos el producto cartesiano de

$I_m x\ I_n = \{(i;j)\ /\ i \in I_m \wedge j \in I_n\}$.

Si ahora establecemos una función que va de $I_m x I_n \to \Re$ se obtiene una tabla de valores ordenada por filas y columnas que recibe el nombre de **matriz**.

CAYLEY, ***Arthur (1821-1895):*** matemático inglés que nació en Richmond, cerca de Londres.



Abogado, que desarrolla la geometría proyectiva, expone el concepto de invariancia en 1845 y desarrolla la teoría de matrices (como se suman y multiplican) en 1858.
El nombre de **matriz** se debe a él, lo mismo que su extensión pluridimensional. Está considerado el tercer escritor más prolífico de matemática, luego de Euler y Cauchy. También hizo aportes a la teoría de los determinantes. Fue también pintor a la acuarela y un estudioso de la botánica.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ . & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

La imagen de cada $(i;j)$ es un número real que se denomina $\boldsymbol{a_{ij}}$.
La matriz tiene m filas y n columnas. El elemento que está en la fila 2, columna 3 recibe el nombre de a_{23} y así sucesivamente.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz que tiene 2 filas y 3 columnas.

El elemento $a_{12} = -1$, el $a_{23} = 2$, el $a_{13} = 3$ etc.
Las matrices se representan con letras mayúsculas A, B,..., etc., y a sus elementos se los denomina genéricamente a_{ij}, b_{ij},..., etc.
El conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas con elementos reales se denomina como $\mathbb{R}^{mxn}$.

Orden: se llama orden de la matriz al número de filas y de columnas que posee. Una matriz que tiene m filas y n columnas es de orden mxn (m por n).

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ es de orden 2x2, $A \in \mathbb{R}^{2x2}$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ es de orden 2x3, $B \in \mathbb{R}^{2x3}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ es de orden 3x2, $C \in \mathbb{R}^{3x2}$

Matriz nula: recibe este nombre aquella matriz en la cual todos los elementos son 0. Se la designa como N o simplemente 0, ($\forall i\ \forall j$: $n_{ij} = 0$).

Matriz cuadrada: es aquella en la cual el número de filas m es igual al número de columnas n.

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ que $\in \mathbb{R}^{2x2}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ que $\in \mathbb{R}^{3x3}$

Diagonal de una matriz cuadrada: está formada por los elementos en los cuales $i = j$.

$$(a_{11}, a_{22}, a_{33},...,a_{nn})$$

Traza de una matriz cuadrada: es el número que se obtiene de sumar los elementos de la diagonal. Tr $(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.

Matriz diagonal: es una matriz cuadrada en la cual los elementos que no pertenecen a la diagonal son nulos: $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x3}$

Matriz escalar: es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal son iguales.

Ejemplo: $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Matriz unidad o identidad: es una matriz escalar en la cual los elementos de la diagonal son 1.

Ejemplos: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ reciben el nombre de *I*.

Matriz fila: es la que tiene una sola fila, es de orden 1xn, $\in \mathbb{R}^{1xn}$

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ . \ . \ . \ a_{1n})$$

Ejemplo: $A = (2 \ -3 \ 1) \in \mathbb{R}^{1x3}$

Matriz columna: es la que tiene una sola columna, es de orden mx1, $A \in \mathbb{R}^{mx1}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \Re^{3x1}$

Vector: se denomina vector a toda matriz fila o columna

Matriz opuesta: la matriz opuesta de A es $B \Leftrightarrow \forall i\ \forall j$: $b_{\mathrm{ij}} = -\ a_{\mathrm{ij}}$, se denomina como $-A$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2}$

Matriz de probabilidad

Es una matriz cuadrada en la cual: a) cada elemento es no negativo, b) la suma de los elementos de cada fila es igual a 1.

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 4/5 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

Propiedad: el producto de matrices de probabilidad da otra matriz de probabilidad.

Igualdad: dos matrices son iguales si son del mismo orden y $\forall i\ \forall j$: $a_{ij} = b_{ij}$, es decir que los elementos que ocupan la misma posición son iguales.

OPERACIONES ENTRE MATRICES

Suma: sólo se pueden sumar matrices del mismo orden. El resultado da otra matriz del mismo orden cuyos elementos se obtienen sumando entre sí los elementos que ocupan la misma posición.

$$A + B = C \; / \; \forall i \; \forall j : \; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad A, B \text{ y } C \in \mathbb{R}^{\text{mxn}}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \quad A \text{ y } B \in \mathbb{R}^{2\text{x}3}$

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & -1+(-2) \\ 4+4 & 0+8 & 3+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 8 & 8 & 0 \end{pmatrix} \; C \in \mathbb{R}^{2\text{x}3}$$

Propiedades de la suma

a) Ley de cierre: la suma de matrices da otra matriz del mismo orden.
b) Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
c) Conmutativa: $A + B = B + A$
d) Existencia de neutro: $A + 0 = 0 + A = A$ (0 es la matriz nula)
e) Existencia de simétrico: $A + (-A) = (-A) + A = 0$
 ($-A$ es la matriz opuesta)
f) $\text{Tr}\,(A + B) = \text{Tr}\,A + \text{Tr}\,B$

Resta: Restar A y B equivale a sumar a la matriz A la matriz opuesta de B.

$$A - B = A + (-B).$$

En la práctica se procede igual que para la suma, en lugar de sumar los términos que ocupan la misma posición se restan. También deben ser del mismo orden.

$$A - B = C \; / \; \forall i \; \forall j\text{:} \; c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad A, B \text{ y } C \in \mathbb{R}^{\text{mxn}}$$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix}$ A y $B\in\mathbb{R}^{2\text{x}3}$

$$A-B=C=\begin{pmatrix}2-2 & 3-1 & -1-(-3)\\ 5-4 & -1-3 & 2-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

Producto de un escalar por una matriz: para multiplicar un escalar (número) por una matriz se multiplica el escalar por cada elemento de la matriz. Es una ley externa.

$\alpha.A=B\ /\ \forall i\ \forall j$: $b_{ij}=\alpha.a_{ij}$ $\qquad$ A y $B\in\mathbb{R}^{\text{mxn}}$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $3.A=\begin{pmatrix}3.1 & 3.2\\ 3.(-3) & 3.4\\ 3.0 & 3.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -9 & 12\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

Propiedades

a) $0.A=N$
b) $\alpha.N=N$
c) Si $\alpha.A=N\Leftrightarrow\alpha=0$ ó $A=N$
d) $1.A=A$
e) Distributiva respecto de la suma de matrices: $\alpha.(A+B)=\alpha.A+\alpha.B$
f) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta).A=\alpha.A+\beta.A$
g) $\text{Tr}\,(\alpha.A)=\alpha.\text{Tr}\,(A)$

Cociente de una matriz por un escalar α: equivale a multiplicar la matriz por $\dfrac{1}{\alpha}$**,** con $\alpha\neq 0$.

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{A}{3}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix} 2/3 & 4/3 \\ -1 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

Dadas dos matrices $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $B \in \mathbb{R}^{pxq}$ se pueden multiplicar si **n=p**, es decir que el número de columnas de la 1º matriz debe ser igual al número de filas de la 2º matriz. El orden de la matriz producto es **mxq**.

$$A.B = C \,/\, A \in \mathbb{R}^{mxn},\ B \in \mathbb{R}^{pxq},\ C \in \mathbb{R}^{mxq}$$

La matriz producto tiene tantas filas como la matriz 1º factor y tantas columnas como la matriz 2º factor.

Cálculo de los c_{ij}

Cada c_{ij} de la matriz producto se obtiene de sumar los productos término a término de los elementos de la fila *i* de la matriz 1º factor por los elementos de la columna *j* de la matriz 2º factor, $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

El producto se puede realizar porque coincide el número de columnas de la 1º matriz con el número de filas de la 2º matriz, que es 2. El resultado es una matriz de 2x3.

Hay que calcular 6 elementos de la matriz *C*; c_{11} se obtiene sumando los productos de los elementos de la fila 1 de *A* por la columna 1 de *B*; c_{12} se obtiene sumando los productos de la fila 1 de *A* por la columna 2 de *B* y así sucesivamente. Si adoptamos la siguiente disposición práctica, las intersecciones de filas y columnas indican como se obtiene cada ele-

mento de C. $\dfrac{\quad | \; B}{A \; | \; C}$

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & 2 & 3 & 1 \\
 & & 1 & -1 & 2 \\
\hline
3 & 2 & 3.2+2.1 & 3.3+2.(-1) & 3.1+2.2 \\
1 & -2 & 1.2+(-2).1 & 1.3+(-2).(-1) & 1.1+(-2).2
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \; C_{2x3} = \begin{pmatrix} 3.2+2.1 & 3.3-2.1 & 3.1+2.2 \\ 1.2-2.1 & 1.3+2.1 & 1.1-2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Propiedades

a) Asociativa: $A.(B.C) = (A.B).C$
b) No conmutativa: $A.B \neq B.A$

En muchos casos el producto en el otro sentido no se puede realizar. En otros casos se puede realizar pero da resultados diferentes.

c) Distributiva respecto de la suma y resta: $A.(B \pm C) = A.B \pm A.C$
d) Existencia de elemento neutro (para matrices cuadradas):
$I.A = A.I = A$ I (matriz identidad)
e) $A.B = 0$ y $A \neq 0$ y $B \neq 0$
f) $A.B = A.C$ y $B \neq C$

Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de estas propiedades

a) dadas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

verificamos que: $A.(B.C) = (A.B).C$

$$B.C=\begin{pmatrix}-1&3&2\\4&1&-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&-2\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&1&-1\\-4&9&-4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A.(B.C)=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}9&1&-1\\-4&9&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&-7&2\\35&-15&5\end{pmatrix}\ ❶$$

$$A.B=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&3&2\\4&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&5&6\\-11&7&10\end{pmatrix}$$

$$(A.B).C=\begin{pmatrix}-6&5&6\\-11&7&10\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&-2\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&-7&2\\35&-15&5\end{pmatrix}\ ❷$$

❶ = ❷

b) dadas $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-3&-2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&3&2\\4&1&-2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&-2\\1&0&3\end{pmatrix}$,

verificamos que: $(A+B).C=A.C+B.C$

$$A{+}B=\begin{pmatrix}2&0&1\\-3&-2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&3&2\\4&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$(A{+}B).C=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&-1&-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&-2\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5&4\\-6&1&-6\end{pmatrix}\ ❶$$

$$A.C=\begin{pmatrix}2&0&1\\-3&-2&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&-2\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&5\\-2&-8&-2\end{pmatrix}$$

$$B.C=\begin{pmatrix}-1&3&2\\4&1&-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&-2\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&1&-1\\-4&9&-4\end{pmatrix}$$

$$A.C+B.C=\begin{pmatrix}-1&4&5\\-2&-8&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&1&-1\\-4&9&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5&4\\-6&1&-6\end{pmatrix}\ ❷$$

❶ = ❷

c) dada: $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, verificamos que $A.I = I.A = A$

$$A.I=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=A$$

$$I.A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=A$$

d) Dadas $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, verificamos que $A.B$ = 0, y $A \neq 0$ y $B \neq 0$

$$A.B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una aplicación del producto de matrices, el producto escalar

Sean dos vectores $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ de *n* componentes: $\vec{v}=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ y $\vec{w}=\{w_1, w_2,...,w_n\}$.

Se define el producto escalar o producto interno entre dos vectores como *la sumatoria de los productos entre los elementos del vector* $\vec{v}$ y los correspondientes elementos del vector $\vec{w}$.

$$\vec{v}\,.\,\vec{w}=v_1.w_1+v_2.w_2+...+v_n.w_n$$

Se puede hallar el producto escalar considerando dos matrices columnas

cuyas componentes sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ que llamaremos V y W: $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix}$ y

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_n \end{pmatrix}. \qquad \vec{v} \,.\, \vec{w} = V^t . W = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & . & . & v_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_n \end{pmatrix}$$

Obsérvese que el producto escalar o interior da un número real o un escalar, de allí su nombre.

Ejemplo

Dados $\vec{v} = (1;-2;3)$ y $\vec{w} = (-1;3;2)$ $\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\vec{v} . \vec{w} = V^t . W = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -1$$

Potencias de una matriz cuadrada

Sólo se pueden elevar matrices cuadradas por las reglas vistas para el producto de matrices.

Cuadrado: elevar una matriz cuadrada al cuadrado equivale a multiplicarla por sí mismo.

$$A^2 = A \; x \; A$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$

Matriz idempotente: *una matriz es idempotente si su cuadrado es igual a la matriz.*

$$A \text{ es idempotente} \Leftrightarrow A^2 = A$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A$$

Matriz involutiva: *una matriz es involutiva si su cuadrado es igual a la matriz identidad.*

$$A \text{ es involutiva} \Leftrightarrow A^2 = I$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Nota: la matriz identidad es involutiva e idempotente.

Potencia enésima: $A^n = A.A.A...A$ (n veces)

Propiedades: a) $I^n = I$ b) $N^n = N$ c) $(k.A)^n = k^n.A^n$

Cuidado con la potencia de las matrices

Cuando trabajamos con números reales vemos que:

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
b) $(A+B).(A-B) = A^2 - B^2$

Pero que ocurre cuando A y B son matrices cuadradas, veamos:

a) $(A+B)^2 = (A+B).(A+B) = A^2 + A.B + B.A + B^2$ expresión que obtenemos aplicando la propiedad distributiva

Pero como el producto de matrices no es conmutativo, $A.B$ no es necesariamente igual a $B.A$, por lo tanto:

$(A+B)^2 = (A+B).\ (A+B) = A^2 + A.B + B.A + B^2 \neq A^2 + 2\ A.B + B^2$

b) $(A+B).(A-B) = A^2 - A.B + B.A - B^2$ expresión que obtenemos aplicando la propiedad distributiva

Pero como el producto de matrices no es conmutativo, $A.B$ no es necesariamente igual a $B.A$, por lo tanto:
$(A+B).(A-B) = A^2 - A.B + B.A - B^2 \neq A^2 - B^2$.

Ejemplo

Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A+B)\ (A-B) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] . \left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$$ ❶

$$A^2 - B^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+10 & 5-5 \\ 2-2 & 10+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+2 & -4+2 \\ -2+1 & 2+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad ❷$$

❶ $\neq$ ❷

TRANSPOSICIÓN-SIMETRÍA

Matriz transpuesta: de una matriz A es la matriz que se obtiene de permutar en la matriz A las filas por columnas. Se denomina $A^{\mathbf{t}}$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \Re^{2x3} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Re^{3x2}$

Las filas se transforman en columnas. Si la matriz A es de orden **mxn**, $A^{\mathbf{t}}$ es de orden **nxm**.

Propiedades: a) $(A^{t})^{t} = A$

b) $(A+B)^{t} = A^{\mathbf{t}} + B^{\mathbf{t}}$ la transpuesta de la suma es la suma de las transpuestas.

c) $(A.B)^{t} = B^{t}.\,A^{\mathbf{t}}$ la transpuesta de un producto es igual al producto de las transpuestas en orden inverso.

d) $(k.A)^{t} = k.A^{t}$

e) $(A^{n})^{t} = (A^{t})^{n}$

Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de estas propiedades,

a) dadas $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, verificamos que:

$(A.B)^t = B^t.A^t$

i) $(A.B)^t = \left[\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\right]^t = \begin{pmatrix}-1+15 & 3+6\\ -2+20 & 6+8\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}14 & 9\\ 18 & 14\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}14 & 18\\ 9 & 14\end{pmatrix}$ ❶

ii) $B^t.A^t = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}^t.\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}-1 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 18\\ 9 & 14\end{pmatrix}$ ❷

❶=❷

b) dados $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y k =2, verifcamos que: $(k.A)^t = k.A^t$

$(2A)^t = \left[2.\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\right]^t = \begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$ ❶

$2.A^t = 2.\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}^t = 2.\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$ ❷

❶=❷

c) dados $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y n =2, verifcamos que: $(A^n)^t = (A^t)^n$

i) $A^2 = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 15\\ 10 & 22\end{pmatrix}$

$(A^2)^t = \begin{pmatrix}7 & 15\\ 10 & 22\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}$ ❶

ii) $A^t = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$(A^t)^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}$ ❷

❶=❷

Matriz simétrica: una matriz *es simétrica* si es igual a su transpuesta.

$$A \in \mathbb{R}^{nxn} \text{ es simétrica} \Leftrightarrow A = A^t$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^t$

la matriz debe ser cuadrada y los elementos simétricos respecto de la diagonal deben ser iguales: $\forall i \ \forall j$: $a_{ij} = a_{ji}$.

Matriz antisimétrica: una matriz es *antisimétrica* si es igual a la opuesta de su transpuesta.

$$A \in \Re^{nxn} \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow A = -A^t$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$

la matriz debe ser cuadrada, los elementos simétricos respecto de la diagonal deben ser opuestos y los elementos de la diagonal deben ser 0: $\forall i$ $\forall j$: $(i = j \Rightarrow a_{ij} = 0,\ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji})$.

Propiedades de las matrices simétricas y antisimétricas

a) $\boldsymbol{A + A^t}$ es simétrica, para toda matriz *cuadrada A*.

$$\left(A + A^t\right)^t = A^t + \left(A^t\right)^t = A^t + A \Rightarrow A + A^t \text{ es simétrica.}$$

b) $A - A^t$ es antisimétrica, para toda matriz *cuadrada A*.

$$\left(A - A^t\right)^t = \left[A + \left(-A^t\right)\right]^t = A^t + \left[\left(-A^t\right)\right]^t = A^t - A = -\left(A - A^t\right)$$

$$\Rightarrow A - A^t \text{ es antisimétrica.}$$

c) $A.A^t$ es simétrica para toda matriz A, no necesariamente cuadrada.

$$\left(A.A^t\right)^t = \left(A^t\right)^t .A^t = A\,.A^t \Rightarrow A.A^t \text{ es simétrica.}$$

d) Toda matriz *cuadrada* se puede descomponer en suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

$\dfrac{A+A^t}{2}$ es simétrica, por prop. a), $\dfrac{A-A^t}{2}$ es antisimétrica, por prop. b)

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\mathrm{t}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -4 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

$$\frac{A+A^t}{2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix} \text{ y } \frac{A-A^t}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix} = A$$

e) la condición necesaria y suficiente para que el producto de dos matrices simétricas sea simétrica es que A y B sean conmutables.

$A.B$ es simétrica $\Leftrightarrow \left(A.\,B\right)^t = A.B \Rightarrow \left(A.\,B\right)^t = B^t.A^t = B.A = A\,.B$

OTRO TIPO DE MATRICES

Matrices triangulares

Triangular superior: una matriz cuadrada es triangular superior

$$\Leftrightarrow i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Triangular inferior: una matriz cuadrada es triangular inferior

$$\Leftrightarrow i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Ejemplos

$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es triangular superior

$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ es triangular inferior

Matriz inversa

La matriz $A\in\mathbb{R}^{nxn}$ es inversible, es no singular o admite matriz inversa si existe una matriz que denominamos A^{-1} que multiplicada a izquierda y derecha por A da la matriz identidad. La matriz debe ser cuadrada: $A.\,A^{-1} = A^{-1}.\,A = I$. La matriz inversa, si existe, es única.

Propiedades: a) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

b) $\left(A.\,B\right)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Dem:

$$\left(B^{-1}.A^{-1}\right).\left(A.\,B\right) = B^{-1}.\left(A^{-1}.\,A\right).B = B^{-1}.\,I\,.\,B = B^{-1}.\,B = I$$

$$\Rightarrow \left(B^{-1}.\,A^{-1}\right).\left(A.B\right) = I \Rightarrow B^{-1}.A^{-1} = \left(A.B\right)^{-1}$$

c) $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$

Dem: $A.A^{-1} = I \Leftrightarrow \left(A\,.\,A^{-1}\right)^t = I^t \Leftrightarrow \left(A^{-1}\right)^t.\,A^t = I \Leftrightarrow \left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$

d) $(\mathrm{k}.A)^{-1} = k^{-1}.A^{-1}$, si $\mathrm{k} \in \mathbb{R} - \{0\}$

Matriz ortogonal

Una matriz cuadrada es ortogonal si y sólo si su inversa es igual a la transpuesta.

$$A \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow A^{-1} = A^t$$

De lo que se deduce que una matriz es ortogonal si el producto de una matriz por su transpuesta da la identidad.

$$A \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow A\,.\,A^t = I$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$$A.A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedad: *el producto de dos matrices ortogonales del mismo orden es otra matriz ortogonal.*

Dem.: $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} = B^t.A^t = (A.B)^t \Rightarrow A.B$ es ortogonal

MATRICES COMPLEJAS

Se llaman así aquellas matrices cuyos elementos son números complejos, $A\in\mathbb{C}^{mxn}$.

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 2+i & 2 & -3i \\ -2 & 1+i & i \\ 3 & -1-i & 4 \end{pmatrix}$

Matriz conjugada: es la que se obtiene de reemplazar cada elemento por su conjugado. Se denomina $\overline{A}$.

Ejemplo: tomando el ejemplo anterior $\overline{A}=\begin{pmatrix} 2-i & 2 & 3i \\ -2 & 1-i & -i \\ 3 & -1+i & 4 \end{pmatrix}$

Propiedades: a) $\overline{A^t}=\overline{A}^t$

b) $\overline{A.B}=\overline{A}.\overline{B}$

c) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$

Matriz asociada: se llama así a la conjugada de la transpuesta, se la denomina $A^*=\overline{A^t}$.

Ejemplo:, $A=\begin{pmatrix} 2+i & 2 \\ -2 & 1+i \\ 3 & -1-i \end{pmatrix}$ $A^t=\begin{pmatrix} 2+i & -2 & 3 \\ 2 & 1+i & -1-i \end{pmatrix}$,

$$A^*=\overline{A^t}=\begin{pmatrix} 2-i & -2 & 3 \\ 2 & 1-i & -1+i \end{pmatrix}$$

Propiedades: a) $\left(A^*\right)^* = A$

b) $(A+B)^* = \overline{(A+B)^t} = \overline{\left(A^t + B^t\right)} = \overline{A^t} + \overline{B^t} = A^* + B^*$

c) $(A.B)^* = B^*.A^*$

d) $(\alpha.A)^* = \overline{\alpha}.A^*$ con $\alpha \in \mathbb{C}$

Matriz hermitiana *(o de Hermite)*

Una matriz es hermitiana si es igual a su asociada,

A es ***hermitiana*** $\Leftrightarrow A = A^*$

HERMITE, *Charles (1822-* matemático francés al cual se debe la resolución de la ecuación de 5º grado por métodos no algebraicos en 1858. Demuestra en 1873 que **e** es irracional. Fue profesor de Matemática en la Escuela Politécnica de París. Es conocido por sus matrices hermitianas.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2+i \\ i & -2 & -3-2i \\ 2-i & -3+2i & 3 \end{pmatrix}$$

se puede verificar que es hermitiana

OPERACIONES ELEMENTALES SOBRE UNA MATRIZ

Son las siguientes:

1) Permutación de dos líneas paralelas entre sí.
2) Multiplicación o división de una línea por un escalar no nulo.
3) Adición de una línea a otra paralela multiplicada por un escalar.

Matrices equivalentes

Dos matrices son equivalentes si se puede pasar de una a otra a través de un número finito de operaciones elementales.

Ejemplo

$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ multiplicamos la 1º fila por 2, se obtiene la matriz $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Si ahora a la 1º fila le sumamos la 2º fila multiplicada por 3 se obtiene la matriz $C=\begin{pmatrix} -2 & 16 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A es equivalente a la matriz B y a la matriz C porque se ha pasado de una a otra a través de operaciones elementales $A \sim B \sim C$.

RANGO DE UNA MATRIZ

Hay muchas formas de definir el rango de una matriz.

a) Es el mayor número de vectores columna o vectores fila linealmente independientes que tiene la matriz. (el concepto de independencia lineal se verá en otro capítulo).

b) Es el orden del determinante de mayor orden no nulo que se puede obtener con los elementos de la matriz (lo veremos más adelante).

Vector canónico

Son vectores en los cuales todos los elementos son iguales a 0 excepto uno que vale 1.

c) Es la mayor cantidad de vectores columna canónicos distintos que se pueden obtener en una matriz aplicando sucesivas operaciones elementales.

Propiedad: las matrices equivalentes tienen el mismo rango.

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

El método consiste en obtener una matriz equivalente a la dada en la cual aparezcan la mayor cantidad posible de vectores columna canónicos aplicando operaciones elementales.

Dada una matriz no nula $A \in \Re^{mxn}$, por ejemplo una de orden 3x4:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Elegimos un elemento no nulo (*preferentemente un* **1**) que llamamos ***pivote***, por ejemplo a_{22} y obtenemos una matriz equivalente a la matriz A aplicando las siguientes operaciones elementales:

1) La fila del pivote se divide por el pivote. (operación 2)
2) Cada elemento que está en una fila que no es la del pivote se transforma restándole a cada elemento el producto de los elementos que están en su fila y columna y en la fila y columna del pivote, todo dividido por el pivote (operación 3).

Tomando como pivote a_{22} se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - \dfrac{a_{21}.a_{12}}{a_{22}} & a_{12} - \dfrac{a_{22}.a_{12}}{a_{22}} & a_{13} - \dfrac{a_{23}.a_{12}}{a_{22}} & a_{14} - \dfrac{a_{24}.a_{12}}{a_{22}} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \dfrac{a_{24}}{a_{22}} \\ a_{31} - \dfrac{a_{21}.a_{32}}{a_{22}} & a_{32} - \dfrac{a_{22}.a_{32}}{a_{22}} & a_{33} - \dfrac{a_{32}.a_{23}}{a_{22}} & a_{34} - \dfrac{a_{32}.a_{24}}{a_{22}} \end{pmatrix}$$

Vemos que los elementos de la columna del pivote, excepto el pivote que se transforma en 1, se transforman en 0. Se obtiene así un vector canónico en la columna del pivote.

GAUSS, ***Karl Friedrich (1777-1855):***
fue uno de los más grandes científicos de la historia (sus parangones hay que buscarlos en Arquímedes, Newton o Einstein). De origen muy humilde, hijo de un jornalero pobre, fue astrónomo, físico y matemático alemán excepcional.
Sus padres lo destinaron al trabajo manual pero trabó amistad con el duque Wihelm que, impresionado por su inteligencia científica le costeó sus estudios, primero en la escuela y luego en la Universidad de Gotinga.
Calificó a la Matemática como *Reina de las ciencias* y a él se lo llamó el *Príncipe de los matemáticos*. A los 18 años crea un método para el trazado gráfico del eptadecágono con regla y compás. Introduce los números complejos en el Análisis y realiza un estudio riguroso de las series.
En su tesis doctoral de 1799 demuestra el *Teorema Fundamental del Algebra*. El monumento levantado en su homenaje en la Universidad de Gotinga, de la cual fue director, está sobre un pedestal cuya sección es un polígono regular de 17 lados.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}-\dfrac{a_{21}.a_{12}}{a_{22}} & 0 & a_{13}-\dfrac{a_{23}.a_{12}}{a_{22}} & a_{14}-\dfrac{a_{24}.a_{12}}{a_{22}} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \dfrac{a_{24}}{a_{22}} \\ a_{31}-\dfrac{a_{21}.a_{32}}{a_{22}} & 0 & a_{33}-\dfrac{a_{32}.a_{23}}{a_{22}} & a_{34}-\dfrac{a_{32}.a_{24}}{a_{22}} \end{pmatrix}$$

Regla del rectángulo

Observamos en la matriz original que todo elemento que no figura en la fila ni en la columna del pivote forma con éste la *diagonal* de un rectángulo. Los otros dos vértices determinan lo que llamamos *contradiagonal*.

JORDAN, ***Camile (1838-1922):***

matemático francés. Fue Profesor de la Escuela Politécnica de París desde 1876 hasta 1912. En 1870 fue galardonado con el premio Poncelet de la Academia de Ciencias por su *Tratado de las Sustituciones y las Ecuaciones Algebraicas*.
Trabajó particularmente en la teoría de grupos finitos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

La regla del rectángulo permite obtener el transformado de cualquier elemento que no pertenece ni a la fila ni a la columna del pivote. Dice que: *el transformado de un elemento es igual a la resta del producto de los elementos de la diagonal y el producto de los elementos de la contradiagonal, dividido todo por el pivote.*

Ejemplo: $a_{34}{}' = \dfrac{a_{22}.a_{34} - a_{32}.a_{24}}{a_{22}}$

Síntesis

1) Se elige el pivote (distinto de 0, preferentemente un 1).
2) La fila del pivote se divide por el pivote.
3) Los elementos de la columna del pivote se transforman en 0, excepto el pivote que se transforma en 1.
4) Los demás elementos se transforman por la regla del rectángulo.
5) Se repite el procedimiento eligiendo otro pivote que no pertenezca ni a la fila ni a la columna del pivote elegido anteriormente.

Ejemplo

hallar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$
\begin{array}{rrr|}
1 & -1 & 1 \\
2 & 1 & -2 \\
1 & 1 & -1 \\
-1 & 2 & 1 \\
- & - & - \\
1 & -1 & 1 \\
0 & 3 & -4 \\
0 & 2 & -2 \\
0 & 1 & 2 \\
- & - & - \\
1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & -10 \\
0 & 0 & -6 \\
0 & 1 & 2
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\text{dividiendo por } -10 \\
\text{dividiendo por } -6 \\
\\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|}
1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 2 \\
- & - & - \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0
\end{array}
\qquad \Rightarrow \quad \rho(A) = 3
$$

Cálculo de la inversa por Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan también sirve para calcular la inversa de una matriz cuadrada no singular. Para eso se escribe a la derecha de A de orden **n** la matriz identidad de orden **n**, se obtiene una matriz de orden **nx2n**. Se aplica el método de Gauss-Jordan hasta que la matriz A se haya transformado en la matriz identidad. En ese caso la otra matriz es la inversa de A. Queda: $\dfrac{A \mid I}{I \mid A^{-1}}$

Nota: si a la izquierda se obtienen los vectores canónicos pero no en el orden que están en la matriz identidad, ésta se obtiene permutando las filas de dicha matriz.

Condición de existencia: $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ admite inversa $\Leftrightarrow \rho\,(A) = n$

Ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - & - & - \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ - & - & - & - & - & - \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ - & - & - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Ahora que hemos visto como se calcula la matriz inversa de una matriz, podemos verificar algunas de las propiedades de la inversión de matrices:

Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de estas propiedades:

a) dadas $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, verificamos que:
$(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

i) $(A.B)^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}-1+15 & 3+6\\ -2+20 & 6+8\end{pmatrix}^{-1}=$

$$=\begin{pmatrix}14 & 9\\ 18 & 14\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}7/17 & -9/34\\ -9/17 & 7/17\end{pmatrix} \text{ ❶}$$

ii) $B^{-1}.A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}^{-1}=$

$$=\begin{pmatrix}-2/17 & 3/17\\ 5/17 & 1/17\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2 & 3/2\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/17 & -9/34\\ -9/17 & 7/17\end{pmatrix} \text{ ❷}$$

❶=❷

b) dada $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, verificamos que $(A^{-1})^{t}=(A^{t})^{-1}$

i) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 3/2\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}\Rightarrow (A^{-1})^{t}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$ ❶

ii) $A^{t}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow (A^{t})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$ ❷

❶=❷

c) dados $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y k =2, verifcamos que: (k.A)$^{-1}$ = k^{-1}.A^{-1}

$$\left.\begin{aligned} (2A)^{-1} &= \left[2.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \quad ❶ \\ 2^{-1}.A^{-1} &= \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \quad ❷ \end{aligned}\right\} ❶=❷$$

ECUACIONES MATRICIALES

Veamos como se pueden resolver ecuaciones donde aparecen involucradas matrices.

a) $A.X = B$ b) $X.A = B$, con $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ y no singular.

Para obtener la matriz X debemos premultiplicar o posmultiplicar (según corresponda) por A^{-1}.

$$\begin{aligned} a)\quad A^{-1}.A.X &= A^{-1}.B \\ \left(A^{-1}.A\right).X &= A^{-1}.B \\ I.X &= A^{-1}.B \\ X &= A^{-1}.B \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b)\quad X.A.A^{-1} &= B.A^{-1} \\ X.\left(A.A^{-1}\right) &= B.A^{-1} \\ X.I &= B.A^{-1} \\ X &= B.A^{-1} \end{aligned}$$

c) $A.X.B = C$, con $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxn}$ y no singulares

Primero debemos premultiplicar por A^{-1} para eliminar la matriz A del primer miembro y luego posmultiplicar por B^{-1} para eliminar la matriz B.

$$\begin{aligned} A^{-1}.A.X.B &= A^{-1}.C \\ \left(A^{-1}.A\right).X.B &= A^{-1}.C \\ I.X.B &= A^{-1}.C \\ X.B &= A^{-1}.C \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X.B.B^{-1} &= A^{-1}.C.B^{-1} \\ X.\left(B.B^{-1}\right) &= A^{-1}.C.B^{-1} \\ X.I &= A^{-1}.C.B^{-1} \\ X &= A^{-1}.C.B^{-1} \end{aligned}$$

Ejemplos

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}. \;\Rightarrow\; X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/4 & -4 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.X.\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \;\Rightarrow$

$$X = A^{-1}.C.B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 1/10 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/20 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTES

Dada una matriz cuadrada *A* se llama determinante a una función de $\Re^{n\,x\,n} \to \Re$ de modo que la imagen de cada matriz es un número real que se denomina *determinante de A*. Se representa como $|A|$ o det (*A*).
Dicho número se obtiene realizando ciertas operaciones preestablecidas entre los elementos de la matriz.

$$f:\ \Re^{n\,x\,n} \to \Re \;/\, f(A) = |A|$$

Veamos ahora algunos ejemplos:

a) $A \in \mathbb{R}^{1x1}$

$$A = a_{11} \Rightarrow |A| = |a_{11}| = a_{11}$$

b) $A \in \mathbb{R}^{2x2}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}\,.$$

c) $A \in \mathbb{R}^{3x3}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} \\ -a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$$

Ejemplos

a) $A = (3) \Rightarrow |A| = 3$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1.4 - 3.2 = -4 - 6 = -10$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - (-3).1 = 10 + 3 = 13$

Si $A \in \mathbb{R}^{3x3}$, veremos otra forma más sencilla, que es la siguiente regla para calcular su determinante. Luego veremos algunas propiedades de los determinantes que nos permitirán calcularlos de otras formas, especialmente los de orden superior a 3.

Regla de Sarrus

Es una regla práctica que sirve para calcular determinantes de tercer orden.
Se repiten las dos primeras filas. Los productos correspondientes a los signos + se suman y los otros se restan.

> **SARRUS,** ***Pedro Federico (1798-1861):*** matemático francés, profesor de Análisis de la Facultad de Ciencias de Estraburgo, es conocido por la regla que lleva su nombre para resolver determinantes y por haber obtenido en 1842 el Gran premio de Matemática.

$$
|A| = \begin{array}{|cccc|l}
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\
- & a_{31} & a_{32} & a_{33} & + \\
\end{array} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
- & a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\
- & a_{21} & a_{22} & a_{23} & +
\end{array}
\qquad -a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}
$$

Ejemplo

$$
|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0+6+4-(0-6-4) = 20
$$

$$
\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{array}
$$

Veremos otras formas de calcular determinantes además de la ya vista que es utilizando la definición, pero no es muy práctica.

OTRA FORMA DE DEFINIR LA FUNCIÓN DETERMINANTE

Vimos que el determinante de una matriz cuadrada es un escalar que se obtiene efectuando ciertas operaciones preestablecidas entre los elementos de la matriz. Ahora veremos otra forma de definir la función determinante.

Dada una matriz cuadrada se llama determinante a una función de $\Re^{n\,x\,n} \rightarrow \Re$ de modo que la imagen de cada matriz es un número real que se obtiene sumando todos los productos posibles de n elementos elegidos entre los n^2 de la matriz dada, siempre que en cada producto haya un factor de cada fila y un factor de cada columna, anteponiendo a cada producto el signo **más** o el signo **menos** según que las permutaciones que indican las filas y las columnas sean de clase par o impar.

Nota: son de clase par si ordenados los elementos según los primeros subíndices, los otros subíndices forman un número par de inversiones (no están en el orden natural), y de clase impar si forman un número impar de inversiones.

MENOR COMPLEMENTARIO

Se llama *menor complementario* de un elemento a_{ij} de una matriz cuadrada de orden n al determinante asociado a la matriz cuadrada de orden $\boldsymbol{n-1}$ que se obtiene al suprimir la fila ***i*** y la columna ***j***. Se lo denomina α_{ij}.

Ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\alpha_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \ldots$

Si la matriz es de orden 3, los menores complementarios son determinantes de orden 2, siempre son de un orden inferior al orden de la matriz cuadrada. Hay tantos menores complementarios como elementos tenga la matriz, en este caso son 9.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$ $\alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

ADJUNTO DE UN ELEMENTO

Se llama así al número que se obtiene de multiplicar al menor complementario α_{ij} por $(-1)^{i+j}$. Al adjunto del elemento a_{ij} se lo denomina $A_{ij} \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j}.\alpha_{ij}$.

Si $i+j$ es par: $A_{ij} = \alpha_{ij}$, porque $(-1)^{i+j} = 1$

Si $i+j$ es impar: $A_{ij} = -\alpha_{ij}$, porque $(-1)^{i+j} = -1$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A_{12} = (-1)^3.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$,

$$A_{32} = (-1)^5.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{13} = (-1)^4.\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -9$$

y así sucesivamente se pueden calcular los restantes adjuntos, hay 9.

MATRIZ ADJUNTA

Es la matriz transpuesta de la que se obtiene de reemplazar en una matriz cuadrada cada elemento por su adjunto. Se denomina *Adj A*.

Ejemplos: a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $A_{11}=4$ $A_{12}=2$ $A_{21}=-3$ $A_{22}=1$

$$\Rightarrow \quad Adj\ A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B_{11}=(-1)^2.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2$

$B_{12}=(-1)^3.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=6$ $\qquad B_{13}=(-1)^4.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-3$

$B_{21}=(-1)^3.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2$ $\qquad B_{22}=(-1)^4.\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=6$

$B_{23}=(-1)^5.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=5$ $\qquad B_{31}=(-1)^4.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4$

$B_{32}=(-1)^5.\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-4$ $\qquad B_{33}=(-1)^6.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2$

$$\Rightarrow Adj\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & -4 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Veremos ahora propiedades que nos permitirán resolver determinantes de orden superior de una forma más sencilla.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Cálculo de determinantes de orden superior

Demostraremos la validez de las propiedades para determinantes de 3º orden, pero su validez se puede generalizar.

1) **Desarrollo de un determinante por elementos de una línea**

Regla de Laplace

El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea cualquiera multiplicados por sus correspondientes adjuntos.

LAPLACE, *Pierre Simon de (1749-1827):* matemático francés de origen campesino, fue objeto de honores por Napoleón del que fue ministro del Interior. Luego fue senador y presidente del Senado. Los Borbones lo hicieron marqués.

Hizo múltiples aportes a distintas áreas de la matemática y la física, entre los cuales está su regla para resolver determinantes y sus famosas transformadas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} =$$

$$= a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{23} - a_{32}) - a_{12}.(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}) + a_{13}.(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31})$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} +$$

$$+ a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} = |A|$$

2) *Si en una matriz una línea es 0, su determinante vale 0.*

Supóngase que la *i-ésima* fila de *A* contiene solamente ceros. Es decir, supóngase que $a_{ij} = 0$, si j = 1, 2, 3, …,n.

Entonces $|A| = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + ... + a_{in}.A_{in} = 0 + 0 + ... + 0 = 0$

La misma demostración es válida si la *j-ésima* columna está formada por ceros.

3) *Si en una matriz se permutan filas por columnas los correspondientes determinantes son iguales.*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} \\ -a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} \end{array}$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} \\ -a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} \end{array}$$

vemos que son iguales $\Rightarrow \quad |A| = |A^t|$.

4) *Si en una matriz se permutan dos líneas paralelas los correspondientes determinantes tienen signos opuestos.*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} \\ -a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} \end{array}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{13}.a_{22}.a_{31} \\ -a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{11}.a_{22}.a_{33} = \\ = -|A| \end{array}$$

5) *Si en una matriz dos líneas paralelas son proporcionales, su determinante vale 0.*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k.a_{11} & k.a_{12} & k.a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}.k.a_{12}.a_{33} + a_{13}.ka_{11}.a_{32} + a_{12}.k.a_{13} \\ -a_{13}.k.a_{12}.a_{31} - a_{11}.k.a_{13}.a_{32} - a_{12}.k.a_{11}.a_{33} = 0 \end{array}$$

6) *Si en una matriz se multiplican todos los elementos de una línea por una constante el determinante de la matriz queda multiplicado por la constante.*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} \\ -a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} \end{array}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k.a_{21} & k.a_{22} & k.a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}.k.a_{22}.a_{33} + a_{13}.ka_{21}.a_{32} + a_{12}.k.a_{22}.a_{31} \\ -a_{13}.k.a_{22}.a_{31} - a_{11}.k.a_{23}.a_{32} - a_{12}.k.a_{21}.a_{33} = \\ k.|A| \end{array}$$

Consecuencia: si $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{nxn}} \Rightarrow |k.A| = k^n.|A|$

7) *Si los elementos de una línea de una matriz se descomponen en* ***n*** *sumandos, su determinante puede descomponerse en* ***n*** *determinantes que tienen las restantes líneas iguales.*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(a_{11}+b_{11}).A_{11}+(a_{12}+b_{12}).A_{12}+(a_{13}+b_{13}).A_{13}=$$
$$(a_{11}.A_{11}+a_{12}.A_{12}+a_{13}.A_{13})+(b_{11}.A_{11}+b_{12}.A_{12}+b_{13}.A_{13})$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

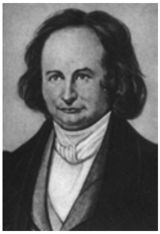
8) **Propiedad invariante-*Teorema de Jacobi***

*Si en una matriz a una línea se le suma una línea paralela multiplicada por una constante **k** el determinante de la matriz no varía.*

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

a la 1º F le sumamos la 2º F multiplicada por ***k***.

JACOBI, *Karl Gustav Jacob (1804-1851):* famoso matemático alemán de origen judío, destacado por sus aportes en Física y Astronomía. A los 21 años era profesor de Konigsberg. Son reconocidos mundialmente sus estudios sobre las funciones elípticas, que



estudió junto a Abel y se publican en 1829; las ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones y la teoría de números. Se le deben estudios sobre determinantes funcionales, uno de los cuales se llama ***jacobiano*** debido a él.

$$|A_1|=\begin{vmatrix} a_{11}+k.a_{21} & a_{12}+k.a_{22} & a_{13}+k.a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} k.a_{21} & k.a_{22} & k.a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+0=|A|$$

Esta propiedad permite *fabricar ceros*. Combinando esta propiedad con la de Laplace se pueden calcular determinantes de orden superior con cierta facilidad.

Ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Si aplicamos directamente la regla de Laplace el determinante de 4x4 se puede reducir a 3 o a 4 de 3x3 según la línea que se elija. Si se elige una línea que contiene el 0, uno de los términos del desarrollo de Laplace se anula y sólo quedan 3 determinantes de 3x3.
Si, por ejemplo, en las posiciones a_{31} y a_{41} formamos ceros aplicando el teorema de Jacobi, el determinante de 4x4 queda reducido a uno solo de 3x3.

Hacemos las siguientes sustituciones:

$\begin{array}{l} 3^o F = 3^o F + 1^o F.(-2), \\ 4^o F = 4^o F + 1^o F.(-3) \end{array}$, el determinante que se obtiene es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & 8 & -13 \end{vmatrix}$$

Si aplicamos la Regla de Laplace: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & 8 & -13 \end{vmatrix}$

$$= 1.(-1)^2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & -8 \\ 1 & 8 & -13 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0$$

De esta manera se redujo un determinante de 4x4 a sólo uno de 3x3. Ahora se puede volver a aplicar el método o aplicar la regla de Sarrus.

$$=1.(-1)^2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & -8 \\ 1 & 8 & -13 \end{vmatrix} = -65-72-8-15+64-39=-135$$

9) *En una matriz la suma de los productos de los elementos de una línea cualquiera multiplicados por los adjuntos de los elementos correspondientes a una paralela a ella es igual a 0.*

Dada $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ calculamos $a_{11}.A_{21}+a_{12}.A_{22}+a_{13}.A_{23}=$

$$=a_{11}(-1)^3.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.(-1)^4.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.(-1)^5.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$-a_{11}.(a_{12}.a_{33}-a_{12}.a_{32})+a_{12}.(a_{11}.a_{33}-a_{13}.a_{31})-a_{13}.(a_{11}.a_{32}-a_{12}.a_{31})=$$

$$=-a_{11}.a_{12}.a_{33}+a_{11}.a_{13}.a_{32}+a_{12}.a_{11}.a_{33}-a_{12}.a_{13}.a_{31}-$$

$$-a_{13}.a_{11}.a_{32}+a_{13}.a_{12}.a_{31}=0$$

10) *El determinante de una matriz cuadrada triangular superior o inferior de orden nxn es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.*

Ejemplo: $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33}$

11) **Determinante de una suma y de un producto**

a) $|A+B| \neq |A|+|B|$

El determinante de una suma de matrices ***no es igual*** a la suma de los determinantes.

Ejemplo: dadas $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$
$$-1+8 \neq 18$$
$$7 \neq 18$$

b) $|A.B| = |A|.|B|$

El determinante de un producto de matrices ***es igual*** al producto de los determinantes.

Ejemplo: dadas $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$|A| = -10$ **,** $|B| = 7 \Rightarrow |A|.|B| = (-10) - 7 = -70$

$$A.B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 18 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A.B| = 20-90-70$$

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA UTILIZANDO LA MATRIZ ADJUNTA

Otra forma de obtener la matriz inversa es de la siguiente forma:

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}\text{, si } |A| \neq 0$$

1) Se obtiene la matriz de los adjuntos.
2) Se obtiene la matriz transpuesta de ésta, es decir la matriz adjunta.
3) Se divide la matriz así obtenida por el determinante de la matriz A.

Demostración

Hacemos la demostración para una matriz de 3x3, pero se puede generalizar.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$, consideramos su matriz adjunta:

$$Adj\ \ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Si multiplicamos $A\,.(Adj\ A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} & a_{11}.A_{21} + a_{12}.A_{22} + a_{13}.A_{23} & a_{11}.A_{31} + a_{12}.A_{32} + a_{13}.A_{33} \\ a_{21}.A_{11} + a_{22}.A_{12} + a_{23}.A_{13} & a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23} & a_{21}.A_{31} + a_{22}.A_{32} + a_{23}.A_{33} \\ a_{31}.A_{11} + a_{32}.A_{12} + a_{33}.A_{13} & a_{31}.A_{21} + a_{32}.A_{22} + a_{33}.A_{23} & a_{31}.A_{31} + a_{32}.A_{32} + a_{33}.A_{33} \end{pmatrix}$$

Observamos que los elementos de la diagonal son iguales al determinante de A por ser el producto de los elementos de una línea por sus adjuntos (Regla de Laplace). El resto de los elementos es 0, por ser la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una paralela.

$A\,.\left(Adj\ A\right)=\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}=|A|.\,I$ de donde $I=\dfrac{A\,.\left(Adj\ A\right)}{|A|}$, multiplicando a ambos miembros por A^{-1} queda $A^{-1}=\dfrac{Adj\ A}{|A|}$

Ejemplo: calculamos la inversa de la matriz B de la cual ya calculamos su adjunta.

$$Adj\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & -4 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de B, $|B|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=6+6+4=16$

$$\Rightarrow B^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & -4 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}}{16}=\begin{pmatrix} 2/16 & 2/16 & 4/16 \\ 6/16 & 6/16 & -4/16 \\ -3/16 & 5/16 & 2/16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 \\ 3/8 & 3/8 & -1/4 \\ -3/16 & 5/16 & 1/8 \end{pmatrix}$$

Teorema 1: $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ *es inversible* $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

Demostración

a) A es inversible $\Rightarrow$ $A.A^{-1} = I$ $\quad |A.A^{-1}| = |I| \quad \Rightarrow \quad |A|.|A^{-1}| = 1$

$\Rightarrow |A| \neq 0$

b) $|A| \neq 0 \Rightarrow A.(Adj\ A) = |A|.I \Rightarrow I = \dfrac{A.(Adj\ A)}{|A|}$

multiplicando a ambos miembros por A^{-1} queda $A^{-1} = \dfrac{Adj\ A}{|A|}$.

Teorema 2: Si A *es inversible* $\Rightarrow$ $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

Demostración

$$A.A^{-1} = I \Rightarrow |A.A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A|.|A^{-1}| = 1 \therefore |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Teorema 3: *Si A* y *B son matrices cuadradas inversibles entonces A.B es inversible.*

Demostración

A es inversible $\Rightarrow |A| \neq 0$, B es inversible $\Rightarrow |B| \neq 0$

$|A.B| = |A|.|B| \neq 0 \Rightarrow A.B$ es inversible (por Teorema 1)

Teorema 4: El determinante de una matriz ortogonal vale 1 o -1

Demostración

A *ort*. $\Rightarrow$ $A.A^t = I \Rightarrow |A.A^t| = |I| \Rightarrow |A||A^t| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \therefore |A| = \pm 1$

DETERMINANTE DE VANDERMONDE

Entre los determinantes especiales está el de Vandermonde, que está formado por potencias sucesivas de n números distintos a, b, c,..., h:

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & c & \dots & h \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & h^2 \\ . & . & . & \dots & . \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & h^{n-1} \end{vmatrix}$$

Veamos el caso particular de $n = 4$

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Para resolverlo se reducen a cero los elementos de la primera columna, excepto el primero, restando a cada fila la anterior multiplicada por a, se obtiene:

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b.(b-a) & c.(c-a) & d.(d-a) \\ 0 & b^2.(b-a) & c^2.(c-a) & d^2.(d-a) \end{vmatrix}$$

VANDERMONDE, *Alexandre: Théophile (1735-1796)*
Matemático francés cuyo primer amor fue la música y se dedicó a la matemática recién a los 35 años.
Estudió la teoría de las ecuaciones y trabajó en determinantes. En 1778 *Vandermonde* presentó la primera parte de un trabajo sobre teoría de la música, *Système d'harmonie applicable à l'état actuel de la musique* en la Academia de Ciencias. Dos años después presentó la segunda parte. Este trabajo no presenta una teoría matemática de la música, como se podía esperar de un experto en ambas áreas. Por el contrario la idea fue decirle a los músicos que ignoraran toda teoría de la música y que usaran sus entrenados oídos para juzgar la música. Esto generó una controversia entre los músicos. Con los años las ideas de *Vandermonde* fueron ganando adeptos y en el siglo XIX la Academia de Ciencias separó la sección de Música de la sección de Matemática y la incorporó a la sección de Arte.

Aplicando la propiedad 6 de los determinantes y la regla de Laplace queda:

$1.(-1)^2.(b-a).(c-a).(d-a).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$, este determinante también es de Vandermonde, se procede de la misma manera, ahora a cada fila se le resta la anterior multiplicada por b, y así hasta llegar a uno de segundo orden.

$$(b-a).(c-a).(d-a).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a).(c-a).(d-a).1.(-1)^2\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c.(c-b) & d.(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$(b-a).(c-a).(d-a).(c-b).(d-b).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a).(c-a).(d-a).(c-b).(d-b).(d-c)$$

CÁLCULO DE UN DETERMINANTE POR TRIANGULACIÓN

Se puede calcular un determinante triangulando la matriz, utilizando las propiedades vistas, y luego calcular el determinante de una matriz triangular (propiedad 10).

EL RANGO DE UNA MATRIZ Y LOS DETERMINANTES

Al definir el rango de una matriz vimos que se lo puede definir como el orden del determinante de mayor orden no nulo que se puede obtener con los elementos de la matriz sin alterar sus filas o columnas, simplemente suprimiendo alguna de ellas. Veamos como se hace.

Submatriz de orden *k*

Sea una matriz de orden mxn. La matriz que se obtiene como intersección de ***k*** filas y ***k*** columnas se llama *submatriz cuadrada de orden k*.

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 6\\ 3 & 1 & 6 & 2\\ 4 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

a) Cada elemento de A es una submatriz de orden 1.
b) Con la intersección de las filas 1 y 3 con las columnas 3 y 4 se obtiene la submatriz cuadrada de orden 2: $\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 5 & 2\end{pmatrix}$
c) Con la intersección de las filas 1, 2 y 3 con las columnas 2, 3 y 4 se obtiene la submatriz cuadrada de orden 3: $\begin{pmatrix}3 & -2 & 6\\ 1 & 6 & 2\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$

En este ejemplo no existen submatrices de orden mayor a 3.

Subdeterminante de orden *k*

Es el determinante de una submatriz cuadrada de orden *k.*

Ejemplo: $\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-4-30=-34$

Teorema 1

$A\in\mathbb{R}^{\text{mxn}},\ \rho(A)\geq k \Leftrightarrow A$ tiene un subdeterminante de orden $k\neq 0$.

Teorema 2

$A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $\rho(A) = k \Leftrightarrow$ A tiene al menos un subdeterminante de orden $k \neq 0$ y todo subdeterminante de orden $k+1$ es 0.

Ejemplos

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$

Para calcular su determinante primero buscamos el de la submatriz de mayor orden posible, que en este caso, por ser cuadrada, es el determinante de A. Este determinante vale cero, por tener dos líneas proporcionales (1º y 2º fila) (propiedad 5).
Buscamos los subdeterminantes de 2º orden, por ejemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. En este caso es fácil verificar que todos los subdeterminantes de 2º orden son nulos. Por lo tanto el rango de la matriz A es 1: $\rho(A) = 1$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

Comenzamos por los subdeterminantes de 3º orden, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Se puede verificar que todos los subdeterminantes de 3º orden son nulos. Buscamos uno de 2º orden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 2$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de 3x3:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 2 + 2 + 12 = 0$$

Por ser 0 el determinante de 3x3 el rango no puede ser 3, calculamos ahora uno de 2x2.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$, buscamos otro determinante de 2x2,

$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 2$.

TEORÍA DE GRÁFICAS: UNA APLICACIÓN DE LAS MATRICES

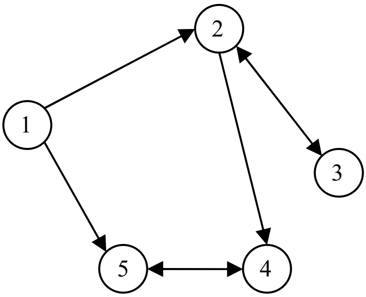
Las gráficas son auxiliares en el estudio de las relaciones entre los componentes de las redes que surgen en el comercio, las ciencias sociales, la medicina y otras áreas. Sirven para establecer los lazos familiares de una tribu, la red de vuelos comerciales que conectan ciertas ciudades o la dispersión de las enfermedades transmisibles. Veremos la relación entre la teoría de gráficas y la teoría de matrices.

Representación de un sistema de comunicación mediante una gráfica

Supongamos un sistema de comunicación mediante conexiones telefónicas en el cual hay 5 estaciones. En la tabla se indican las líneas disponibles hacia y desde las estaciones.

	1	2	3	4	5
1		*			*
2			*	*	
3		*			
4					*
5				*	

Los * indican las estaciones que se relacionan. Esta misma información se puede representar mediante una gráfica dirigida.



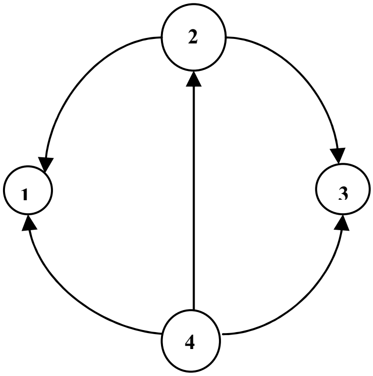
Gráfica dirigida

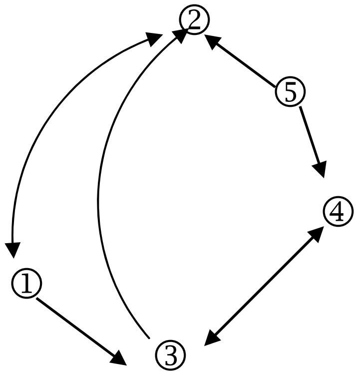
Es un conjunto de **n** puntos llamados vértices expresados como V_1, V_2, ..., V_n, junto con un número finito de bordes que unen diversos pares de vértices.

Toda gráfica dirigida se puede representar por una matriz cuadrada de *nxn* en la cual el número que se halla en la posición *ij* es el número de bordes que unen el vértice *i* con el vértice *j*.
En el caso visto los vértices que están unidos lo están a través de un solo borde. La matriz que corresponde a este caso es la siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos otros ejemplos:



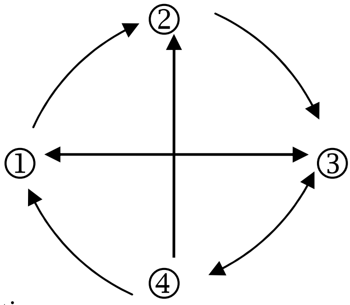


Las matrices correspondientes son:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos el caso inverso, obtener la gráfica a partir de la matriz.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,



buscamos la gráfica que debe tener 4 vértices.

Matriz de incidencia

Es una matriz correspondiente a una gráfica dirigida que verifica dos condiciones:

a) ningún vértice está conectado consigo mismo.
b) dos vértices están unidos a lo sumo por un sólo borde.

Si hubiese un 1 en la diagonal o un entero mayor que 1 en alguna posición, alguna de estas dos condiciones no se cumplen. En este curso veremos el caso de matrices de incidencia, aunque los otros casos también se pueden tratar.

Veamos algunas conclusiones que se pueden obtener de la gráfica y que no son tan evidentes.
Para eso daremos las siguientes definiciones.

Trayectoria o cadena

Si observamos la primera gráfica vemos que no hay un borde, por ejemplo, entre V_1 y V_4. Sin embargo se puede enviar una comunicación entre ellos a través de V_2 o de V_5.

$V_1 \to V_2 \to V_4$ o $V_1 \to V_5 \to V_4$

Una ruta de un vértice a otro se llama trayectoria o cadena. Estas cadenas se llaman ***2-cadena*** porque se utilizan dos bordes. En general una ruta de **n** bordes se llama **n-cadena**.

De V_3 se puede enviar un mensaje a V_5 a través de V_2 y V_4:

$V_3 \to V_2 \to V_4 \to V_5$

Cadena redundante

Se llama así a una cadena en la cual se pasa dos veces por el mismo vértice. Por ejemplo para ir de V_1 a V_4 de la siguiente manera:
$V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_2 \to V_4$.

Uno de los temas que interesa es determinar la trayectoria más corta entre dos vértices de una gráfica dirigida. Para esto observemos lo siguiente: obtendremos A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los elementos de A^2 indican el número de 2-cadenas que hay entre los vértices. Por ejemplo el 1 en la posición (1;3) indica que del vértice 1 al 3 se puede llegar a través de 1 cadena de 2 bordes: $V_1 \to V_2 \to V_3$.

El 2 en la posición (1;4) indica que del vértice 1 al 4 se puede llegar a través de 2 cadenas de 2 bordes ($V_1 \to V_2 \to V_4$ y $V_1 \to V_5 \to V_4$), y así sucesivamente.

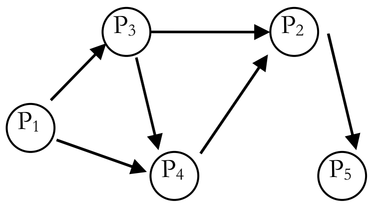
Teorema

*Si **A** es la matriz de incidencia de una gráfica dirigida, entonces el elemento a_{ij} de la matriz A^n indica el número de cadenas de **n** bordes que hay para ir del vértice **i** al vértice **j**.*
*Si a_{ij} de la matriz A^r para todo $r > n$ es 0, entonces la cadena más corta del vértice **i** al **j** es una n-cadena.*

Las gráficas dirigidas y la sociología

En los grupos habitualmente algunos integrantes dominan o tiene algún tipo de influencia sobre otros miembros. Veamos el siguiente ejemplo de 5 personas en el cual se ha establecido, por ejemplo a través de un test, quién domina a quién. Hacemos la gráfica y la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Significado de una cadena en este caso

Una cadena que no es un borde representa un control indirecto de una persona sobre otra.
Es decir si Juan domina a Pedro y Pedro a su vez domina a Claudia, entonces Juan ejerce un cierto control indirecto sobre Claudia.
Para determinar en un grupo quien ejerce control directo o indirecto sobre quien hay que calcular las potencias de la matriz de incidencia A.

Otra propiedad

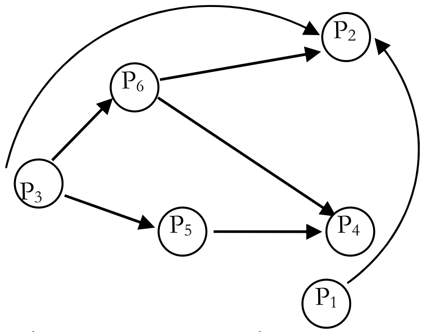
Si A es la matriz de incidencia de una gráfica dirigida entonces $A + A^2 + \ldots + A^n$ representa el número total de cadenas de 1 hasta n vértices.

Ejemplo

Describir las dominaciones directas e indirectas correspondientes a la siguiente gráfica:

Determinamos la matriz de incidencia y sus potencias:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos las interpretaciones:

La matriz A indica los dominios directos. La matriz A^2 indica los dominios indirectos a través de 1 persona, o sea a través de 2-cadenas. Vemos que la persona 3 ejerce una influencia indirecta sobre la persona 4 a través de 2 cadenas de 2 bordes, o sea a través de la persona 6 y de la persona 1.
Que la matriz A^3 sea nula indica que no hay influencias a través de 3-cadenas y por lo tanto tampoco habrá de orden mayor a 2-cadenas.

Otra aplicación: al contagio de enfermedades

Supongamos un grupo de personas, por ejemplo de 4 personas, infectado por una enfermedad. Y tenemos otro grupo B de, por ejemplo 3 personas. Algunas de las personas del grupo A contagian a las del grupo B, esto queda definido a través de una matriz de contacto directo A de orden 4x3, por ejemplo la siguiente: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

Esto quiere decir, por ejemplo, que la 1º persona del 1º grupo contagió a la 1º persona del 2º grupo (a_{11}=1) y que la 4º persona del 1º grupo contagió a la 1º y a la 3º del 2º grupo (a_{41}=1 y a_{43}=1), etc.
El número de filas de la matriz A indica el número de personas del 1º grupo y el número de columnas indica el número de personas del 2º grupo.
Supongamos ahora que el 2º grupo de 3 personas a su vez entra en contacto con un 3º grupo, de por ejemplo 3 personas y que entre ellos se efectúan algunos contagios que quedan definidos a través de una matriz B de 3x3: $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

Por ejemplo, la 1º persona del 2º grupo contagia a la 3º del 3º grupo (a_{13}=1), etc.
Si queremos determinar la matriz de contactos ***indirectos*** entre el 1º grupo y el 3º debemos efectuar el producto entre las matrices A y B que denominamos C. Las filas de esta matriz C representan a los miembros del 1º grupo y las columnas a los del 3º grupo.

$A.B = C = \begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\1&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}$, lo que quiere decir que, por ejemplo, la 3º

persona del 3º grupo es contagiada indirectamente dos veces por la 1º del 1º grupo (c_{13}=2). Uno de estos contagios se hace a través de la 1º del 2º grupo y la otra a través de la 3º del 2º grupo.

Además si sumamos los términos de cada columna, obtenemos el número de contactos indirectos que tuvo cada persona del grupo 3. Por ejemplo, la 3º persona del grupo 3 tuvo 5 contactos indirectos (2+1+2). Toda esta información se puede obtener analizando las matrices.

APLICACIONES ECONÓMICAS

Son muchas las aplicaciones económicas que tienen las matrices, desde una forma sencilla y ordenada de brindar información hasta operaciones más complejas como la matriz insumo-producto que veremos en otro capítulo.

La matriz como forma ordenada de brindar información

Supongamos una empresa de autopartes que en Buenos Aires vende 4 productos de 3 marcas de automóviles diferentes. La empresa lleva la información de cuántas unidades de cada producto se vendieron en un determinado período a través del siguiente cuadro:

Buenos Aires	Puertas	Ventanillas	Frenos	Motores
Ford	50	60	45	70
Renault	40	60	50	80
Fiat	100	120	140	90

Esta información se puede expresar a través de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3x4}$

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 45 & 70 \\ 40 & 60 & 50 & 80 \\ 100 & 120 & 140 & 90 \end{pmatrix}$$

Por fila leemos cuántas autopartes se vendieron por marca, por columna cantidad vendida por producto.
Por otro lado la empresa recibe la información de las ventas de Córdoba, expresada a través de la siguiente tabla.

Buenos Aires	Puertas	Ventanillas	Frenos	Motores
Ford	40	70	40	30
Renault	50	50	70	40
Fiat	100	120	100	50

Esta información también se puede expresar a través de una matriz $B \in \mathbb{R}^{3x4}$:

$$B = \begin{pmatrix} 40 & 70 & 40 & 30 \\ 50 & 50 & 70 & 40 \\ 100 & 120 & 100 & 50 \end{pmatrix}$$

Algunas operaciones sencillas

Si la empresa quisiera saber cuáles fueron las ventas totales de ese período todo lo que tiene que hacer es sumar las matrices y obtener la matriz Venta Totales: $V_T = A + B$.

$$= \begin{pmatrix} 50 & 60 & 45 & 70 \\ 40 & 60 & 50 & 80 \\ 100 & 120 & 140 & 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 70 & 40 & 30 \\ 50 & 50 & 70 & 40 \\ 100 & 120 & 100 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 130 & 85 & 100 \\ 90 & 110 & 120 & 120 \\ 200 & 240 & 240 & 140 \end{pmatrix}$$

Supongamos ahora que hubo un aumento general de las ventas en Buenos Aires del 20%. Podemos obtener la nueva matriz de ventas de A_1 multiplicando a la matriz A por 1,2.

$$A_1 = 1{,}2.A = 1{,}2. \begin{pmatrix} 50 & 60 & 45 & 70 \\ 40 & 60 & 50 & 80 \\ 100 & 120 & 140 & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 72 & 54 & 84 \\ 48 & 72 & 60 & 96 \\ 120 & 144 & 168 & 108 \end{pmatrix}$$

Volvamos al ejemplo de la matriz A que por fila nos indica las ventas por marca y por columna las ventas de cada autoparte. Si quisiéramos que fuese al revés, es decir que por fila nos indique las ventas por autoparte y por columna las ventas por marca, solo tenemos que obtener la matriz transpuesta.

$$A^t = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 100 \\ 60 & 60 & 120 \\ 45 & 50 & 140 \\ 70 & 80 & 90 \end{pmatrix}$$

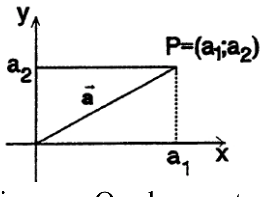
Si además se conocen los precios de venta de cada autoparte (todas las marcas tienen el mismo precio) dados a través de la matriz columna $p = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \\ 100 \end{pmatrix}$, para saber los ingresos que se obtuvieron por cada marca sólo debemos multiplicar A x p.

$$A\text{x}p = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 45 & 70 \\ 40 & 60 & 50 & 80 \\ 100 & 120 & 140 & 90 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.500 \\ 10.400 \\ 20.000 \end{pmatrix}$$

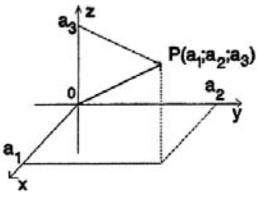
Lo que quiere decir por autopartes Ford se recaudaron 11.500, por autopartes Renault se recaudaron 10.400 y por autopartes Fiat 20.000.
Vemos así algunas de las aplicaciones que las operaciones entre matrices tienen en la economía.

Antes de ver otras aplicaciones recordaremos algunos conceptos del álgebra vectorial.

Breves conceptos de álgebra vectorial



A cada punto P del espacio (2 o 3 dimensiones) se le puede hacer corresponder un vector $\overrightarrow{OP}$ llamado ***vector posición del punto*** que tiene como origen en el punto O (centro de coordenadas) y como extremo al punto P. Se establece así una correspondencia entre los vectores con origen en O y los puntos del espacio considerado. Pero como a la vez existe una correspondencia entre los puntos y los números reales, podemos establecer una relación entre los vectores y los números reales (coordenadas del punto), ya sea un par o una



terna de números reales según la dimensión del espacio considerado. $\vec{a}=(a_1;a_2)$ ó $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.

A su vez cada vector se puede considerar, según convenga, como una matriz fila o una matriz columna:

$$\vec{a}=(a_1;a_2)=A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix} \text{ ó } \vec{a}=(a_1;a_2)=A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)=A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix} \text{ ó } \vec{a}=(a_1;a_2;a_3)=A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$$

Estos conceptos se pueden generalizar a vectores de *n* componentes.

Veamos ahora otras aplicaciones económicas.

Vector de precios

Dado un conjunto de bienes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cuyos precios son respectivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$, el vector de precios es aquél en el cual aparecen expresados los precios de los distintos bienes: $\vec{p}=(p_1;p_2;\ldots;p_n)$. Este vector, como ya vimos, se puede considerar como una matriz fila o columna según convenga.

Vector de producción – Vector de costos – Costo de producción

Supongamos que una empresa produce bienes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ en cantidades $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente cuyos costos de producción unitarios son $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Llamaremos ***vector de producción*** al vector cuyas componentes son las cantidades que se producen de cada bien: $\vec{P}=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$. El ***vector de costos*** es el vector que tiene por componentes los costos unitarios de producción de cada bien: $\vec{C}=(c_1;c_2;\ldots;c_n)$. Si pensamos a ambos vectores como matrices fila $\in \mathbb{R}^{1xn}$ a las que denominamos respectivamente como *P* y *C*, el costo total se obtiene multiplicando $P.C^t$ o $C.P^t$.

$$Costo\ total = C_T = P.C^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix} = x_1.c_1 + x_2.c_2 + \dots + x_n.c_n$$

Vector de demanda – Vector de precios – Ingreso Total

Supongamos que una empresa produce bienes $X_1, X_2, \dots, X_n$ en cantidades $x_1, x_2, \dots, x_n$ respectivamente cuyos precios de venta son $p_1, p_2, \dots, p_n$. Llamaremos ***vector de demanda*** al vector cuyas componentes son las cantidades que se demandan (y que se producen) de cada bien: $\vec{D} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$. El ***vector de precios***, como ya vimos, es el vector que tiene por componentes los precios unitarios de cada bien: $\vec{p} = (p_1; p_2; \dots; p_n)$. Si pensamos a ambos vectores como matrices fila $\in \mathbb{R}^{1xn}$ a las que denominamos respectivamente como D y p, el ingreso total se obtiene multiplicando $D.p^t$ o $p.D^t$.

$$Ingreso\ total = I_T = D.p^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \end{pmatrix} = x_1.p_1 + x_2.p_2 + \dots + x_n.p_n$$

Sistemas de precios

a) Supongamos que una empresa produce bienes $X_1, X_2, \dots, X_n$ con un presupuesto R. Para dicha producción tiene asignados presupuestos r_1 para X_1, r_2 para $X_2, \dots, r_n$ para X_n. Queda así definido un vector de presupuestos $\vec{R} = (r_1; r_2; \dots; r_n)$. Los insumos fundamentales para producir los bienes los indicamos como a_{ij}. Cada a_{ij} representa la cantidad del insumo j para producir el bien X_i. Se desea saber qué precios unitarios

puede pagar la empresa por cada insumo para cumplir con el presupuesto *R*. Para resolverlo se efectúa el producto entre la matriz de *requerimientos de insumos* a_{ij} (que denominamos *A*) y la matriz columna o vector correspondientes a los *precios de cada insumo p*. Se obtiene así la matriz columna o vector correspondiente a los *presupuestos*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & \\ . & . & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ . \\ r_n \end{pmatrix} \Rightarrow A.p = R \Rightarrow A^{-1}.A.p = A^{-1}.R$$

$$\therefore p = A^{-1}.R$$

Es decir que los precios que se deben pagar por cada insumo se obtienen multiplicando la matriz inversa de la matriz de insumos por la matriz columna de los presupuestos asignados a cada bien.

b) Supongamos que una empresa produce bienes $X_1, X_2, \dots, X_n$ en cantidades $x_1, x_2, \dots, x_n$. Los a_{ij} representan ahora el precio del insumo *i* para producir una unidad del bien X_j. La matriz columna $G = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}^t$, llamada matriz de gastos, indica el total gastado en cada uno de los insumos. Se quiere saber cuántas unidades de cada bien se han producido en un período determinado dada la matriz *G* y la matriz *A*. Para resolverlo se efectúa el producto entre la matriz *A* de *requerimientos de pagos de insumos* por la matriz columna o vector de las *cantidades de cada bien X*, lo que es igual a la matriz columna o *vector de gastos G*. De esta ecuación se despeja el *vector de cantidades X*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & \\ . & . & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \end{pmatrix} \Rightarrow A.X = G \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.G$$

$$\therefore X = A^{-1}.G$$

Ejemplos

I) Costo de producción

Una empresa alimenticia produce yoghurts, flancitos y gelatinas. En un mes se producen 300, 200 y 150 unidades respectivamente. El costo de producción unitario para cada bien es de \$2, \$1m2 y \$2,5. Se pide calcular el costo total mensual de producción de dicha empresa.

$$\textit{Costo total} = I_T = P.C^t = \begin{pmatrix} 300 & 200 & 150 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = 1.215$$

II) Ingreso

La empresa del caso anterior vende cada producto a \$3, \$3 y \$4 respectivamente. Se pide calcular el ingreso total mensual de dicha empresa.

$$\textit{Ingreso total} = I_T = D.p^t = \begin{pmatrix} 300 & 200 & 150 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2.100$$

III) Sistema de precios

a) Una empresa produce robots, licuadoras y lavarropas en serie. Dispone de \$250.000 para la compra de motores, \$220.000 destinados a microchips y \$100.000 para armazones. ¿Qué precios unitarios debe pagar por los motores, los microchips y los armazones si la matriz de requerimientos de insumos *A* es la siguiente.

$$A=\begin{pmatrix}20&50&30\\30&40&20\\10&20&10\end{pmatrix}$$

$$P=A^{-1}.R\Rightarrow P=\begin{pmatrix}20&50&30\\30&40&20\\10&20&10\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}250.000\\220.000\\100.000\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&1/10&-1/5\\-1/10&-1/10&1/2\\1/5&1/10&-7/10\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}250.000\\220.000\\100.000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.000\\3.000\\2.000\end{pmatrix}$$

Se deben pagar \$2.000 por cada motor, \$3.000 por cada microchip y \$2.000 por cada armazón.

b) Una empresa produce triciclos amarillos, camiones verdes y convertibles rojos. Los insumos que utiliza son pintura, chapa y motores. El costo en pintura para producir un tractor es \$20, para producir un camión es \$50 para el caso del convertible es \$30. En chapa, cada tractor insume \$30, mientras cada camión necesita \$40 y cada convertible \$20. Los motores cuestan \$10, \$20 y \$10 respectivamente. Si los gastos totales en pintura fueron de \$250, en chapa \$220 y en motores \$100, se quiere averiguar cuántos tractores, cuántos camiones y cuántos convertibles produjo la empresa en el período.

$$X=A^{-1}.G$$

$$X=\begin{pmatrix}20&50&30\\30&40&20\\10&20&10\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}250\\220\\110\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/10&-1/5\\-1/10&-1/10&1/2\\1/5&1/10&-7/10\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}250\\220\\100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$$

Se produjeron 2 tractores, 3 camiones y 2 convertibles.

Otro ejemplo

Un supermercado vende 1.500 gaseosas, 700 jugos y 1.400 dulces por semana. Los precios de venta unitarios son \$1,65, \$0,80 y \$2,50 respectivamente. A su vez los costos unitarios son respectivamente \$1,10, \$ 0,50 y \$1,80.

a) Indicar los vectores de precios, demanda y costo.

b) Obtener, como resta de matrices columna, el beneficio unitario.

c) Obtener, multiplicando matrices, el ingreso total y el costo total.

d) Obtener el beneficio total aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la resta de matrices.

a) $\vec{p} = (1{,}65; 0{,}80; 2{,}50)$ $\vec{D} = (1.500; 700; 1.400)$ $\vec{C} = (1{,}10; 0{,}50; 1{,}80)$

b) $B_u = I_u - C_u = \begin{pmatrix} 1{,}65 \\ 0{,}80 \\ 2{,}50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}10 \\ 0{,}50 \\ 1{,}80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}55 \\ 0{,}30 \\ 0{,}70 \end{pmatrix}$

c) $I_T = D.p^t = \begin{pmatrix} 1.500 & 700 & 1.400 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1{,}65 \\ 0{,}80 \\ 2{,}50 \end{pmatrix} = 6.535$

$C_T = D.C^t = \begin{pmatrix} 1.500 & 700 & 1.400 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1{,}10 \\ 0{,}50 \\ 1{,}80 \end{pmatrix} = 4.520$

En el caso de ventas el costo se obtiene multiplicando a la matriz de demanda (en lugar de la matriz de producción) por la matriz transpuesta de la matriz de costos.

d) $B = D^t.(I_u - C) = D^t.I_u - D^t C =$

$$\begin{pmatrix} 1.500 & 700 & 1.400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}65 \\ 0{,}80 \\ 2{,}50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.500 & 700 & 1.400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}10 \\ 0{,}50 \\ 1{,}80 \end{pmatrix} = 6.535 - 4.520 = 2.015$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Matrices

1) Escribir explícitamente las matrices definidas por:

a) $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ / $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ b) $A \in \mathbb{R}^{4x4}$ / $a_{ij} = i + j$

c) $A \in \mathbb{R}^{5x5}$ / $a_{ij} = \begin{cases} i!\ si\ i < j \\ j!\ si\ i \geq j \end{cases}$

2) Hallar x, y, z y w si: $3.\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$

3) Determinar dos matrices $X \in \mathbb{R}^{2x2}$ e $Y \in \mathbb{R}^{2x2}$ tales que:

$$\begin{cases} 3X + 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \\ -2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

4) Siendo las matrices $A \in \mathbb{R}^{2x3}$ y $B \in \mathbb{R}^{2x3}$ cuyos elementos genéricos son: $a_{ij} = 2i - j$ y $b_{ij} = 1 - i^2$, hallar $C = A - 2B$.

5) Dadas las matrices A, B y C, hallar a) $A + B - C$
b) M / $A + C - B + M = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 9 \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

6) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, hallar a) $A - B$ b) $A + 3B$

7) Dadas las matrices *A*, *B, C* y *D*, hallar a) *A x B* b) *A x C* c) (*A*+*D*) *x C*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

8) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

verificar que $(A+B).(A-B)\neq A^2-B^2$

9) Verificar que (*A.B*) = (*A.C*) si:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & -2\\ 3 & -2 & -1 & -1\\ 2 & -5 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

10) Obtener A^2 si: $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, clasificar la matriz *A*

11) Sea $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ a) Si $f(x)=-3X^2+2X-5I$, hallar f(A)

b) hallar α y β tal que: $A^2+\alpha.A+\beta.I=0$.
I = matriz identidad, 0 = matriz nula

12) Verificar si las siguientes matrices satisfacen las relaciones indicadas: $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ $A^2-3.A+8.I=0$ $B=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ $B^2=B$

13) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ calcular:

a) $(A.B)^t$ b) $(B.A)^t$ c) $B^t.A^t$

14) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ hallar:

a) A^t y B^t b) verificar que $(A+B)^t = A^t + B^t$

c) $(A.B)^t = B^t.A^t$

15) Indicar cuales de las siguientes matrices son idempotentes y cuales involutivas:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

16) Demostrar que si: a) $(I-A).(I+A)=0$, entonces la matriz A es involutiva.

b) $\frac{1}{2}(I-A)$ es idempotente, entonces la matriz A es involutiva.

17) Analizar si las siguientes matrices son simétricas o antisimétricas

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

18) Dada $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ verificar que:

a) $A-A^t$ da una matriz antisimétrica.

b) $A+A^t$ da una matriz simétrica.

c) descomponerla en suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.

19) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ verificar que:

a) $A.A^{t}$ es simétrica
b) $A + A^{t}$ es simétrica
c) $B - B^{t}$ es antisimétrica
d) $(A.B)^{t} = B^{t}.\ A^{t}$

20) Demostrar que si A es simétrica, entonces:
a) $A.A^{t}$ es simétrica.
b) $B^{t}.A.B$ es simétrica cualquiera sea la matriz B cuadrada.

21) Demostrar que si una matriz cuadrada es simétrica, entonces A^{n} también lo es.

22) Probar que toda matriz $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ donde $\alpha\in\Re$, es ortogonal.

23) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1+i & 2 & -4\\ 1-i & 3i & 5i\end{pmatrix}$,

calcular: *a*) $A^{t}+B^{t}$ y b) $(A+B)^{t}$

24) Si $A=\begin{pmatrix}1 & -i & 2+i\\ i & -2 & -3-2i\\ 2-i & -3+2i & 3\end{pmatrix}$, verificar si:

a) A es hermítica
b) $\overline{A^{t}}=\left(\overline{A}\right)^{t}$
c) $2A$ es hermítica
d) iA es hermítica

25) Obtener, si existen, las matrices inversas de:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\\1&2&4\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&-1&2&1\end{pmatrix}$$

26) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0\\-3&1\end{pmatrix}$ verificar que: $(A.B)^{-1}=B^{-1}.\,A^{-1}$.

27) Demostrar que si: A es una matriz de orden 2x1 y B es una matriz de orden 1x2, entonces su producto es una matriz no inversible.

28) Hallar $X\in\mathbb{R}^{2x2}$ / a) $X.\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\2&0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2&-1\\0&-1\end{pmatrix}.X.\begin{pmatrix}4&2\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&0\end{pmatrix}$

29) Hallar todas las matrices $B\in\mathbb{R}^{2x2}$ no nulas / $B^{-1}.A.B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&6\end{pmatrix}$ si $A=\begin{pmatrix}1&2\\5&4\end{pmatrix}$.

30) Si $A\in\mathbb{R}^{nxn}$ / $A^3=2A+I$, hallar A^{-1} en función de A.

31) Demostrar que si $A\in\mathbb{R}^{3x3}$ es una matriz diagonal, siendo los elementos de la diagonal no nulos, entonces A es no singular y su inversa es la matriz formada por los inversos de los elementos de la diagonal.

32) Hallar $X\in\mathbb{R}^{3x3}$ / $\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}.X=\begin{pmatrix}2&-3&1\\2&0&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$.

33) Demostrar que el producto de dos matrices ortogonales también lo es.

34) Determinar el rango de: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 2 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

35) Hallar M^1 si $M = \left(A.B^t\right) + 2C$ y clasificar la matriz obtenida si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3{,}5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

36) Determinar si existe $k \in \mathbb{R}$ para que las matrices A y B tengan el mismo rango igual a 3.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ k & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & k \end{pmatrix}$

37) Demostrar que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisface la ecuación

$X^2 - (a+d).X + (ad - bc).I = 0$.

38) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar p y q tales que $A^3 = pA^2 + qA$.

39) Si $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, determinar X^2 si:
$\left(X.A^{-1}\right)^{-1}=B^{-1}.X$.

40) Hallar $X / X^{-1}.A.X=A^t$ si $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

41) Si $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ encontrar todos los k para que A sea solución de la ecuación $X^2-7.X+10.I=0$.

42) Si F es involutiva, G es idempotente y $F.G = I$, demostrar que $(F-G)^2=G.(I-F)$

43) Si $5.A^{-1}=A-4I$, expresar todas las soluciones posibles, si A es una matriz diagonal de orden 2 y satisface esta relación.

44) Encontrar a, b y c tales que $a.A^2+b.A+C.I=0$ si $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

45) Verificar que la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es igual a su inversa.

46) Demostrar que si:
a) A es simétrica y ortogonal, entonces A es involutiva.
b) A es simétrica e involutiva, entonces A es ortogonal.
c) A es ortogonal e involutiva, entonces A es simétrica.

Aplicaciones económicas

1) Supongamos que la empresa La Serenísima tiene una planta procesadora en Vicente Casares que produce 4 productos (yogurt, leche, leche cultivada y dulce de leche) y que los productos pueden ser de 3 tipos (enteros, diet, de bajo tenor graso). La empresa lleva la información de cuántas unidades de cada producto produce en un determinando período a través del siguiente cuadro:

Vicente Casares	Yoghurt	Leche	Leche cultivada	Dulce de leche
Enteros	800	900	700	1.000
Diet	600	600	400	500
Bajo tenor graso	1.000	1.800	1.700	1.900

Por otro lado la empresa recibe la información de la producción en Navarro expresada a través de la siguiente tabla

Navarro	Yoghurt	Leche	Leche cultivada	Dulce de leche
Enteros	400	700	400	300
Diet	500	500	700	400
Bajo tenor graso	1.000	1.200	1.000	500

a) Obtener la matriz que indique la producción total.
b) Si se aumenta la producción en Navarro un 30%, indicar la nueva matriz de producción.

2) Un colegio paga a los empleados su sueldo y les concede una participación en las acciones como gratificación anual. Un determinado año el rector recibió \$50.000 y 80 acciones, cada uno de los 3 vicerrectores recibió \$35.000 y 60 acciones, cada uno de los 20 profesores recibió \$20.000 y 30 acciones y el secretario general recibió \$25.000 y 40 acciones.
   a) expresar los pagos de dinero en acciones y en acciones por medio de una matriz de 2x4.
   b) expresar el número de empleados de cada categoría por una matriz columna.
   c) utilizar la multiplicación de matrices para calcular la cantidad total de dinero y acciones que gastó el colegio en el pago a sus funcionarios ese año.

3) Una empresa alimenticia produce dulces, quesos y mermeladas. En un mes se fabrican 3.000. 2.500 y 1.500 unidades respectivamente. El costo de producción unitario para cada bien es \$4, \$3, y \$3. Se pide plantear el cálculo del costo total mensual de producción de la empresa como producto de matrices y calcularlos.

4) Una empresa produce triciclos, bicicletas y ciclomotores en serie. Dispone de \$170.000 para pago de mano de obra, \$120.000 destinados a ruedas y \$200.000 para armazones. ¿Qué precios unitarios debe pagar por la mano de obra, las ruedas y los armazones si la matriz de requerimientos de insumos A es la siguiente?

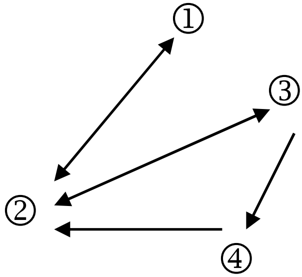
$$A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 30 \\ 20 & 10 & 10 \\ 15 & 25 & 35 \end{pmatrix}$$

5) Una empresa produce reglas, biromes y lapiceras. Los insumos que utiliza son pintura, plástico y mano de obra. El costo en pintura para producir 1.000 reglas es 1, para producir 1.000 biromes es 2 y para producir 1.000 lapiceras en 3 unidades monetarias. En plástico, 1.000 reglas insumen 1 unidad monetaria, 1.000 biromes 3 y 1.000 lapiceras 3. Los gastos en mano de obra son, para cada 1.000 unidades, 1, 2 y 4 respectivamente. Si los gastos totales en pintura fueron 390, en plástico 400 y en mano de obra 500, determinar cuántas reglas, cuántas biromes y cuántas lapiceras se produjeron (en miles).

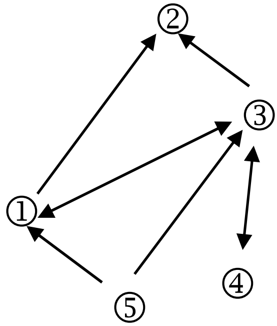
Gráficas dirigidas

1) Dada la siguiente gráfica dirigida de rutas de una aerolínea:

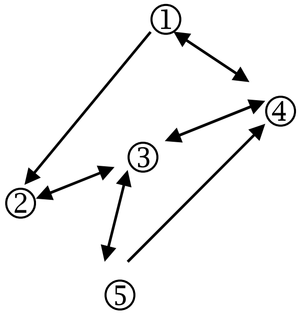
a) hallar la matriz de incidencia
b) hallar la matriz que indica las rutas con 1 escala
c) ¿cuántas rutas con 1 escala hay para ir de 3 a 2?
d) ¿cuántas rutas con 1 escala hay para ir de 4 a 2?
e) ¿entre las localidades hay 2 rutas con 1 escala?



2) Dada la siguiente gráfica dirigida que representa las influencias de un grupo:
   a) hallar la matriz que representa los dominios o influencias directas dentro del grupo.
   b) hallar la matriz que indica las influencias directas a través de 1 persona.
   c) ¿cuántas personas ejercen influencias indirectas a través de 1 persona sobre la 4?



3) La figura es un diagrama e redes que muestra la estructura de rutas de una empresa de transporte que da servicio a 5 ciudades. Se pide:
   a) construir la matriz de incidencia.
   b) obtener la matriz que indica el servicio con 1 escala que existe entre todas las ciudades.
   c) ¿entre qué ciudades existen 2 servicios con 1 escala?



Determinantes

1) Resolver los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$

2) Hallar x para que:

a) $\begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ -4 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-5 & 7 \\ -1 & x+3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2x & -1 & 1 \\ x & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x-1 & -1 \\ 1 & x+1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

3) Hallar x real o complejo para que la matriz A sea singular:

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ 8 & -2 & x \\ 4 & x & 0 \end{pmatrix}$$

4) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5$, hallar $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-2d & b-2e & c-2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

5) Si $A \in \mathbb{R}^{4x4}$ y $k \in \mathbb{R}$ demostrar que $|k.A| = k^4.|A|$

6) Demostrar que si $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ es una matriz triangular superior entonces su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal.

7) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, demostrar que $|A^2| = (a^2 + b^2)^2$

8) Calcular a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+3d & b+3e & c+3f \\ d & e & f \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ si $a+b+c=3$

9) Dadas $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}$, si $C = A.B$, hallar x para los cuales C es inversible.

10) Demostrar que si A es una matriz cuadrada no singular, entonces el determinante de su inversa es igual al inverso de su determinante.

11) Si a, b, c y d son los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada de cuarto orden, demostrar que si A es diagonal, entonces $|A| = a.b.c.d$

12) Dada $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}a_{13} & 2a_{11}-4a_{13} & -6a_{12} \\ \frac{1}{3}a_{23} & 2a_{21}-4a_{23} & -6a_{22} \\ \frac{1}{3}a_{33} & 2a_{31}-4a_{33} & -6a_{32} \end{pmatrix}$ y $|A| = \dfrac{1}{k}$ $k \neq 0$, calcular: a) $|k.A^{-1}.B|$ b) $|B^{-1}.A^t|$

13) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, hallar r tal que: $A^2-(a+d).A+r.I=0$ ¿qué relación tiene r con la matriz A?

14) Si $A\in\mathbb{R}^{4x4}$ y $|A|=-2$, calcular: a) $|2A^{-1}|$, b) $|2A|^{-1}$, c) $|(2A)^{-1}|$. Justifique cada paso.

15) Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, hallar la matriz adjunta y verificar que:

a) la que $Adj\,(AdjA)=A$, b) $(Adj\ A)^t = Adj(A^t)$

16) Para la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, verificar que $\left|A.A^t\right| = |A|^2$.

17) Si $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ y $|A|=5$ y a la 1º fila se le resta la 3º multiplicada por 2, se obtiene la matriz B. Determinar justificando la respuesta $|B|=5$.

18) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ y $|C|=8$, resolver: $\begin{cases} |A|.x + \left|B^{-1}.C\right|.y = 28 \\ |C.A|.x + \left|B.A^{-1}\right|.y = 176 \end{cases}$

Y ahora un problema tomado en el ingreso a la Facultad Superior de Economía en la Universidad de Rumania

Determinar el rango de la matriz *A* para distintos valores de α, β, γ ∈ ℝ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

RESPUESTAS

Matrices

1) a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 24 & 24 \\ 1 & 2 & 6 & 24 & 120 \end{pmatrix}$

2) $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$, $w = 3$ 3) $X=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

4) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ 5) a) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & 17 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ b) $M=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

6) a) $A-B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A+3B=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 14 \\ 6 & -10 & -2 \end{pmatrix}$

7) a) $A \text{ x } B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ b) $AxC=\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ c) $(A+D)xC=\begin{pmatrix} -4 \\ -9 \end{pmatrix}$

10) $A^2 = I \Rightarrow A$ es involutiva 11) $f(A)=\begin{pmatrix} -20 & -13 \\ 26 & -7 \end{pmatrix}$, $\alpha = -5$, $\beta = 8$

13) $(A.B)^t=\begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$, $(B.A)^t=\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 23 \end{pmatrix}$ $(B^t.A^t)=\begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$

14) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

15) A y C son idempotentes, B es involutiva

17) A no es nada, B es simétrica, C es antisimétrica

18) $A=\begin{pmatrix}1 & 5/2 & 3\\ 5/2 & 5 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1/2 & -4\\ -1/2 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$

23) $A^t+B^t=(A+B)^t=\begin{pmatrix}3+i & 4-i\\ 3 & 2+3i\\ -7 & -3+5i\end{pmatrix}$ 24) a) sí, b) sí, c) sí, d) no

25) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/5 & 2/5\\ -1 & 3/5 & 1/5\\ -1 & 1/5 & 2/5\end{pmatrix}$, C no admite inversa

$D^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $E^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -5/3 & -2 & -4/3\\ 0 & 1/3 & 0 & -1/3\\ -1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & -17/3 & -6 & -10/3\end{pmatrix}$

28) a) $X=\begin{pmatrix}-1/7 & 11/7\\ 4/7 & -2/7\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}3/20 & 3/5\\ 1/5 & -1/5\end{pmatrix}$

29) $B=\begin{pmatrix}a & b\\ -a & \frac{5}{2}b\end{pmatrix}$ 31) $A^{-1}=A^2-2.I$ 32) $X=\begin{pmatrix}-2 & -5 & 5\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$

34) $\rho(A)=2,\ \rho(B)=3,\ \rho(C)=3,\ \rho(D)=2$ 35) $\nexists M^{-1}$, es singular

36) $\nexists k$ 38) $p=3,\ q=-2$ 39) $X^2=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 14 & 7\end{pmatrix}$ 40) $X=\begin{pmatrix}3b-d/2 & b\\ b & d\end{pmatrix}$

41) $k=2$ 43) $A_1=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $A_4=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

44) $S=\{(a;-2a;2a)\}$

Aplicaciones económicas

1) a) $P_t=\begin{pmatrix}1.200 & 1.600 & 1.100 & 1.300\\ 1.100 & 1.100 & 1.100 & 900\\ 2.000 & 3.000 & 2.700 & 2.400\end{pmatrix}$

b) $P=\begin{pmatrix}520 & 910 & 520 & 390\\ 650 & 650 & 910 & 520\\ 1.300 & 1.560 & 1.300 & 650\end{pmatrix}$

2 a) $\begin{pmatrix}50.000 & 35.000 & 20.000 & 25000\\ 80 & 60 & 30 & 40\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 20\\ 1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}50.000 & 35.000 & 20.000 & 25000\\ 80 & 60 & 30 & 40\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 20\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}580.000\\ 900\end{pmatrix}$

3) \$24.000 4) \$3.000, \$ 5.500 y \$500 respectivamente

5) 40 reglas, 10 biromes y 110 lapiceras

Gráficas dirigidas

1) a) $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ b) $A^2=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$ c) 1 d) ninguna

e) entre 2 y 2

2) a) $A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}$ b) $A^2=\begin{pmatrix}1&1&0&2&0\\0&0&1&0&0\\0&1&2&1&0\\1&1&0&1&0\\1&2&1&1&0\end{pmatrix}$ c) 4

3) a) $A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$ b) $A^2=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&1&1\\1&0&3&1&0\\0&2&0&2&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$

c) entre 1 y 3, 4 y 2, 4 y 4

Determinantes

1) a) -4, b) -20, c) -135, d) 38, e) 160, f) 28, g) bcd, h) 0

2) a) $x = -2$, b) $x = 0$, c) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ 3) $x_1 = -2$, $x_2 = 1+\sqrt{3}i$ $x_3 = 1-\sqrt{3}i$

4) 10, 8) a) 0, b) 0, 9) $x \neq 0$ 12) a) $-k^3$, b) $-1/4$ 13) $r = |A|$,

14) a) –8, b) $-\dfrac{1}{32}$, c) $-\dfrac{1}{32}$, 15) $Adj\ A=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

16) $\left|A-A^t\right| = |A|^2 = 100$, 17) $|B| = 5$, 18) $S = \{(8;12)\}$

Problema rumano: $\alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \rho(A) = 2$,
si $\alpha \vee \beta \vee \gamma \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 3$

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones lineales.

Notación matricial.

Clasificación de los sistemas:

Teorema de Rouché-Frobenius.

Métodos de resolución:

Teorema de Cramer,

Método de Eliminación de Gauss,

Método de Gauss-Jordan,

Método de la Matriz Inversa.

Aplicaciones Económicas:

Equilibrio entre oferta y demanda.

Matriz Insumo Producto.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ... + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2n}.x_n = b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + ... + a_{mn}.x_n = b_m \end{cases}$$

Una solución del sistema: es un conjunto de valores $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ que son solución de todas las ecuaciones.
$S_1 = (x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Conjunto solución: es el conjunto formado por todas soluciones del sistema: $S = \{(S_1; S_2; \dots; S_{n;} \dots)\}$.

Sistemas equivalentes: dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Si a un sistema de ecuaciones lineales se le aplican operaciones elementales definidas para las matrices (permutación de ecuaciones, multiplicación de una ecuación por un escalar no nulo, adición a una ecuación de otra multiplicada por un escalar) se obtiene un sistema de ecuaciones lineales equivalente.

Ejemplo

Dado el siguiente sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$, veamos como se obtienen otros sistemas de ecuaciones lineales equivalentes a éste (tienen el mismo conjunto solución).

Permutando ecuaciones: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$.

Multiplicando la 1º ecuación por 2: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$.

A la 1º ecuación le sumamos la 2º ecuación: $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$, y así sucesivamente.

Todos estos sistemas de ecuaciones lineales tienen el mismo conjunto solución.

Dado un conjunto de ecuaciones lineales se plantean dos problemas:

1º) *analizarlo*: determinar si tiene solución y cuántas tiene.
2º) *resolverlo*: encontrar las soluciones, si las tiene.

Primero se analiza el sistema, luego se resuelve.

Análisis de un sistema

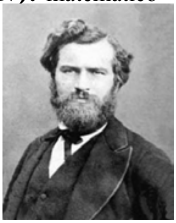
Un sistema de ecuaciones puede tener solución o no. Si un sistema tiene solución se llama *compatible*, si no tiene solución de denomina *incompatible*.
Si es compatible, puede admitir una única solución o infinitas soluciones. Si tiene solución única se llama sistema *compatible determinado*, si tiene infinitas soluciones, se llama sistema *compatible indeterminado*.

$$\textit{Sistema} \begin{cases} \text{Compatible} \begin{cases} \text{Determinado} \\ \text{Indeterminado} \end{cases} \\ \\ \text{Incompatible} \end{cases}$$

Para analizarlo, utilizamos el Teorema de *Rouché-Frobenius*

TEOREMA DE ROUCHÉ - FROBENIUS

FROBENIUS, *Ferdinand Georg (1849-1917):* matemático alemán nacido en Berlín muy conocido por sus trabajos sobre teoría de grupos. Se doctoró en la Universidad de Berlín en 1870 donde trabajó con Weierstrass.



ROUCHÉ, *Eugene (1832-1910)*
Matemático francés. Realizó importantes investigaciones sobre teoría de funciones, descomposición en series, integrales definidas.

Si llamamos A a la matriz de los coeficientes, X a la matriz columna de las incógnitas, y B a la matriz columna de los términos independientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ . & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

El sistema se puede expresar matricialmente de la siguiente forma:
$A.X = B$, forma matricial de un *sistema de ecuaciones lineales.*

Llamamos A' a la matriz ampliada que se obtiene de agregarle a la matriz A la columna de los términos independientes.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & & \ldots & & . \\ . & & \ldots & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Enunciado: *la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible es que la matriz A y la matriz A' tengan el mismo rango.*

Si además:

$\rho(A) = \rho(A') \Rightarrow$ el sistema es compatible

$\rho(A) = \rho(A') = n \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado

$\rho(A) = \rho(A') = h < n \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado y el grado de indeterminación es $n - h$

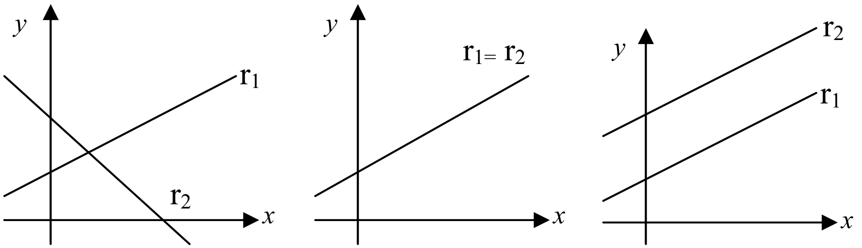
Consecuencia: si $\rho(A) \neq \rho(A') \Rightarrow$ el sistema es incompatible

Otra consecuencia: si el sistema de ecuaciones tiene más incógnitas que ecuaciones no puede ser compatible determinado.

CASO PARTICULAR: SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS - INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

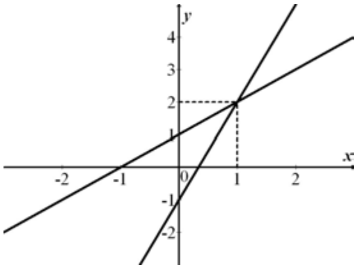
Si el sistema tiene dos ecuaciones y dos incógnitas puede tener la siguiente estructura: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$

Cada ecuación representa gráficamente, en este caso, una recta. Resolver el sistema de ecuaciones significa encontrar el punto de intersección de las rectas.
Se presentan tres casos: que las rectas tengan un único punto de intersección, en cuyo caso el sistema de ecuaciones tiene solución única (SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO, S.C.D.), que sean coincidentes, en cuso caso el sistema tiene infinitas soluciones (SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO, S.C.I.), o que sean rectas paralelas no coincidentes, en cuyo caso el sistema no tiene solución (SISTEMA INCOMPATIBLE).
Veamos los gráficos correspondientes a cada caso.



Hay muchos métodos que habitualmente se ven en la escuela secundaria para resolver este tipo de sistemas de dos ecuaciones lineales, por el ejemplo el método de igualación.
Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualamos sus expresiones. Se obtiene así el valor de una incógnita, luego reemplazando en cualquiera de las ecuaciones se obtiene el valor de la otra incógnita.

Ejemplo $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$



Igualamos las ecuaciones: $3x - 1 = x + 1$
$2x = 2 \Rightarrow x = 1$, reemplazando obtenemos $y = 2$, de donde $S = \{(1;2)\}$. Las rectas se cortan en el punto P = (1;2).

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA

A) Regla de Cramer

Sea el sistema de ecuaciones lineales $A.X = B$, y A un matriz cuadrada no singular. Entonces el sistema tiene solución única y cada incógnita es igual al cociente de dos determinantes. En el denominador, el determinante de la matriz de los coeficientes Δ y en el numerador el determinante que resulta del anterior al reemplazar la columna de los coeficientes de la incógnita considerada por la columna de los términos independientes Δx_i.

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ldots,\ x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta} \text{ siendo:}$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{2n} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

Demostración

$$A.X = B \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$
$$I.X = A^{-1}.B$$
$$X = A^{-1}.B \Rightarrow X = \frac{Adj\ A}{\Delta}.B$$

$$X = \frac{1}{\Delta}\left(Adj\ A.B\right) = \frac{1}{\Delta}.\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ . & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\Delta}.\begin{pmatrix} A_{11}.b_1 + A_{21}.b_2 + \ldots + A_{n1}.b_n \\ A_{12}.b_1 + A_{22}.b_2 + \ldots + A_{n2}.b_n \\ . \\ A_{1n}.b_1 + A_{2n}.b_2 + \ldots + A_{nn}.b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}.\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ . \\ \Delta x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta x_2}{\Delta} \\ . \\ \frac{\Delta x_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{se puede aplicar la regla de Cramer}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{16}{5} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{34}{5}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{9}{5} \qquad \Rightarrow \quad S = \left\{ \left(\frac{16}{5}; -\frac{34}{5}; -\frac{9}{5} \right) \right\}$$

B) Método de Gauss- Jordan[1]

Por el método de Gauss – Jordan se calculan los rangos de las matrices *A* y *A*’, luego se aplica el teorema de Rouché – Frobenius para analizarlo y luego se obtienen las soluciones.

Ejemplos: a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ $m = 4$ ecuaciones. $n = 3$ incógnitas

[1] [GAUSS, Kart Friedrich (1777-1855), alemán.
JORDAN, Camile (1838-1922)], francés.

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 1 & & 4 \\
2 & 1 & -2 & & 3 \\
1 & 1 & -1 & & 2 \\
-1 & 2 & 1 & & 1 \\
\hline
1 & -1 & 1 & & 4 \\
0 & 3 & -4 & & -5 \\
0 & 2 & -2 & & -2 \\
0 & 1 & 2 & & 5 \\
\hline
1 & 0 & 3 & & 9 \\
0 & 0 & -10 & & -20 \\
0 & 0 & -6 & & -12 \\
0 & 1 & 2 & & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 3 & 9 \\
0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

dividiendo por -10
dividiendo por - 6

$\rho(A) = \rho(A') = 3 \Rightarrow$
sistema compatible determinado
la solución es $x_1=3$, $x_2=1$ $x_3=2$
S={(3;1;2)}

b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

$m = 3$ ecuaciones
$n = 4$ incógnitas

$$
\begin{array}{cccc|c}
3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
5 & 6 & 2 & 1 & 2 \\
\hline
0 & -4 & -3 & 1 & -3 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -4 & -3 & 1 & -3 \\
\hline
0 & -4 & -3 & 1 & -3 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$\rho(A) = 2 = \rho(A') < 4 \Rightarrow$
sistema compatible
indeterminado

El sistema tiene infinitas soluciones. Las variables que intervienen en los vectores canónicos x_1 y x_4 son las *variables principales*, las otras dos son las variables no principales: x_2 y x_3.

La solución es: $\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -3 + 4x_2 + 3x_3 \end{cases}$

Para cada valor de x_2 y x_3 se obtienen las infinitas soluciones.

$$S = \{(1 - 2x_2 - x_3; x_2; x_3; -3 + 4x_2 + 3x_3) / x_2 \in \Re \wedge x_3 \in \Re\}$$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

$m = 4$ ecuaciones
$n = 3$ incógnitas

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & -3 & -1 \\
2 & 1 & -2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 2 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 1 & -3 & -1 \\
0 & -1 & 4 & 3 \\
0 & 0 & 4 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 0 & -3 & -3 \\
0 & 0 & 4 & 5 \\
0 & 0 & 4 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

$\rho(A) = 3$

$\rho(A') = 4 \Rightarrow$
sistema incompatible

C) Inversión de matrices

Se parte de la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales $A.X = B$. Si A es cuadrada no singular, existe A^{-1}. Premultiplicando por A^{-1} queda:

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$
$$\left(A^{-1}.A\right).X = A^{-1}.B$$
$$I.X = A^{-1}.B$$
$$X = A^{-1}.B$$

Ejemplo: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$ $\qquad |A| = -4 \neq 0$,

calculamos $A^{-1} = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -17 & 9 & 7 \\ -9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -17 & 9 & 7 \\ -9 & 5 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Este método sólo sirve para sistemas compatibles determinados.

D) Método de Eliminación Gaussiana

a) Consiste en reducir la matriz ampliada mediante operaciones elementales de fila a una matriz escalonada por filas donde si $i > j$, entonces $a_{ij} = 0$. Si el sistema de ecuaciones es cuadrado, entonces la matriz de los coeficientes se transforma en una matriz triangular superior.

Ejemplos de matrices reducidas

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Una vez reducida la matriz ampliada a la forma escalonada por fila se utiliza la sustitución hacia atrás para obtener el valor de cada incógnita siempre y cuando el sistema sea compatible.
La sustitución hacia atrás consiste en obtener primero x_n, luego x_{n-1}, y por último x_1.

Ejemplo: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \\ \hline 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \\ \hline 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}$$

$F_2 = F_2 + F_1(-4)$
$F_3 = F_3 + F_1(-2)$

$F_3 = F_3 - 1/3\ F_2$

$-\frac{4}{3}x_3 = -\frac{4}{3} \Rightarrow x_3 = 1$

$9x_2 - 13.1 = -40 \Rightarrow 9x_2 = -27$

$\Rightarrow x_2 = -3$

$x_1 - 2.(-3) + 3.1 = 11 \Rightarrow x_1 = 2$

$\Rightarrow S = \{(2;-3;1)\}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 = -3 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & 6 \\ -1 & 16 & -14 & -3 \\ \hline 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & 18 & -16 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$F_2 = F_2 + F_1(-2)$
$F_3 = F_3 + F_1$

$F_3 = F_3 + 2\ F_2$

$0x_3 = 0 \Rightarrow$
sistema compatible indeterminado

$x_2 = \frac{8}{9}x_3$

La solución es: $\begin{cases} x_1 = 3 - \dfrac{16}{9}x_3 + 2x_3 = 3 + \dfrac{2}{9}x_3 \\ x_2 = \dfrac{8}{9}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

Para cada valor de x_3 se obtienen las infinitas soluciones.

$$S = \left\{ \left(3 + \frac{2}{9}x_3 ; \frac{8}{9}x_3 ; x_3 \right) / \, x_3 \in \Re \right\}$$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{array} \qquad F_2 = F_2 + F_2(-3)$$

$$\rho(A) = \rho(A') = 2 < 3 \Rightarrow S.C.I.$$

$$-2x_2 + x_3 = -5 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_3$$

$$x_1 + 5 + x_3 - x_3 = 4 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$S = \left\{ \left(-1 ; \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_3 ; x_3 \right) / \, x_3 \in \Re \right\}$$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Si B es una matriz nula, el sistema de ecuaciones se denomina homogéneo. Podemos expresarlo como $A.X = 0$.

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{21}.x_2 + ... + a_{1n}.x_n = 0 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2n}.x_n = 0 \\ . \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + ... + a_{mn}.x_n = 0 \end{cases}$$

El sistema homogéneo siempre admite al menos una solución que es la matriz nula: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esta solución recibe el nombre de ***solución trivial***.
Un sistema homogéneo por lo tanto no puede ser incompatible. Si además de la solución trivial el sistema admite otras soluciones es compatible determinado.

Nota: un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es cuadrado, tiene solución única y ésta es la solución trivial si el determinante de la matriz A es ***no nulo***.

Propiedad

La solución general de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo compatible indeterminado se puede expresar como combinación lineal de la solución general del sistema de ecuaciones homogéneo asociado y una solución particular del sistema de ecuaciones no homogéneo.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema, expresar la solución como una combinación lineal de la solución general del sistema homogéneo asociado y una solución particular del sistema no homogéneo.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ \hline 3 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & -2 \\ \hline -5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$S = \{(x_1; -1 + 4x_1; -1 + 5x_1) / x_1 \in \Re\}$$

Si planteamos el sistema homogéneo asociado queda:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

La solución general es $S_h = \{(x_1; 4x_1; 5x_1) / x_1 \in \Re\}$

La solución S se puede expresar como $S = \{(x_1; 4x_1; 5x_1) + (0; -1; -1)\}$ que es una combinación lineal de la solución general del sistema homogéneo asociado y una solución particular del sistema no homogéneo (la que se obtiene de darle a x_1 valor 0).

APLICACIONES A LA ECONOMÍA

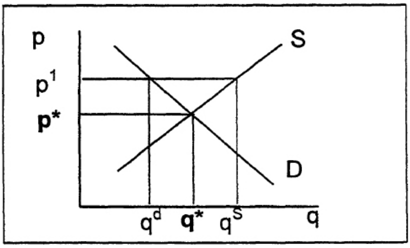
El funcionamiento del mercado. Equilibrio entre oferta y demanda

Una de las preocupaciones fundamentales de la Economía desde su nacimiento fue la de explicar el mecanismo de los precios de las mercancías. La Economía Política Clásica sostenía, por medio de sus más destacados representantes, Adam Smith y David Ricardo, que la fuente del valor de las mercancías debía buscarse en el trabajo humano.

Para la escuela de pensamiento económico actualmente más difundida, la corriente neoclásica, los precios se fijan en el mercado a partir de la interacción entre los oferentes (vendedores – productores) y los demandantes (compradores – consumidores).

La conducta de los consumidores en el mercado se representa mediante la curva de demanda que indica la cantidad de producto que están dispuestos a adquirir a cada nivel de precios. Por su parte, el comportamiento de los productores se encuentra implícito en la curva de oferta.

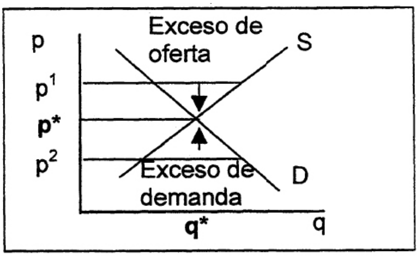
La curva de demanda tiene, en general, pendiente negativa. Esta afirmación es aceptable incluso desde un punto de vista meramente intuitivo, ya que lo único que implica es que ante un aumento en el precio de un bien, la cantidad que los consumidores están dispuestos a demandar será menor. La curva de oferta se representa, en cambio, con pendiente positiva, ya que los productores estarán dispuestos a vender cantidades mayores cuánto mayor sea el precio del producto.



La intersección de la curva de oferta con la de demanda, determina simultáneamente el precio y la cantidad de **equilibrio** (***q*;p****). Si observamos el gráfico vemos que para todo nivel del precio, queda determinada una cantidad ofrecida (sobre la curva de oferta) y una cantidad demandada. Tomando un precio arbitrario, por ejemplo p^1, vemos que la cantidad

ofrecida (q^s) es mayor que la demandada (q^d). De las infinitas combinaciones entre precio y cantidad, hay sólo una en que la curva de oferta coincide con la de demanda. La intersección entre ambas curvas se llama punto de equilibrio. En el punto de equilibrio ($q^*;p^*$) la cantidad ofrecida es igual a la demandada. El ingreso en ese punto es $I = p^*.q^*$.

¿Qué hay por detrás de estas curvas? INDIVIDUOS AISLADOS que toman decisiones RACIONALES: Las curvas de oferta y de demanda no son más que la representación matemática del comportamiento de los agentes (productor y consumidor). Cada punto de estas curvas implica una conducta optimizadota, Productores y consumidores actúan de modo racional (y su racionalidad está postulada) si "**hacen lo mejor posible dado lo que tienen**". Estas curvas reúnen los **planes óptimos de producción y consumo**. Damos así un nuevo significado al punto de equilibrio ($q^*;p^*$): es el único punto donde se cumplen simultáneamente los planes de oferentes y demandantes, en el que sus decisiones son consistentes. A ese nivel de precios todo el que quiere vender, lo hace en la cantidad que desea, y todo el que quiere comprar, compra. Si todos los mercados se encuentran en equilibrio, reina la **armonía**, ya que nadie es privado de la posibilidad de hacer lo mejor posible.



La escuela neoclásica muestra que este punto, desde esta perspectiva tan atractivo y deseable, es el punto hacia el que el precio y la cantidad marchan inexorablemente, sin intervención explícita del hombre. En efecto, en el punto p^1 que mencionáramos, el hecho de que la cantidad ofrecida sea mayor a la demandada desencadena un proceso de ajuste hacia el equilibrio.

Cuando lo que se ofrece es mayor que lo que se demanda, el precio **tiende** a bajar, ya que se registra exceso un **exceso de oferta**. Lo contrario sucedería si el precio fuese menor al de equilibrio. El exceso de demanda pondría en marcha un movimiento ascendente del precio. El único punto estable, en el que no hay incentivos para incrementar ni disminuir el precio, en el que no hay exceso de oferta ni de demanda, es el de equilibrio.

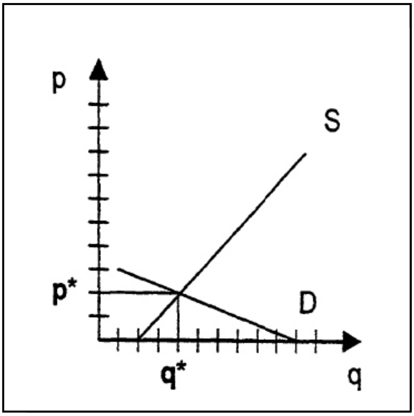
Desde el punto de vista matemático, la determinación del punto de equilibrio puede plantearse como un sistema de dos ecuaciones lineales (bajo el supuesto de que las curvas de oferta y demanda son lineales).

S: $q = p + 2$
D: $q = -3p + 10$

Resolviendo el sistema se obtienen los valores para p y q de equilibrio.

$p^* = 2$

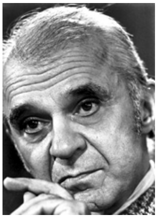
$q^* = 4$



MATRIZ INSUMO PRODUCTO

El cálculo de las cuentas nacionales consiste tradicionalmente en la mediación de las magnitudes **agregadas** al ingreso, al producto y al gasto. Es decir, calculan para un período de tiempo, la cantidad de bienes y servicios producidos **durante** el período. No se tienen en cuenta las compras y ventas de insumos que se realizan entre las empresas. Se logra así una magnitud del valor agregado en un período determinado, libre de duplicaciones. Como los insumos utilizados por una empresa son producidos por otra, si los contabilizáramos ambas veces, la cifra final a la que llegaríamos sumaría dos veces a estos productos.

LEONTIEF, *Wassily W. (1906-1999):* economista norteamericano de origen ruso que ganó el Premio Nobel de Econo-Mía en 1973 por el desarrollo del análisis en entradas y salidas publicado en Nueva Cork en 1966 en su obra *Input- Output Análisis.*
Fue profesor de Harvard y publicó su primer estudio sobre la economía norteamericana en 1941.



Por ende, las cuentas nacionales no reflejaban la interrelación entre los distintos sectores, de la economía ni del monto de bienes intermedios utilizados.

Las investigaciones que emprendió el profesor ***Wassily Leontief*** desembocaron en lo que hoy se conoce como modelo o **tabla de insumo producto** (en inglés **input – output table**).
A partir de entonces muchos países comenzaron la tarea de compilación de información, a tal punto que hoy se considera al a matriz de insumo – producto parte de las cuentas nacionales.

Características básicas y forma de lectura

La tabla se presenta en forma de cuadro de doble entrada. Para facilitar la exposición trabajaremos con una economía cerrada (sin intercambio con el sector externo) y con tres sectores. Cada uno de estos sectores elabora un solo tipo de producto final. Los sectores están relacionados ya que cada sector debe utilizar como insumo productos de otros sectores. Por ejemplo, parte de la producción del sector industrial es utilizada como insumo por los demás sectores, el resto se destina a la **demanda final** (consumo de las familias más inversión).
En las **filas** se registra el destino de las mercancías y servicios elaborados por cada sector (producción o output), en las **columnas** se puede observar cómo esos productos son adquiridos por los mismos sectores para la producción (como insumos o input). En la cuarta columna se registra la parte de la producción de cada sector que es destinada a la demanda final. La parte de la producción que un sector se vende a sí mismo, se denomina intrainsumo.

Tabla de Insumo – Producto (en $)

Compras Ventas	Agricultura	Industria	Servicios	Demanda final = consumo + inversión	Valor Bruto de la Producción
Agricultura	90	200	15	235	500
Industria	70	350	230	350	1000
Servicios	100	300	110	445	955
Valor agregado	280	150	600		
Valor Bruto de la Producción	500	1000	955		2455

En resumen, la lectura de la tabla por filas o columnas es la siguiente:

- en las FILAS leemos a qué se destina la producción de cada sector (insumos de otros sectores y demanda final).

- en las COLUMNAS se refleja qué insumos utiliza cada sector para su producción.

Así, para el caso de la industria, ésta vende (lectura de la fila 2) $70 al sector agrícola, se vende $350 a sí mismo (ciertas industrias utilizan como insumos productos de otras industrias) y vende $230 al sector servicios. El resto de la producción industrial ($305) es absorbido por la demanda final. Por otro lado, **compra** (lectura de la columna 2) al sector agrícola por $200, al de servicios por $300 y a sí mismo, se demanda $350.

Los $150 restantes, responden al pago a los factores de producción (trabajo, tierra y capital). Las columnas nos brindan información sobre la estructura de costos de cada sector.
Esta tabla desagrega (es decir divide) a la economía en sólo tres sectores; en la práctica, la desagregación puede ser todo lo grande que se desee o que se requiera para el análisis encarado. De la misma forma, es posible agregar a la tabla las transacciones con el sector externo (importaciones y exportaciones).

Para utilizar la tabla debemos recurrir a dos supuestos básicos:

-Hipótesis de homogeneidad: cada sector elabora un solo producto con una sola estructura de insumos.

-Hipótesis de proporcionalidad: los insumos de cada sector son función lineal del producto de ese sector. Es decir, para aumentar el producto de un sector, debe producirse un aumento proporcional de los insumos de ese sector. Un aumento de un 10% en la producción del sector Industria requerirá un aumento del 10% de todos sus insumos.

La tabla expresada como sistema de ecuaciones

En primer lugar reemplazaremos los números y sectores de nuestra tabla por letras genéricas.

	S_1	S_2	…	S_n	DF	VBP
S_1	x_{11}	x_{12}		x_{1n}	Y_1	X_1
S_2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	Y_2	X_2
. .						
S_n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nn}	Y_n	X_n
VA	VA_1	VA_2		VA_n		
VBP	X_1	X_2		X_n		$\sum X$

Donde x_{ij} representa el valor del insumo *i* que utiliza el sector *j*.

Si representamos la tabla como un sistema de ecuaciones tenemos:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + Y_1 = X_1 \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + Y_2 = X_2 \\ . \\ . \\ x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn} + Y_n = X_n \end{cases}$$

Coeficientes técnicos o de utilización directa

Cada columna representa la estructura de costos de cada sector. Si se divide cada insumo por el valor bruto de producción, se obtienen los coeficientes técnicos. Estos registran la necesidad de insumo de cada sector para producir una unidad del producto que dicho sector produce.

$a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j}$ donde el subíndice *i* es la industria vendedora y *j* la compradora.

La regla práctica para obtener los coeficientes técnicos o directos consiste en dividir cada número por el total de esa columna.

COEFICIENTES TÉCNICOS

	Agricultura	Industria	Servicios
Agricultura	0,11	0,20	0,02
Industria	0,15	0,35	0,24
Servicios	0,21	0,30	0,12

Como $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j} \Rightarrow x_{ij} = a_{ij}.X_j$, se puede reexpresar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}.X_1 + a_{12}.X_2 + ... + a_{1n}.X_n + Y_1 = X_1 \\ a_{21}.X_1 + a_{22}.X_2 + ... + a_{2n}.X_n + Y_2 = X_2 \\ . \\ . \\ a_{n1}.X_1 + a_{n2}.X_2 + ... + a_{nn}.X_n + Y_n = X_n \end{cases}$$

Llamamos *A* a la matriz de coeficientes técnicos, *Y* al vector de las demandas finales y *X* al vector de productos de cada sector.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ . & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ Y_n \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones expresado en forma matricial es:

$$X = AX + Y$$

Coeficientes directos e indirectos

Los coeficientes técnicos no tienen en cuenta la forma en que cada sector está relacionado con los demás. A través de la matriz insumo producto se puede elaborar un modelo que permite calcular las necesidades de producción de cada sector ante un incremento de la demanda final.
Si para el sector Industrial se produce un aumento de la demanda final, éste debe incrementar su producción. Con los coeficientes directos podemos averiguar en qué medida deberá incrementar su demanda de insumos para satisfacer el nuevo nivel de demanda final. Es decir, va a demandar mayor cantidad de insumos de cada uno de los sectores (incluso de sí mismo). Así, el sector agrícola y el de servicios van a tener, a su vez, que aumentar su producción. Es decir, un aumento en la demanda final de un sector repercute directamente sobre la producción de ese sector e indirectamente sobre todos los sectores que proveen insumos a ese sector.
Para medir las repercusiones directas e indirectas que resultan del aumento de una unidad de la demanda final recurrimos a la matriz de requerimientos directos e indirectos. Llegamos a ella algebraicamente.

$X = AX + Y \;\Rightarrow\; X - AX = Y$
$(I - A).\, X = Y \;\Rightarrow\;$ (premultiplicando por $(I - A)^{-1}$
$X = (I - A)^{-1}.\, Y$

La matriz $(I - A)$ es la llamada ***matriz de Leontieff***. La matriz inversa de esta matriz es la matriz de los coeficientes directos indirectos.
Teniendo en cuenta los supuestos ya estudiados, llegamos a un modelo a través del cual, a partir de una variación de la demanda final (Y^*), podemos obtener un nuevo vector de producción (X^*) acorde con este cambio. Utilizando los coeficientes técnicos es posible construir la nueva tabla.

$$\boxed{X = (I - A)^{-1}.\, Y}$$

Ejemplos

a) Dada la matriz insumo producto correspondiente al año base para la economía de un país dividida en dos sectores S_1 y S_2, construir la del año para la cual la demanda final es: $Y^* = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

	S_1	S_2	D.F.	V.B.P.
S_1	4	4	4	12
S_2	6	6	12	24
V.A.	2	14		
V.B.P.	12	24		36

A partir de la tabla construimos la **matriz de los coeficientes directos o técnicos**:

$$a_{11} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \qquad a_{21} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad a_{12} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \qquad a_{22} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz de Leontieff $(I - A)$:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

A partir de este matriz obtenemos la **matriz de requerimientos directos e indirectos**:

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & 2/5 \\ 6/5 & 8/5 \end{pmatrix}$$

El vector de demanda final Y^* es, según el enunciado, $Y^* = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.

El nuevo vector de producción X^*, necesario para satisfacer el nuevo nivel de demanda final, teniendo en cuenta los supuestos antes enunciados es: $X^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (I - A)^{-1}.Y^* = \begin{pmatrix} 9/5 & 2/5 \\ 6/5 & 8/5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \end{pmatrix}$.

A partir de la matriz de los coeficientes técnicos, podemos reconstruir la tabla de insumo producto ya que: $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j} \Rightarrow x_{ij} = a_{ij}.X_j$.

$$x_{11} = a_{11}.X_1 = \frac{1}{3}.24 = 8 \qquad x_{12} = a_{12}.X_2 = \frac{1}{6}.36 = 6$$

$$x_{21} = a_{21}.X_1 = \frac{1}{2}.24 = 12 \qquad x_{22} = a_{22}.X_2 = \frac{1}{4}.36 = 9$$

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1	8	6	10	24
S_2	12	9	15	36
V.A.	4	21		
V.B.P.	24	36		60

b) Supongo una economía de un país dividida en dos sectores S_1 y S_2, Dada la siguiente tabla de insumo producto, evaluar que impacto tendría una expansión de la demanda final de un 100% para el sector 1 y del 200% para el sector 2.

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1	4	10	6	20
S_2	12	10	3	25
V.A.	4	5		
V.B.P.	20	25		45

A partir de la tabla construimos la **matriz de los coeficientes directos o técnicos**:

$$a_{11} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \qquad a_{21} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \qquad a_{12} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \qquad a_{22} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Calculamos la **matriz de Leontieff** $(I - A)$:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -3/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

A partir de este matriz obtenemos la **matriz de requerimientos directos e indirectos**:

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 5/3 \\ 5/2 & 10/3 \end{pmatrix}$$

El vector de demanda final Y varía según lo expresado en el enunciado, obtenemos Y^*. $Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y^* = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$

El nuevo vector de producción X^*, necesario para satisfacer el nuevo nivel de demanda final, teniendo en cuenta los supuestos antes enunciados es: $X^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (I - A)^{-1}.Y^* = \begin{pmatrix} 5/2 & 5/3 \\ 5/2 & 10/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$.

A partir de la matriz de los coeficientes técnicos, podemos reconstruir la tabla de insumo producto ya que: $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \Rightarrow x_{ij} = a_{ij}.X_j$.

$x_{11} = a_{11}.X_1 = \frac{1}{5}.45 = 9$ $\qquad$ $x_{12} = a_{12}.X_2 = \frac{2}{5}.60 = 24$

$x_{21} = a_{21}.X_1 = \frac{3}{5}.45 = 27$ $\qquad$ $x_{22} = a_{22}.X_2 = \frac{2}{5}.60 = 24$

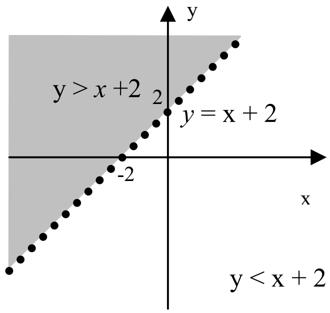
	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1	9	24	12	45
S_2	27	24	9	60
V.A.	9	12		
V.B.P.	45	60		105

INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Una ecuación lineal con dos incógnitas ya sabemos que representa una recta, una inecuación lineal con dos incógnitas representa un ***semiplano.*** Veremos ahora como se determina gráficamente este semiplano.

Ejemplo

Consideremos la inecuación $y > x + 2$. Representamos gráficamente la igualdad, es decir $y = x + 2$. Sabemos que la representación gráfica de esta igualdad es una recta. Esta recta divide al plano en tres sectores, dos semiplanos y la recta borde. Si la desigualdad es de $\leq$ o de $\geq$, el conjunto solución está formado por uno de los semiplanos y la recta borde. De lo contrario el conjunto solución es uno de los semiplanos. Hay que determinar cual de los dos semiplanos corresponde a la solución.



Elegimos el origen de coordenadas, el par (0;0) y vemos si verifica la inecuación: Es ¿0 > 0 + 2? La respuesta es no, por lo tanto el semiplano que corresponde al conjunto solución es el otro, el que no contiene al par (0;0). El conjunto solución corresponde al semiplano sombreado.

$$S = \{(x; y) \in \Re^2 \ / \ y > x + 2\}.$$

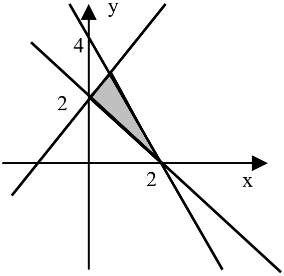
En este caso la recta borde va punteada porque la inecuación es de >, no incluye la igualdad que corresponde al borde.

Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Vimos que el conjunto solución de cada inecuación es un semiplano. Si tenemos dos o más inecuaciones, tenemos dos o más semiplanos y en este caso el conjunto solución es la parte común a dichos semiplanos, es decir la intersección de los mismos.

Veamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} y \geq -x+2 \\ y \leq 4-2x \\ y \leq x+2 \end{cases}$$



En este caso las líneas van completas porque las inecuaciones son de ≥ y de ≤.

El conjunto solución está formado por lo puntos pertenecientes al triángulo sombreado.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) *Analizar y resolver si es posible aplicando el método de GAUSS-JORDAN*

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ \dfrac{1}{2}x_1 - x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 8x_4 = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_3 + 3x_1 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 11x_3 = -33 \\ -x_1 + 2x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \\ 7x_1 - 2x_2 = -11 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - 11x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 10x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - 10x_3 - 4x_4 - 19x_5 = \dfrac{1}{2} \\ 3x_4 + 3x_5 = \dfrac{3}{2} \\ 5x_1 + 10x_2 + 50x_3 - \dfrac{5}{2}x_4 + \dfrac{1}{2}x_5 = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$

h) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 3x + 2y + w = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 5x + 6y + 2z + w = 2 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4w = 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11w = 12 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

r) $\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} i.x_i = 10 \\ \sum_{i=1}^{3} i^2.x_i = 6 \\ \sum_{i=1}^{2} 2i.x_i - x_3 = 41 \end{cases}$

2) *Analizar y resolver si es posible aplicando la regla de CRAMER*

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = 6 \\ x_2 - 6x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

3) *Analizar y resolver si es posible aplicando el método de INVERSIÓN DE MATRICES*

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$

4) *Analizar los siguientes sistemas para distintos valores de* ***k***

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = k \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ky + z = 2 \\ 2x + y + kz = k \end{cases}$ d) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} kx + y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \\ x + ky = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y + z = k \\ x + y + kz = 1 \\ x + y + z = k^2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = k \end{cases}$

5) *Hallar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que los sistemas tengan a) solución única, b) infinitas soluciones, c) ninguna solución.*

a) $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+4z=a \\ 2x+3y-z=b \\ 3x+y+2z=c \end{cases}$

6) *Dado* $\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=2 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=k \\ 2x_1+3x_2-x_3=1 \end{cases}$ *para qué valores de **k**:* a) $\rho(A) \neq \rho(A')$

b) existe A^{-1}

7) *Dada* $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$, *para qué valores de **k*** $A.X=0$ *es un sistema que admite soluciones no triviales. Exprese la solución.*

8) *Hallar* $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, *para que* $P.X=K$, si $P=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ *y* $K=\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$.

9) *Hallar* $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, *para que* $P.X=X$, si $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

10) *Determinar valores de **t** para los cuales el sistema admite soluciones no triviales.* $\begin{cases} x + y + tz = 0 \\ x + ty + z = 0 \\ tx + y + z = 0 \end{cases}$

11) *Si* $x_1 = 3$*,* $x_2 = 16$*,* $x_3 = 5$*, es una solución particular de A.X = B, hallar la solución general si*: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -11 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

12) *Resolver*: $\begin{cases} X^t.A = X^t \\ C^t.X = (1) \end{cases}$ si:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

13) *Dadas las matrices*: $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k+1 & k & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

*hallar los valores de **k** para los cuales el sistema A.X.=B admite: a) solución única, b) infinitas soluciones, c) ninguna solución.*

14) Resolver el sistema de ecuaciones homogéneo $X^t.(A-I) = 0$, donde $X \in \Re^{2x1}$ y $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

15) Demostrar que si S_1 y S_2 son soluciones particulares del sistema $A.X = B$, entonces a) $S_1 - S_2$ es solución del sistema si $B = 0$, b) $S_1 - S_2$ no es solución del sistema si $B \neq 0$.

16) Una empresa tiene un salario constituido por un básico y una bonificación por año de antigüedad. Si un empleado con 4 años de antigüedad gana \$1.900 y uno con 20 años de antigüedad gana \$3.500, determinar cuál es el sueldo básico y cuál la bonificación por año.

17) ¿Cuántos billetes de 10 dirhams y de 25 dirhams son necesarios para reunir 1.900 dirhams con 100 billetes?

18) Se compran 3 tipos de alimentos. El alimento I tiene una unidad de vitamina A, tres unidades de vitamina B y cuatro unidades de vitamina C. El alimento II tiene dos, tres y cinco respectivamente. El alimento III tiene tres unidades de A, tres de la C y ninguna de la vitamina B. Se necesitan 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B y 20 de vitamina C. a) Hallar todas las cantidades posibles de los tres alimentos que proporcionan esa cantidad de vitaminas, b) si el alimento I cuesta \$0,60 y los otros cuestan \$0,1 cada uno, ¿hay solución posible para un costo de 1 peso?

19) Una compañía elabora tres productos que se procesan en tres departamentos. En la tabla se resumen las horas requeridas por unidad de cada producto en cada departamento. Además lasa capacidades semanales se expresan para cada departamento en términos de horas de trabajo disponibles. Se desea determinar si hay combinaciones de los tres grupos que aprovechen al máximo las capacidades semanales de los tres departamentos.

Departamento	**Producto** 1	2	3	**Horas disponibles**
A	2	3,5	3	1.200
B	3	2,5	2	1.500
C	4	3	2	1.400

Aplicaciones económicas
Oferta – Demanda - Matriz de insumo-producto

1) Determinar las cantidades intercambiadas y el precio de equilibrio para los mercados en los cuales se verifican las siguientes leyes de oferta y demanda. Hallar el ingreso total en el punto de equilibrio.

a) $\begin{cases} D = -2p + 30 \\ S = 2p - 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} D = -10p + 200 \\ S = 6p - 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} D + 3p - 630 = 0 \\ S - p + 170 = 0 \end{cases}$

2) Dadas los siguientes pares de funciones determinar cual es la de oferta y cual la de demanda, hallar el precio de equilibrio y las cantidades intercambiadas si p es el precio y q la cantidad demandada u ofrecida. Hallar el ingreso total en el punto de equilibrio.

a) $\begin{cases} p = 10 - 2q \\ p = \dfrac{3}{2}q + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} p = 6 \\ q = 3p - 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2p + 3q = 10 \\ q - 4p = -6 \end{cases}$

3) Dada la matriz insumo producto correspondiente al año base para la economía de un país dividida en dos sectores S_1 y S_2, construir la del año para la cual la demanda final es: $Y^* = \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \end{pmatrix}$

	S_1	S_2	D.F.	V.B.P.
S_1	5	3	12	20
S_2	10	9	5	24
V.A.	5	12		
V.B.P.	20	24		

4) Dada la matriz insumo producto correspondiente al año base para la economía de un país dividida en dos sectores S_1 y S_2, construir la del año para la cual la demanda final es: $Y^* = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix}$

	S_1	S_2	D.F.	V.B.P.
S_1	40	44	16	100
S_2	40	0	15	55
V.A.	20	11		
V.B.P.	100	55		

5) Dada la matriz insumo producto correspondiente al año base para la economía de un país dividida en dos sectores S_1 y S_2,

a) completar la tabla si:

i) el sector 1 utiliza insumos del sector 2 por un valor de 26.
ii) el sector 2 tiene una demanda final de 10.
iii) el sector 1 utiliza para sí 13 unidades de su propia producción.
iv) el producto bruto total de la economía es 100.

	S_1	S_2	D.F.	V.B.P.
S_1		18	21	
S_2		12		
V.A.	13			
V.B.P.				

b) construir la del año para la cual la demanda final es: $Y^* = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix}$

6) Dada la matriz insumo producto correspondiente al año base para la economía de un país dividida en dos sectores S_1 y S_2,

a) completar la tabla si:

i) el sector 1 utiliza insumos del sector 2 por un valor de 16.
ii) el sector 2 tiene una demanda final de 19.
iii) el sector 1 utiliza para sí 32 unidades de su propia producción.
iv) el producto bruto total de la economía es 138.

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1		28	36	
S_2		7		
V.A.	48			
V.B.P.				

b) construir la del año para la cual la demanda final es: $Y^* = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \end{pmatrix}$

7) La matriz de coeficientes técnicos correspondiente al año base para la economía de un país dividida en dos sectores S_1 y S_2 es:

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Completar la tabla si la demanda final es: $Y^t = (210;160)$.

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1				
S_2				
V.A.				
V.B.P.				

8) La matriz de coeficientes técnicos correspondiente al año base para la economía de un país dividida en dos sectores S_1 y S_2 es:

$$A = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 \\ 2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

Completar la tabla si la producción total es: $X^t = (200;110)$.

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1				
S_2				
V.A.				
V.B.P.				

RESPUESTAS

1) a) $S=\{(-1;0;1)\}$, S.C.D. b) S.I. c) $S=\left\{\left(1;3;2;\frac{1}{2}\right)\right\}$, S.C.D

d) S.I. e) $S=\{(-7+2x_3;-19+7x_3;x_3)/\,x_3\in\Re\}$, S.C.I.

f) $S=\left\{\left(\frac{2}{5}x_3;\frac{6}{5}x_3;x_3\right)/\,x_3\in\Re\right\}$, S.C.I.

g) $S=\left\{\left(-2x_2-10x_3;x_2;x_3;\frac{2}{3};-\frac{1}{6}\right)/\,x_2\in\Re\wedge x_3\in\Re\right\}$, S.C.I

h) $S=\{(1;2x_3;x_3;-3x_5;x_5)/\,x_3\in\Re\wedge x_5\in\Re\}$, S.C.I.

i) $S=\left\{\left(-\frac{19}{3}x_4;-\frac{53}{11}x_4;-\frac{79}{33}x_4;x_4\right)/\,x_4\in\Re\right\}$, S.C.I.

j) $S=\left\{\left(-\frac{11}{3};0;\frac{22}{3};-\frac{7}{3}\right)\right\}$, S.C.D k) S.I. l) S.I.

m) $S=\{(3;1;2)\}$, S.C.D n) $S=\{(-y;y)/\,y\in\Re\}$ S.C.I.

o) $S=\{(1-2y-z;y;z;4y+3z-3)/\,y\in\Re\wedge z\in\Re\}$ S.C.I.

p) $S=\{(4-2y+w;y;1+2w;w)/\,y\in\Re\wedge w\in\Re\}$ S.C.I.

q) $S=\left\{\left(x_1;-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}x_1;-\frac{8}{5}+\frac{9}{5}x_1;0\right)/\,x_1\in\Re\right\}$, S.C.I.

r) $S=\{(5;7;-3)\}$, S.C.D.

2) a) $S=\{(1;2;-3)\}$, S.C.D. b) $S=\{(9;-38;-6)\}$, S.C.D.

c) $S=\left\{\left(\frac{1}{4};\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right)\right\}$, S.C.D. d) $S=\{(0;0;0)\}$, S.C.D.

3) a) $S=\{(1;-3;-2)\}$, S.C.D. b) $S=\{(0;0;0)\}$, S.C.D. c) S.I.

4) a) $k \neq 3$ S.C.D. b) $k \neq 4$ S.C.I. c) $k \neq 1$, $k \neq 2$ S.C.D.
$k = 3$ S.C.I. $k = 4$ S.I. $k = 1$, $k = 2$ S.I.
d) $k \neq 1, k \neq -2$ S.C.D. e) $k \neq 1$ S.I. f) $k \neq 1$, $k \neq 0$ S.I.
$k = 1$ S.C.I. $k = 1$ S.C.I. $k = 1$, $k = 0$ S.C.I.
$k = -2$ S.I
g) $k \neq 5$ S.I.
$k = 5$ S.C.I.

5) a) $-5a + 2b + c \neq 0$ S.I. b) siempre tiene solución única
$-5a + 2b + c = 0$ S.C.I.

6) a) no existe k, b) $k \neq 3$ 7. $k = 7$, $S = \left\{ \left(\frac{3}{2} x_3 ; \frac{17}{2} x_3 ; x_3 \right) / x_3 \in \Re \right\}$

8) $X = \begin{pmatrix} -50/7 \\ -68/7 \\ 6 \end{pmatrix}$ 9. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 10. $t = 1$, $t = -2$

11) $S = \{ (-7 + 2x_3 ; -19 + 7x_3 ; x_3) / x_3 \in \Re \}$, S.C.I.

12) a) $S = \{ (2/7 ; 1/7 ; 0) \}$ b) $S = \{ (4/11 ; 4/11 ; 3/11) \}$

13) a) $k \neq \pm 1, k \neq 0$, b) $k = -1, k \neq 0$, c) $k = 1$

14) $X = \begin{pmatrix} a \\ \frac{3}{2} a \end{pmatrix}$ 16) \$1.500 y \$100 17) 40 y 60 respectivamente

18) a) $S = \{ (-5 + 2k ; -3k + 8 ; k) / k \in \Re \}$ b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$

19) $x_1 = 200$, $x_2 = 100$, $x_3 = 150$

Aplicaciones económicas

1) a) $p = 10$, $q = D = S = 10$. $I = 100$ b) $p = 15$, $q = D = S = 50$, $I = 750$
   c) $p = 200$, $q = D = S = 30$, $I = 6.000$

2) a) S: $p = \frac{3}{2}q + 3$, D: $p = 10 - 2q$, $p = 6$, $q = D = S = 2$, $I = 12$
   b) S: $q = 3p - 6$, D: $p = 6$, $p = 6$, $q = D = S = 15$, $I = 90$
   c) S: $q - 4p = -6$, D: $2p + 3q = 10$, $p = 2$, $q = D = S = 2$, $I = 4$

3)

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1	13	13	26	52
S_2	26	39	39	104
V.A.	13	52		
V.B.P.	52	104		156

4)

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1	46	48	21	115
S_2	46	0	14	60
V.A.	23	12		
V.B.P.	115	60		175

5) a)

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1	13	18	21	52
S_2	26	12	10	48
V.A.	13	18		
V.B.P.	52	48		100

b)

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1	15	21	24	60
S_2	30	14	12	56
V.A.	15	21		
V.B.P.	60	56		116

6) a)

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1	32	28	36	96
S_2	16	7	19	42
V.A.	48	7		
V.B.P.	96	42		138

b)

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1	40	32	48	120
S_2	20	8	20	48
V.A.	60	8		
V.B.P.	120	48		168

7)

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1	150	240	210	600
S_2	100	120	160	480
V.A.	350	120		
V.B.P.	600	480		1080

8)

	S_1	**S_2**	**D.F.**	**V.B.P.**
S_1	80	88	32	200
S_2	80	0	30	110
V.A.	40	22		
B.P.	200	110		310

Capítulo 3

Estructuras Algebraicas

Leyes de composición internas y externas.

Definiciones, ejemplos.

Estructuras algebraicas: grupo conmutativo,

anillo y cuerpo. Propiedades

El cuerpo de los números reales.

LEYES DE COMPOSICIÓN

LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA

Una ley de composición interna en un conjunto no vacío A consiste en una operación que asigna a cada par ordenado de elementos de A un único elemento de A como resultado de la operación. La ley interna va de $\boldsymbol{A \times A \to A}$.

Es decir que: $\forall a \in A, \forall b \in A \Rightarrow a * b = c \ / \ c \in A$

Ejemplos

a) la suma, resta, multiplicación de números reales

Si sumamos, restamos o multiplicamos un par de números reales, obtenemos como resultado de otro número real:

Al par de números reales (3;5) la ley interna + le asigna como resultado el número real 8.
Al par de números reales (3;5) la ley interna – le asigna como resultado el número real –2.
Al par de números reales (3;5) la ley interna • le asigna como resultado el número real 15.

b) la suma, resta de matrices del mismo orden.

Si sumamos, restamos matrices del mismo orden, obtenemos como resultado otra matriz del mismo orden.

No son leyes internas:

a) la resta y cociente de números naturales.

Si restamos o dividimos un par de números naturales, no siempre obtenemos como resultado otro número natural.

Al par de números naturales (3;5) la ley – le asigna como resultado el número –2 que no es natural.
Al par de números naturales (3;5) la ley **:** le asigna como resultado el número 3/5 que no es natural.

Propiedades y elementos distinguidos de una ley de composición interna

1. Propiedad asociativa

Una ley interna en un conjunto A es asociativa $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall a \in A,\ \forall b \in A,\ \forall c \in A : (a * b) * c = a * (b * c)}$$

Ejemplos

La suma y multiplicación de números reales son leyes asociativas, no así la resta y la división.

$a + (b + c) = (a + b) + c$ $\qquad$ $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

$a - (b - c) \neq (a - b) - c$ $\qquad$ $a : (b : c) \neq (a : b) : c$

Otros ejemplos

a) analicemos la ley * definida en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:
$a * b = a + b + 2$

$(a * b) * c = (a + b + 2) * c = a + b + 2 + c + 2 = a + b + c + 4$ ❶
$a * (b * c) = a * (b + c + 2) = a + b + c + 2 + 2 = a + b + c + 4$ ❷

❶ = ❷ $\Rightarrow$ * es asociativa

b) analicemos la ley * definida en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:
$a * b = 2.(a + b)$

$(a*b)*c = [2.(a+\mathrm{b})]*c = 2\ [2.(a+b)+c] = 2.(2a+2b+c) = 4a+4b+2c$ ❶
$a*(b*c) = a*[2.(b+c)] = 2[a+2.(b+c)] = 2.(a+2b+2c) = 2a+4b+4c$ ❷

❶ $\neq$ ❷ $\Rightarrow$ $*$ no es asociativa

2. Propiedad conmutativa

Una ley interna en un conjunto A es conmutativa $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall a \in A,\ \forall b \in A : a*b = b*a}$$

La suma y multiplicación de números reales son leyes conmutativas, no así la resta y la división.

$a + b = b + a$ $\qquad$ $a \bullet b = b \bullet a$

$a - b \neq b - a$ $\qquad$ $a : b \neq b : a$

3. Existencia de elemento neutro

Se llama así a un elemento ***e*** que compuesto a izquierda y derecha con cualquier otro no lo altere.
e∈A es elemento neutro para la ley * $\Leftrightarrow \exists e \in A, \forall a \in A \,/\, a*e = e*a = a$

Ejemplos: a) el 0 para la suma en $\mathbb{Z}$. $\qquad a + 0 = 0 + a = a$
b) el vector nulo para la suma de vectores.
$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
c) el 1 para la multiplicación en $\mathbb{Z}$. $\qquad 1.a = a.1 = a$

Nota: el neutro debe pertenecer al conjunto A, es único y debe serlo a izquierda y derecha.

Demostración de la unicidad

Suponemos que hay dos neutros, e y e'

Si e es neutro: $e' * e = e * e' = e'$

$\Rightarrow \quad e = e'$

Si e' es neutro: $e * e' = e' * e = e$

4. Existencia de elemento simétrico en una ley con neutro

Dado un elemento $a \in A$ se llama *simétrico* de a y se lo denomina a' a un elemento que compuesto a izquierda y derecha con a de el neutro. $a' \in A$ es elemento simétrico de a para la ley *.

$a + (-a) = (-a) + a = 0$

Ejemplos: a) el opuesto $(-a)$ para la suma en $\mathbb{Z}$. $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
b) el vector opuesto para la suma de vectores.

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$$

c) el inverso (a^{-1}) para la multiplicación en $\mathbb{Q} - \{0\}$.

$$a^{-1}.a = a.a^{-1} = \forall a \neq 0$$

d) La matriz opuesta $(-A)$ para la suma de matrices

$$A + (-A) = (-A) + A = \mathrm{N}$$

Propiedad: para cada elemento, el simétrico, si existe, es único. Para cada matriz, existe una única matriz opuesta, para cada número real existe un única inverso multiplicativo o un único opuesto, etc.

5. Existencia de elementos regulares

Que un elemento sea regular quiere decir que es simplificable

Si * es una ley de composición interna en A, el elemento $a \in A$ es regular a izquierda $\Leftrightarrow a * b = a * c \Rightarrow b = c$.

De la misma manera decimos que el elemento $a \in A$ es regular a derecha $\Leftrightarrow b * a = c * a \;\Rightarrow\; b = c$.

En ambos casos decimos que hemos *simplificado* la *a.*

Un elemento es *regular* si lo es a izquierda y a derecha.

Ejemplos

Para la suma de números reales todos los elementos son regulares:

$a + b = a + c \;\Rightarrow\; b = c$, lo mismo si $b + a = c + a \;\Rightarrow\; b = c$

En cambio eso no sierre se verifica para la multiplicación de números reales:

$$0.a = 0.b \;\wedge\; a \neq b$$

El cero no es un elemento regular para la multiplicación de reales. Sí lo son los demás número reales.

$$\forall a \in \Re - \{0\} : a \bullet b = a \bullet c \Rightarrow b = c$$

6.- Propiedad cancelativa

Una ley * es cancelativa en un conjunto *A* si todos sus elementos del conjunto *A* son regulares.

Ejemplos

Son cancelativas la suma y la resta en el conjunto de los números reales. La multiplicación es en $\Re - \{0\}$.

Veamos otro ejemplo:

Dada la ley * definida en $\Re$ / $a * b = 2\,(a + b)$, veremos si es cancelativa. $a * b = a * c \;\Rightarrow\; b = c$.

$2.(a + b) = 2.(a + c)$

$a + b = a + c$ cancelando el 2

$b = c$ cancelando la a

7. Propiedad distributiva

Dadas dos leyes de composición interna * y ♦:

♦ es distributiva a izquierda respecto de * $\Leftrightarrow a\blacklozenge(b*c) = (a\blacklozenge b) * (a\blacklozenge c)$
♦ es distributiva a derecha respecto de * $\Leftrightarrow (b*c)\blacklozenge a = (b\blacklozenge a) * (c\blacklozenge a)$

Se dice que una ley es distributiva si lo es a izquierda y a derecha.

Ejemplos

a) La multiplicación de números reales (•) respecto de la suma de números reales (+).

$$a \bullet (b+c) = (b+c) \bullet a = (a\bullet b) + (a\bullet c)$$

b) La intersección de conjuntos respecto de la unión de conjuntos

$$A\cap(B\cup C) = (B\cup C)\cap A = (A\cap B) \cup (A\cap C)$$

*No**ta:*** si la ley es conmutativa ♦ alcanza con verificar la distributividad solo a izquierda o a derecha.

Ejemplo de ley distributiva sólo a derecha

La división respecto de la suma es un ejemplo de ley que es distributiva sólo a derecha.

$$(a + b) : c = a : c + b : c, \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \qquad (c \neq 0)$$

$$a : (b + c) \neq a : b + a : c,$$

LEY DE COMPOSICIÓN EXTERNA

En este caso se opera con elementos de dos conjuntos, de tal manera que el resultado sea un elemento de uno de ellos.
Dados dos conjuntos no vacíos ***A*** y ***V***, una ley de composición externa es una operación que va de $\boldsymbol{A \times V \rightarrow V}$.
Es decir que: $\forall \alpha \in A,\ \forall v \in V : \alpha . v = w \,/\, w \in V$.
A los elementos del conjunto *A* se los denomina habitualmente *escalares*, y a los del conjunto *V* se los denomina ***vectores***.

Ejemplos

a) el producto de un escalar por una matriz: $\alpha . A = B$
α es un escalar, *A* y *B* son matrices.

b) el producto de un escalar por un par ordenado:
$\alpha .(a;b) = (\alpha . a;\alpha . b)$.

c) el producto de un escalar por un polinomio de otro polinomio.

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Una estructura algebraica es un objeto matemático que consiste de un conjunto no vacío y leyes de composición interna o externa. Según sean las propiedades que satisfagan dichas leyes de composición, se obtienen los distintos tipos de estructuras algebraicas.

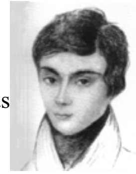
En este capítulo veremos la estructura de grupo, anillo y cuerpo y más adelante la de espacio vectorial.

ESTRUCTURA DE GRUPO

El par (A,*) tiene estructura de grupo sí y solo sí:

a) * es ley interna
b) * es asociativa
c) * admite neutro
d) * admite simétrico

GALOIS, ***Evariste (18011-1832)***
Matemático francés, nacido en Bourg-la-Reine. A pesar de sus habilidades matemáticas no pudo ingresar a la Escuela Politécnica de París e ingresó a la Escuela Normal Superior en 1829, de donde fue expulsado en 1830 por sus simpatías republicanas. Esto lo involucró en agitaciones políticas por lo que estuvo preso dos veces. A los 21 años muere en un duelo por una mujer. A él se deben el concepto y el nombre



Grupo abeliano

Si además la ley * es conmutativa, el grupo se denomina ***Abeliano.***

Ejemplos

ABEL, ***Niels Henrik (1802-1829):*** fue un matemático noruego que con Galois inicia el nuevo enfoque del Algebra. Tuvo una vida corta pero fructífera. Murió de tuberculosis a los 27 años y tuvo que hacerse cargo de una familia numerosa al morir su padre. Sus aportes se refieren a la teoría de series, integrales, etc. En 1824 demostró que las ecuaciones de grado mayor a 4 son irresolubles por fórmulas radicales. Este descubrimiento ya lo había apuntado Gauss en 1799. Dijo *las series divergentes son un invento del diablo*.

a) ($\Re$;+), los números reales con la suma ordinaria de números reales.

Vemos que cumple con las cinco condiciones: es ley interna ya que la suma de números reales es otro número real; ya vimos que la suma de números es asociativa; tiene elemento neutro que es el 0 ($e = 0$); simétrico que es el opuesto ($a' = -a$) y también sabemos que la suma de números es conmutativo.

b) ($\mathbb{R}-\{0\}$;•), los números reales, exceptuando el cero con la multiplicación ordinaria de números reales.

Vemos que cumple con las cinco condiciones: es ley interna ya que el producto de números reales es otro número real; ya vimos que la mul-

tiplicación de números es asociativa; tiene elemento neutro que es el 1 (e = 1); simétrico que es el inverso multiplicativo ($a' = a^{-1}$, que existe para todos para todos los números reales excepto el 0) y también sabemos que la multiplicación de números es conmutativo.

c) (V_2;+), los segmentos orientados del plano con la suma de segmentos orientados.

Vemos que cumple con las cinco condiciones: es ley interna ya que como vimos en el capítulo introductorio la suma de segmentos orientados en el plano da otro segmento orientado; la suma de segmentos orientados es asociativa; tiene elemento neutro que es el segmento nulo ($e = \vec{0}$); simétrico que es el segmento opuesto ($a' = -\vec{v}$) y también sabemos que la suma de segmentos orientados es conmutativa.

d) ($\Re^2$;+), los pares ordenados de números reales con la suma de pares ordenados que definimos de la siguiente manera:

$$(a;b) + (c;d) = (a+c;b+d)$$

Vemos que cumple con las cinco condiciones: es ley interna ya que la suma de pares ordenados de números reales da otro par ordenado de números reales; es fácil comprobar que es asociativa, tiene elemento neutro que es el par (0;0); simétrico que es el par opuesto ($a' = (-a; -b)$) y también es fácil verificar que la suma de pares ordenados es conmutativa.

e) ($\mathbb{R}^{mxn}$;+), el conjunto de las matrices del mismo orden con la suma de matrices

Vemos que cumple con las cinco condiciones: es ley interna ya que la suma de matrices del mismo orden da otra matriz del mismo orden; ya hemos visto que la suma de matrices es asociativa; tiene elemento neutro que par ordenado de números reales; es fácil comprobar que es asociativa, tiene elemento neutro que es la matriz nula ($e = N$); simétrico que es la matriz opuesta ($a' = -A$) y también vimos que la suma de matrices es conmutativa.

Analicemos un ejemplo donde la operación no es una operación conocida: $(\mathbb{Z};*)$, donde $a * b = a + b - 5$.

Debemos ver si el conjunto de los números enteros con la operación * tiene estructura de grupo abeliano.

a) *Ley interna*

Debemos asegurar que el compuesto de todo par de números enteros a través de * da otro número entero. Esto se debe a que la suma y resta de números enteros da siempre un número entero.

b) *Asociatividad:* $\forall a \in Z,\ \forall b \in Z,\ \forall c \in Z: (a * b) * c = a * (b * c)$

$$(a * b) * c = (a + b - 5) * \mathrm{c} = a + b - 5 + c - 5 = a + b + c - 10 \quad (1)$$
$$a * (b * c) = a*(b + c - 5) = a + b + c - 5 - 5 = a + b + c - 10 \quad (2)$$

De (1) y (2) surge que la ley * es asociativa

c) *Conmutatividad:* $\forall a \in Z,\ \forall b \in Z : a * b = b * a$

$a * b = a + b - 5 = b + a - 5 = b * a$, esto es válido porque la suma en $\mathbb{Z}$ es conmutativa ($a + b = b + a$).

d) *Existencia de neutro* $\exists e \in Z, \forall a \in Z \,/\, a * e = e * a = a$

Por haber verificado la conmutatividad buscamos neutro y simétrico sólo a derecha.

$a * e = a \Rightarrow a + e - 5 = a \Rightarrow e = 5$ (vemos que el neutro es único y $\in \mathbb{Z}$).

e) *Existencia de simétrico* $\forall a \in Z,\ \exists\, a' \in Z \,/\, a * a' = a' * a = 5$

$a*a' = 5 \Rightarrow a + a' - 5 = 5 \Rightarrow a' = 10 - a$
vemos que cada número entero tiene su simétrico que también es entero: $3' = 7 \qquad 8' = 2 \qquad 23' = -13$

Por lo tanto ($\mathbb{Z}$;*) tiene estructura de grupo abeliano.

Propiedades de los grupos

Además de la unicidad del neutro y del simétrico ya mencionadas podemos agregar las siguientes propiedades que se verifican si (A,*) tiene estructura de grupo.

a) El simétrico del simétrico es el mismo elemento: $(a')' = a$.
b) El simétrico del compuesto de dos elementos es el compuesto de los simétricos en orden cambiado: $(a * b)' = (b' * a')$.

c) Todos los elementos de un grupo son regulares para la ley que los define: $a * x = b * x \;\Rightarrow\; a = b$ y $x * a = x * b \Rightarrow a = b$.

d) La ecuación $a * x = b$ siempre tiene solución única.

Demostración

Componiendo a ambos miembros de la igualdad con a', queda:

$$a' * (a * x) = a' * b$$

$$(a' * a) * x = a' * b \Rightarrow \quad x = a' * b$$

Estas propiedades se verifican independientemente del significado de los elementos y de la operación involucrada. Eso quiere decir que cualquier conjunto que con respecto a una operación tenga estructura de grupo verifica estas propiedades.
Esta es la importancia de trabajar con estructuras. Algunas de estas propiedades las vimos en el capítulo 1 para las matrices, ahora vemos que no sólo valen para las matrices sino para cualquier grupo. Sólo basta con demostrar que con un conjunto dado con una operación cualquiera tiene estructura de grupo para que se verifiquen estas propiedades.
De esta manera se hace una sola demostración para la estructura en lugar de hacerlo para cada conjunto.

Estructura de semigrupo

El par (A;*) es semigrupo ⇔ * es ley interna en A y es asociativa.

OPERACIONES DEFINIDAS POR TABLAS

A veces, si el conjunto A es finito, se puede definir la operación a través de una tabla de manera tal que el resultado de operar dos elementos a y b con la operación * se coloca en la intersección de la fila de a con la columna de b.

Ejemplo: Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$

*	***a***	***b***	***c***
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

De esta tabla surge, por ejemplo, que $a * b = a$, $b * c = c$, etc.
Para que se verifique la ley interna, los elementos que aparecen en la tabla deben pertenecer al conjunto, cosa que se verifica en este caso.
La ley es conmutativa si los elementos simétricos respecto de la diagonal son iguales, cosa que también se verifica.
Hay elemento neutro si hay una columna y una fila en la cual se repite el conjunto A y ambas están encabezadas por el mismo elemento. En este caso en la columna y en la fila correspondientes al elemento ***b*** se repiten el conjunto A. Por lo tanto el elemento ***b*** es el neutro.
Habiendo neutro, debemos encontrar los simétricos. Debemos buscar en las casillas donde figura el neutro. Así vemos que el simétrico de ***c*** es ***a*** y el de ***a*** es ***c***, además el simétrico de ***b*** es ***b***.
Lo más difícil de verificar es el cumplimiento de la propiedad asociativa. Como no hay una ley general, hay que verificar cada caso, lo cual es un poco engorroso. Por eso es que en algunos casos se informa que la ley es asociativa.
Por ejemplo, debemos verificar que:

$a * (b * b) = (a * b) * b$ $\qquad$ $a * (c * a) = (a * c) * a$, etc.

$a * (b * b) = a * b = a$ $\qquad$ $a * (c * a) = a * b = a$

$(a * b) * b = a * b = a$ $\qquad$ $(a * c) * a = b * a = a$

Y así deberíamos verificar con todas las ternas posibles, haya o no elementos repetidos. En este caso se verifica que la ley es asociativa. Por lo tanto en esta tabla aparece representada una estructura de grupo.

ESTRUCTURA DE ANILLO

Sean un conjunto no vacío A y dos leyes: * y •.

Definición

La terna $(A;*;\bullet)$ es un anillo $\Leftrightarrow$: a) $(A;*)$ es grupo abeliano.
b) $(A;\bullet)$ es semigrupo.
c) • es distributiva respecto de *.

Anillo conmutativo

Si además • es conmutativa el anillo es ***conmutativo***.

Ejemplo: $(\mathbb{Z};+;\bullet)$ el conjunto de los números enteros con la suma y la multiplicación.

Anillo con unidad

Si además • admite elemento neutro entonces el anillo es un anillo con unidad.

ESTRUCTURA DE CUERPO

La terna $(\mathbb{K};+;\bullet)$ es un cuerpo si y sólo si:

a) $(\mathbb{K};+)$ es grupo abeliano.
b) $(\mathbb{K}-\{0\};\bullet)$ es grupo abeliano.
c) $\bullet$ es distributiva respecto de +.

Nota: 0 es el neutro en $(\mathbb{K};+)$.

Ejemplos: $(\mathbb{Q};+;\bullet)$ y $(\mathbb{R};+;\bullet)$ son algunos ejemplos de estructuras de cuerpo.

Vamos a analizar en particular la estructura de cuerpo de los números reales, que es la que más utilizaremos en este texto.

El cuerpo de los números Reales $(\mathbb{R};+;\bullet)$

Veremos ahora que el conjunto de los números reales con las operaciones suma y multiplicación, tiene estructura de cuerpo.

a) $(\mathbb{R};+)$, como ya vimos, es grupo abeliano.
b) $(\mathbb{R}-\{0\};\bullet)$, como también ya vimos, es un grupo abeliano.
c) La multiplicación de números reales es distributiva respecto de la suma de número reales.

Por lo tanto $(\mathbb{R};+;\bullet)$ es un cuerpo.

UNA APLICACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS

Las estructuras algebraicas permiten justificar, algunas propiedades conocidas, entre ellas la regla de los signos.

a) $a * 0 = 0$

Dem: $0 + a * 0 = a * 0$ (por ser el 0 neutro en +)
$0 + a * 0 = a * (0 + 0)$ (por ser el 0 neutro en +)
$0 + a * 0 = a * 0 + a * 0$ (por propiedad distributiva)
$a * 0 = 0$ (por propiedad cancelativa)

b) $(-1).a = -a$

Dem: $a - 1.a = 1.a - 1.a$ (por ser 1 el neutro)
$a - 1.a = a.(1 - 1)$ (por propiedad distributiva)
$a - 1.a = a.0 = 0$ (por neutro)
$(- 1).a = -a$

c) $-(-a) = a$

Dem: $a + (-a) = 0$
$a + (-a) - (-a) = 0 - (-a)$
$a + [(-a) - (-a)] = -(-a)$ (por asociatividad)
$a + 0 = -(-a)$ (por propiedad del inverso aditivo)
$a = -(-a)$ (por ser 0 el neutro)

La regla de los signos

a) $(-a).(-b) = a.b$

Dem:

$(-a).(-b) = (-1.a).\ (-1.b) = [(-1).\ (-1)].a.b = -(-1).a.b$ (por asociatividad)
$(-a).(-b) = 1.a.b = a.b$

b) $(-a).b = b.(-a) = -(a.b)$

Dem: $(-a).b = (-1.a).b = -1.(a.b)$ (por asociatividad)
$(-a).b = -(a.b)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Analizar qué propiedades cumplen los siguientes pares

a) $(\mathbb{N}_0;+)$, b) $(\mathbb{N};+)$, c) $(\mathbb{Z};+)$, d) $(\mathbb{Z};-)$, e) $(\mathbb{Z};\bullet)$, f) $(\mathbb{R};+)$, g) $(\mathbb{R}-\{0\};\bullet)$

2) Analizar si las siguientes tablas correspondientes a leyes asociativas tienen estructura de grupo abeliano:

a)

Δ	**p**	**q**	**r**
p	p	q	r
q	q	r	p
r	r	p	q

b)

*	**0**	**1**
0	0	1
1	1	2

*	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

d)

*	**O**	**Δ**	
O		O	Δ
Δ	O	Δ	
	Δ		O

3) Completar la siguiente tabla si **P** son los números pares e **I** son los números impares. Analizar si tiene estructura de grupo abeliano. Indicar el elemento neutro y los elementos simétricos.

+	**P**	**I**
P		
I		

4) Sabiendo que (C;*) tiene estructura de grupo, que C = $\{a;b\}$ y que b es el neutro, a) completar la tabla, b) ¿es grupo abeliano?

*	***a***	***b***
a		
b		

5) Verificar si * es asociativa si: a) $x * y = x^2 + y^2$, en $\mathbb{N}$.

b) $a * b = a + \dfrac{1}{b}$, en $\mathbb{Q}$.

6) Probar que la adición y la multiplicación son leyes de composición interna en el conjunto de los números pares.

7) Determinar si $(\mathbb{Z};*)$ tiene estructura de grupo abeliano. Indicar los elementos si:

a) $a * b = a + b - 5$ b) $a * b = 2.(a + b)$ c) $a * b = a.b + 1$

d) $a * b = a^2 - b^2$ e) $a * b = a + b + a.b$

8) Dados los siguientes pares, analizar las propiedades, indicar sus elementos y dar la estructura

a) $(A;+)$, $A = \{x / x = 3k, k \in Z\}$, + es la suma ordinaria de números enteros.
b) $(B;\bullet)$, $B = \{x / x = 2k + 1, k \in Z\}$, $\bullet$ es el producto ordinario de números enteros.
c) $(V_2;+)$, $V_2 =$ segmentos orientados del plano, + es la suma de segmentos orientados.
d) $(M_2;+)$, $M_2 =$ matrices cuadradas de orden 2, + es la suma de matrices.
e) $(B;\bullet)$, $B = \{x / x = 2^k, k \in Z\}$, $\bullet$ es el producto ordinario de números reales.
f) $(A;*)$, $A = \{1,2,4,8\}$, $a * b =$ m.c.m. $(a;b)$.

9) En $(\mathbb{R}^2;*)$, ($\mathbb{R}^2$ son los pares ordenados de números reales), se define:

a) $(a;b)*(a';b') = (a + b'; b + a')$
b) $(a;b)*(a';b') = (a.a'; b.a' + b')$
c) $(a;b)*(a';b') = (a.a'; b.b')$

10) En $\mathbb{Z}$ se toma la ley de composición interna $x * y = - y$. Probar que $(\mathbb{Z},*)$ no es grupo.

11) Dadas las siguientes funciones definidas de $\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\}$

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = -x \qquad f_3(x) = \frac{1}{x} \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Analizar si $(A{:}\mathbf{o})$ es grupo si $A = \{f_1(x); f_2(x); f_3(x); f_4(x)\}$ y **o** es la composición de funciones.

12) Dadas:
$a * b = 2.(a + b)$
$a \,\Delta\, b = a + b + a.b$
$a \text{ O } b = 5.(a - b)$
$a \quad b = a^2 + b^2$

Analizar distributividades de:
a) O respecto de * por izquierda
b) Δ respecto de   por derecha

13) Verificar si $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ son anillos y clasificarlos. $\mathbb{Z}^2$ son los pares ordenados de números enteros y se define:
$(a;b) \oplus (a';b') = (a + a'; b + b')$ y:

a) $(a;b) \odot (a';b') = (a.a';0)$ b) $(a;b) \odot (a';b') = (a.a'; a.b' + b.a')$

14) Dada la estructura $(A;\Delta;\ )$, se sabe que $A = \{1;2\}$ y que las operaciones: Δ y   están definidas por las siguientes tablas:

Δ	**1**	**2**
1	**1**	2
2	**2**	1

	1	2
1	1	1
2	1	2

a) verificar que $(A;\Delta;\ )$ es un anillo
b) determinar si es anillo unitario

15) $(A;\Delta;*)$, es un cuerpo y se sabe que p es el elemento neutro en *. Además $s * p = r$ y $s * r = q$. Completar las tablas y calcular:

Δ	***p***	***q***	***r***	***s***
p				
q		*r*	*s*	*p*
r				
s				

*****	***p***	***q***	***r***	***s***
p				
q				
r				
s				

a) $(p * q) \,\Delta\, (s \,\Delta\, p)$ b) $(r * q^{-1}) \,\Delta\, [(-s) * p)]$

RESPUESTAS

1) a) ($\mathbb{N}_0$;+), li, asoc., e = 0, no tiene simétrico, conm. (semigrupo conmutativo con unidad).
   b) ($\mathbb{N}$;+), li, asoc., sin neutro, conm., (semigrupo conmutativo)
   c) ($\mathbb{Z}$;+), grupo abeliano, $e = 0$, $a' = -a$.
   d) ($\mathbb{Z}$;–), li, (monoide).
   e) ($\mathbb{Z}$;•), li, asoc., e = 1, no tiene simétrico, conm. (semigrupo conmutativo con unidad).
   f) ($\mathbb{R}$;+), grupo abeliano, $e = 0$, $a' = -a$.
   g) ($\mathbb{R}$–{0};•), grupo abeliano, $e = 1$, $a' = \dfrac{1}{a}$.

2) a) sí, $e = p$, $p' = p$, $q' = r$, $r' = q$, b) no, no es li.,
   c) sí, $e = a$, $a' = a$, $b' = d$, $c' = c$, $d' = b$
   d) sí, $e = \Delta$, O' = , ' = O, $\Delta' = \Delta$

3) grupo abeliano, e = P, P' = P, I' = I

+	**P**	**I**
P	P	I
I	I	P

4) b) sí, $e = b$, $a' = a$, $b' = b$

*	***a***	***b***
a	*b*	*a*
b	*a*	*b*

5) a) no es asociativa, b) no es asociativa

7) a) sí, $e = 5$, $a' = 10 - a$, b) no, es li., no asoc., sin neutro, es conm., c) no es li., no es asoc., sin neutro, es conmut., d) no, es li., no es asoc., sin neutro, no es conmut., e) no, es li., es asoc., $e = 0$, no tiene simétrico, es conmut.

8) a) grupo abeliano, $e = 0$, $a' = -3k$,
   b) li., asoc., e = 1, no tiene simétrico, es conm.
   c) grupo abeliano, $e = \vec{0}$, $a' = -\vec{v}$,
   d) grupo abeliano, e = N, $a' = -A$
   e) grupo abeliano, $e = 1 = 2^0$, $a' = 2^{-k}$
   f) no es grupo, no tiene simétrico

9) a) li., no asoc., no conmut., no tiene neutro
   b) li., asoc., $e = (1;0)$, sin simétrico, solamente lo tienen los pares $\neq (0;b)$, no conmut.
   c) li., asoc., $e = (1;1)$, sin simétrico, conm.

11) es grupo abeliano, $e = x$, $x' = x$, $-x' = -x$, $1/x' = 1/x$, $-1/x' = -1/x$

12) a) no se verifica, b) no se verifica

13) $(\mathbb{Z}^2;+)$ es grupo abeliano, $e = (0;0)$, $a' = (-a; -b)$
   a) $(\mathbb{Z}^2,\oplus,\odot)$ es anillo conmutativo sin unidad
   b) $(\mathbb{Z}^2,\oplus,\odot)$ es anillo conmutativo con unidad, $e = (1;0)$

14) es anillo unitario, $e = 2$,   15) a) p, b) r

Capítulo 4

Espacios Vectoriales

Definición de Espacio Vectorial.

Ejemplos y propiedades. Subespacios.

Dependencia e independencia lineal de vectores.

Sistema de generadores.

Base y dimensión de un espacio vectorial.

Coordenadas de un vector.

Cambio de base.

Interpretación vectorial de fenómenos económicos:

vector de precios,

ecuaciones presupuestarias,

recta y plano de balance.

ESPACIOS VECTORIALES

La cuaterna $(V;\oplus;\mathrm{K};\odot)$ es un espacio vectorial si se cumplen las siguientes propiedades:

1) $(V;\oplus)$ es un grupo abeliano, donde $\oplus$ es la ley interna en V.
2) $(\mathrm{K};+;\bullet)$ es un cuerpo, donde $+$ y $\bullet$ son las leyes internas en K.
3) $\odot$ es una ley externa de $\boldsymbol{KxV} \to \boldsymbol{V}$, que cumple las siguientes propiedades:

   a) $\forall v\in V$: $1\odot v = v$ siendo 1 el neutro para $(\mathrm{K},\bullet)$
   b) Distributividad respecto de la suma de escalares:
      $\forall\alpha\in \mathrm{K}, \forall\beta\in \mathrm{K}, \forall v\in V$: $(\alpha+\beta)\odot v = (\alpha\odot v) \oplus (\beta\odot v)$
   c) Distributividad respecto de la suma de vectores:
      $\forall v\in V, \forall w\in V, \forall\alpha\in \mathrm{K}$: $\alpha\odot(v\oplus w) = (\alpha\odot v) \oplus (\alpha\odot w)$
   d) Asociatividad mixta
      $\forall\alpha\in \mathrm{K}, \forall\beta\in \mathrm{K}, \forall v\in V$: $\alpha\odot(\beta\odot v) = (\alpha \bullet \beta)\odot v$

Los elementos del conjunto ***V*** reciben el nombre de ***vectores*** y los de K el nombre de ***escalares***.

Ejemplo: $(\mathbb{R}^2;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ donde $\mathbb{R}^2$ son los pares ordenados de números reales.

$(\mathbb{R}^2;\oplus)$ es un grupo abeliano, donde $\oplus$ es la suma de pares ordenados, $(\mathbb{R};+;\bullet)$ es un cuerpo donde $+$ y $\bullet$ son respectivamente la suma y el producto de números reales, $\odot$ es la ley externa, producto de un escalar por un par ordenado. Además:

1) $1\odot(a;b) = (1\bullet a;1\bullet b) = (a;b)$
2) $(\alpha+\beta)\odot(a;b) = [(\alpha+\beta)\bullet a;(\alpha+\beta)\bullet b] = (\alpha\bullet a+\beta\bullet a;\alpha\bullet b+\beta\bullet b) =$
   $= (\alpha\bullet a;\alpha\bullet b) \oplus (\beta\bullet a;\beta\bullet b) = [\alpha\odot(a;b)] \oplus [\beta\odot(a;b)]$
3) $\alpha\odot[(a;b) \oplus (c;d)] = \alpha\odot(a+c;b+d) = [\alpha\bullet(a+c);\alpha\bullet(b+d)] =$
   $(\alpha\bullet a +\alpha\bullet c;\alpha\bullet b+\alpha\bullet d) = (\alpha\bullet a;\alpha\bullet b) \oplus (\alpha\bullet c;\alpha\bullet d) = [\alpha\odot(a;b)] \oplus [\alpha\odot(c;d)]$
4) $\alpha\odot[\beta\odot(a;b)] = \alpha\odot(\beta\bullet a;\beta\bullet b) = (\alpha\bullet\beta\bullet a;\alpha\bullet\beta\bullet b) = [(\alpha\bullet\beta)\bullet a;(\alpha\bullet\beta)\bullet b]$
   $= (\alpha\bullet\beta)\odot(a;b)$

Otros ejemplos: $(V_2;\oplus;\mathbb{R};\odot)$, donde V_2 son los segmentos orientados del plano y $\oplus$ la suma de segmentos orientados, $\odot$ es la ley externa producto de un escalar por un segmento orientado.

$(\mathbb{C};\oplus;\mathbb{R};\odot)$ donde $\mathbb{C}$ son los números complejos.

$(\mathbb{R}^{mxn};\oplus;\mathbb{R};\odot)$, donde $\mathbb{R}^{mxn}$ son las matrices reales, $\oplus$ es la suma de matrices, $\odot$ es la ley externa producto de un escalar por una matriz.

Propiedades

1) $\forall v \in V$: $0\odot v = \vec{0}$ (0 es el neutro en (K;+), $\vec{0}$ es el neutro en $(V;\oplus)$ (vector nulo).

dem.: $\forall v \in V$: $\alpha\odot v = (\alpha+0)\odot v \Rightarrow (\alpha\odot v) \oplus \vec{0} = (\alpha\odot v) \oplus (0\odot v) \Rightarrow \vec{0} = 0\odot v$

2) $\forall \alpha \in K$: $\alpha\odot\vec{0} = \vec{0}$ $\qquad$ $\vec{0}$ es el neutro en $(V;\oplus)$

dem.: $\forall \alpha \in K$: $\alpha\odot v = \alpha\odot(v\oplus\vec{0}) \Rightarrow (\alpha\odot v) \oplus \vec{0} = (\alpha\odot v) \oplus (\alpha\odot\vec{0})$

$$\vec{0} = \alpha\odot\vec{0}$$

3) Si $\alpha\odot v = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee v = \vec{0}$

dem.: si $\alpha = 0$ ya está demostrado,

si $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1} / \alpha^{-1} \odot (\alpha\odot v) = \alpha^{-1}\odot\vec{0}$

$$(\alpha^{-1} \bullet \alpha)\odot v = \vec{0}$$

$$1\odot v = \vec{0} \Rightarrow v = \vec{0}$$

4) $\forall \alpha \in K \wedge \forall v \in V$: $(-\alpha)\odot v = \ominus(\alpha\odot v)$

dem.: $[(-\alpha)\odot v] \oplus (\alpha\odot v) = (-\alpha + \alpha)\odot v = 0\odot v = \vec{0}$

$$[(-\alpha)\odot v] \oplus \alpha\odot v) = \vec{0}$$

$$[(-\alpha)\odot v] \oplus (\alpha\odot v) \ominus (\alpha\odot v) = \vec{0} \ominus (\alpha\odot v)$$

$$(-\alpha)\odot v = \ominus(\alpha\odot v)$$

SUBESPACIO VECTORIAL

Dado el espacio vectorial $(V;\oplus;K;\odot)$ y el conjunto no vacío $W\subset V$, $(W;\oplus;K;\odot)$ es un subespacio vectorial de $(V;\oplus;K;\odot)$ si $(W;\oplus;K;\odot)$ es a su vez un espacio vectorial.

Teorema

Todo subespacio no vacío W de un espacio vectorial V contiene a $\vec{0} \in W$.

Dem.: $\forall x \in W$: $0 \odot x \in W$ (por ser W espacio vectorial), y $0 \odot x = \vec{0}$, por propiedad 1, por lo tanto $\vec{0} \in W$.

Condiciones suficientes

El cumplimiento de estas cuatro condiciones asegura que ***W*** es un subespacio de ***V***.

1) $W \subset V$	
2) $W \neq \varnothing$ que es equivalente a $\vec{0} \in W$	El neutro en $V \in W$
3) $\forall x \in W \wedge \forall y \in W$: $x \oplus y \in W$	W es cerrado para la suma
4) $\forall \alpha \in K \wedge \forall x \in W$: $\alpha \odot x \in W$	W es cerrado para el producto por escalares

Si se verifican estas 4 condiciones, se puede asegurar que $(W;\oplus;K;\odot)$ es un subespacio vectorial de $(V;\oplus;K;\odot)$. Veamos ahora la demostración.

Demostración

Debemos probar los axiomas de E.V. para poder justificar que con las hipótesis dadas $(W;\oplus;K;\odot)$ es un subespacio vectorial. Las leyes de cierre se cumplen por hipótesis 3 y 4. Como los vectores de W también están en V, las leyes de asociatividad, conmutatividad, distributividad e identidad multiplicativa ($1.x = x$) también se cumplen (***por herencia***).
Además $\vec{0} \in W$ por hipótesis 2. También se verifica, por hipótesis 4, que $(-1).x \in W$, $\forall x \in W$, por propiedad 4 de los espacios vectoriales $-x = (-1).x \in W$, con lo cual queda demostrado que para justificar que un subconjunto de V es un subespacio de éste, alcanza con que se verifiquen estas cuatro condiciones.

Ejemplo

Determinar si $W = \{(x_1;x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 = 2x_2\}$ *es un subespacio de* $\mathbb{R}^2$

Debemos verificar las 4 condiciones:

a) $W \subset \mathbb{R}^2$ por definición, porque es un conjunto formado por pares ordenados.
b) $(0;0) \in W$ porque $0 = 2.0$.
c) si $x = (x_1;x_2) \in W$ e $y = (y_1;y_2) \in W$ debemos probar que $x + y \in W$.
$x + y = (x_1;\, x_2) + (y_1;y_2) = (x_1+y_1;x_2+y_2)$, debemos probar que $x_1+y_1 = 2\,(x_2+y_2)$, pero $x_1 = 2x_2$ e $y_1 = 2y_2$ por ser x e y elementos de W, sumando miembro a miembro: $x_1 + y_1 = 2\,x_2 + 2y_2 = 2\,(x_2+y_2)$, con lo que queda demostrado.
d) si $x = (x_1;\, x_2) \in W$, debemos probar que $\alpha.(x_1;\, x_2) \in W$.
$\alpha.(x_1;x_2) = (\alpha.x_1;\alpha.x_2)$, debemos probar $\alpha.x_1 = 2\alpha.x_2$, pero como $x_1 = 2x_2$ multiplicando a ambos miembros por α, queda que $\alpha.x_1 = \alpha.2x_2 = 2\alpha.x_2$, con lo que queda demostrado que W es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Subespacios triviales

Dado un espacio vectorial $(V;\oplus;K;\odot)$, son subespacios vectoriales triviales los siguientes:

a) $(V;\oplus;K;\odot)$, es decir el mismo espacio vectorial
b) $(\{\vec{0}\};\oplus;K;\odot)$, es decir el subespacio cuyo único elemento es el vector nulo.

dem.: se verifica que $\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$ y $\alpha.\vec{0}=\vec{0} \Rightarrow (\{\vec{0}\};\oplus;K;\odot)$ es subespacio de V.

Subespacios propios

Son todos aquellos que no son los subespacios triviales.

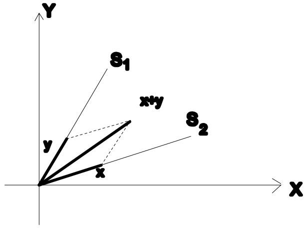
Ejemplos: de $\mathbb{R}^2$ lo son toda recta que pasa por el origen, de $\mathbb{R}^3$ lo son toda recta o plano que pase por el origen. Deben pasar por el origen porque en el conjunto debe estar el vector nulo.

OPERACIONES CON SUBESPACIOS

Unión

Si S_1 y S_2 son dos subespacios de $(V;\oplus;K;\odot)$ entonces $S_1 \cup S_2$ no da necesariamente otro subespacio vectorial de $(V; \oplus;K;\odot)$.

Ejemplo: si en $(\mathbb{R}^2;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ consideramos dos rectas que pasan por el origen (cada una de ellas constituye un subespacio de $\mathbb{R}^2$) la unión de los subespacios es el par de rectas. Vemos que si tomamos un vector de cada recta y los sumamos da un vector que no pertenece a la unión. Por lo tanto no cumple la condición de un subespacio que debe ser cerrado para la suma.



Intersección

La intersección $S = S_1 \cap S_2$ de dos subespacios de un espacio vectorial $(V;\oplus;K;\odot)$ da otro subespacio vectorial de $(V;\oplus;K;\odot)$.

Demostración

a) $S \subset V \qquad S_1 \subset V \wedge S_2 \subset V \Rightarrow S_1 \cap S_2 \subset V \Rightarrow S \subset V$

b) $\vec{0} \in S \qquad \vec{0} \in S_1 \wedge \vec{0} \in S_2 \Rightarrow \vec{0} \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow \vec{0} \in S$

c) S es cerrado para la suma: $x \in S \wedge y \in S \Rightarrow x \in S_1 \wedge x \in S_2$, $y \in S_1 \wedge y \in S_2 \Rightarrow x+y \in S_1 \wedge x+y \in S_2 \Rightarrow x+y \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow (x+y) \in S$

d) S es cerrado para el producto por escalares
$\alpha \in K \wedge x \in S \Rightarrow \alpha \in K \wedge x \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow \alpha \in K \wedge x \in S_1 \wedge x \in S_2 \Rightarrow \alpha.x \in S_1 \wedge \alpha.x \in S_2 \Rightarrow \alpha.x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow \alpha.x \in S$

Suma

Primero definimos la suma de dos subespacios S_1 y S_2 de $(V;\oplus;K;\odot)$

$S = S_1 + S_2 = \{x \in V \,/\, x = x_1 + x_2 \;\wedge\; x_1 \in S \wedge x_2 \in S\}$ o sea que:
$S = \{x \in V \,/\, \exists x_1 \in S_1 \wedge \exists x_2 \in S_2 \wedge\; x = x_1 + x_2\}$

El conjunto suma está formado por todos los vectores que se puedan obtener como suma de algún vector de S_1 y algún vector de S_2.

Propiedad: La suma de dos subespacios de V es un subespacio de V

a) $S \subset V$ $\;\forall x \in S$: $x = x_1 + x_2 \,/\, x_1 \in S_1 \Rightarrow x_1 \in V \wedge x_2 \in S_2 \Rightarrow x_2 \in V$
$\quad x_1 + x_2 \in V \Rightarrow S \subset V$
b) $\vec{0} \in S \quad \vec{0} \in S_1 \wedge \vec{0} \in S_2 \;\Rightarrow\; \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{0} \in S$
c) S es cerrado para la suma:
$\quad x = x_1 + x_2 \;\wedge\; x_1 \in S_1 \wedge x_2 \in S_2$, $y = y_1 + y_2 \wedge y_1 \in S_1 \wedge y_2 \in S_2$,
$\quad x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$, pero $x_1 + y_1 \in S_1 \wedge x_2 + y_2 \in S_2 \Rightarrow x + y \in S$
d) S es cerrado para el producto de escalares:
$\quad x = x_1 + x_2 \;\wedge x_1 \in S_1 \wedge x_2 \in S_2$, $\alpha.x = \alpha.x_1 + \alpha.x_2 \wedge \alpha.x_1 \in S_1 \wedge \alpha.x_2 \in S_2$
$\quad \Rightarrow \alpha.x \in S$

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Si $A = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$ y $\exists\; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ / dado cualquier $u \in V$ éste se puede expresar como: $u = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_n.u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.u_i \Rightarrow$ se dice que u es una **combinación lineal** del conjunto A.

Ejemplo: dado $A = \{(1;2), (2;-3)\}$, $u = 2.(1;2) + 3.(2;-3) = (8;-5)$ es una combinación lineal del conjunto A.

Combinación lineal convexa

Si la $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \wedge \forall i: \alpha_i > 0$ la combinación lineal es ***convexa***.

Ejemplo: dado A= {(1;2), (2;–3)},

$$u = \frac{1}{3}.(1;2) + \frac{2}{3}.(2;-3) = \left(\frac{5}{3};\frac{-4}{3}\right)$$ es una combinación lineal convexa del conjunto A porque $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ y $\frac{1}{3} > 0$, $\frac{2}{3} > 0$.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE UN CONJUNTO DE VECTORES

El vector nulo se puede expresar como combinación lineal de cualquier conjunto de vectores.
$\vec{0} = 0.u_1 + 0.u_2 + ... + 0.u_n$. Si todos los escalares son nulos la combinación lineal se llama ***trivial***.
Un conjunto de vectores $A=\{u_1;u_2;...;u_n\}\subset V$ es **linealmente independiente** (L.I.) si la única forma de expresar el vector nulo como combinación lineal de ellos es a través de la combinación lineal trivial.

$A = \{u_1;u_2;...;u_n\}\subset V$ es linealmente independiente si: $\vec{0} = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + ... + \alpha_n.u_n$ y $\exists i: \alpha_i = 0$

Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** sí y solo sí al plantear la combinación lineal de los vectores $\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2+...+\alpha_n.u_n$ e igualarla al vector nulo existe algún escalar de dicha combinación no nulo, es decir que existe $\alpha_i \neq 0$. Esto quiere decir que uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Ejemplos: analizar la dependencia lineal de: a) $u_1 = (1;2)$ y $u_2 = (-1;3)$

se forma la combinación lineal y se calculan los α_i:
$\alpha_1.(1;2) + \alpha_2.(-1;3) = (0;0)$
queda un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ que los vectores u_1 y u_2 son linealmente independientes.

b) $u_1 = (1;2)$ y $u_2 = (2;4)$, $\alpha_1.(1;2) + \alpha_2.(2;4) = (0;0)$

queda un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_2$. Por lo tanto existen valores de $\alpha \neq 0$ que satisfacen el sistema, por lo tanto los vectores u_1 y u_2 son linealmente dependientes. Un vector se puede expresar en función del otro, por ejemplo: $u_2 = 2u_1$.

Propiedades

a) A=$\{v\}$ es: L.I. $\Leftrightarrow$ $v \neq \vec{0}$ y L.D. $\Leftrightarrow$ $v = \vec{0}$
b) A=$\{v_1,v_2\}$ es: L.I. $\Leftrightarrow v_1 \neq k.v_2$ y L.D. $\Leftrightarrow v_1 = k.v_2$
c) Si B=$\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es **L.I.** y $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$ entonces B=$\{v_1,v_2,...,v_n,u\}$ es **L.D**.
d) Si un conjunto de vectores contiene como elemento al vector nulo, entonces es L.D. A = $\{v_1,v_2,...,v_n,\vec{0}\}$ es L.D.

SISTEMA DE GENERADORES

Un conjunto no vacío de vectores A = $\{u_1;u_2;...;u_n\}$ de un espacio vectorial $(V;\oplus;K;\odot)$ es un ***sistema de generadores*** de V si $\forall v \in V$, v se puede expresar como combinación lineal de A = $\{u_1;u_2;...;u_n\}$ $\Rightarrow$ $\forall v \in V$: $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i$.

Ejemplo: A = {(1;1), (2;3)} es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$

debemos ver si cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como combinación lineal de A.

$$(x_1;x_2) = \alpha_1.(1;1) + \alpha_2.(2;3)$$

para eso debemos poder expresar los α_i en función de x_1 y x_2. Si esto se puede hacer, quiere decir que cualquier $(x_1;x_2)$ se puede expresar

como combinación lineal de (1;1) y (2;3).

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x_1 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = 3x_1 – x_2$, $\alpha_2 = x_2 – x_1 \Rightarrow (x_1;x_2) = (3x_1–2x_2).\ (1;1) + (x_2–x_1).(2;3)$

Por ejemplo: (5;1) = 13.(1;1) – 4.(2;3)

BASE

A $\subset$ *V* es una base de *V* si A *es sistema de generadores y linealmente independiente*

Ejemplo: A={(1;1), (2;3)} es una base de $\mathbb{R}^2$. Ya vimos que es un sistema de generadores, veremos ahora que es linealmente independiente.

$$\alpha_1 .(1;1) + \alpha_2 . (2;3) = (0;0)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow$$ que los vectores (1;1) y (2;3) son linealmente independientes

Base canónica: si los vectores que la forman son los vectores canónicos.

Ejemplos: B = {(1;0),(0;1)} es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
B = {(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)} es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
B = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{2x2}$.

DIMENSIÓN

Un espacio vectorial es de dimensión ***n*** si existe una base que consta de exactamente ***n*** vectores.

Propiedades: si la dimensión de un espacio es ***n***:

a) B = $\{u_1;u_2;...;u_n\}$ es base sí y sólo sí **B** es **L.I**. o **S.G**.
b) A = $\{u_1;u_2;...;u_n;u_{n+1}\}$ es L.D. y por lo tanto no es base de V.
c) Todas las bases de un espacio vectorial tienen exactamente ***n*** vectores.
d) Si $V=\{\vec{0}\}$, no tiene base y la dim $V = 0$.

Ejemplos: vimos que B={(1;1), (2;3)} es una base de $\mathbb{R}^2$, por lo tanto la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2 por existir una base que tiene dos vectores. Cualquier base de $\mathbb{R}^2$ tiene dos vectores. En general, la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es **n**.

Nota: Una base contiene la menor cantidad de vectores necesarios para generar un espacio vectorial V. Si el conjunto es L.I. pero no S.G., no genera a todos los vectores de V. Si es S.G. pero no L.I. genera a todos pero el conjunto tiene vectores de más, sobran vectores. En este caso se pueden suprimir vectores y el conjunto sigue siendo S.G. Ej.: A = {(1;2), (2;4), (1;3)}. Si se suprime el (2;4), queda B = {(1;2), (1;3)} que sigue siendo S.G.

ESPACIO O SUBESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES

Dado un conjunto de vectores A = $\{u_1;u_2;...;u_n\}\subset V$ se denomina espacio o subespacio generado por A y se designa como $\overline{\mathrm{A}}$, al conjunto formado por todos los vectores que se pueden expresar como combinación lineal del conjunto A.

Ejemplo: determinar el espacio o subespacio generado por
A = $\{(1;2), (2;4)\}\subset \mathbb{R}^2$

$(x_1;x_2) = \alpha_1.(1;2) + \alpha_2.(2;4) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x_1 \\ 2\,\alpha_1 + 4\alpha_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow$ el sistema tiene solución si $x_2 = 2x_1$.

Vemos que el conjunto A genera el subespacio de $\mathbb{R}^2$ / $x_2 = 2x_1$, es decir pares ordenados de la forma $(x_1;2x_1)$. $\overline{A} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 = 2x_1\}$.
Si los vectores de A hubiesen sido L.I. hubiesen generado al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y no a un subespacio de éste, como en este caso.
Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ generan a $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow$ son L.I., de lo contrario generan a un subespacio de éste y en general **n** vectores de $\mathbb{R}^n$ generan a $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ son L.I. y por lo tanto constituyen una ***base*** del mismo; de lo contrario generan a un subespacio de éste.

COORDENADAS DE UN VECTOR

Si B=$\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es una base de $(V;\oplus;K;\odot)$ entonces cada vector v puede expresarse de *modo único* como combinación lineal de la base.

$$v = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + ... + \alpha_n.v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.v_i \Rightarrow \mathrm{v}_{[B]} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{[B]}$$

Los escalares α_i se denominan **coordenadas** del vector v respecto de la base dada.

Demostración

Por ser B una base, genera a V, por lo tanto hay por lo menos un conjunto de escalares (α_i).

Supongamos que existe otro conjunto de escalares (β_i), entonces queda:

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + ... + \beta_n \cdot v_n$$

Restando queda: $(\alpha_1 - \beta_1).v_1 + (\alpha_2 - \beta_2).v_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n).v_n = \vec{0}$, pero como los v_i son L.I., $\alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$ $(\forall i)$, por lo tanto la combinación lineal es única.

Ejemplo

Determinar las coordenadas de v = (–2;3) perteneciente a ($\mathbb{R}^2$;⊕;$\mathbb{R}$;⊙) respecto de la base B={(1;1);(1;0)}. α_1.(1;1) + α_2.(1;0) = (–2;3)

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -2 \\ \alpha_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 3, \alpha_2 = -5 \quad \Rightarrow \mathrm{v}_{[B]} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}_{[B]}$$

Las coordenadas de ***v*** respecto de la base **B** son **3** y **-5**.

Propiedad: si la base es canónica las coordenadas del vector son sus propios componentes.

Ejemplo: B = {(1;0), (0;1)} y v = (4;3), v = 4. (1;0) + 3. (0;1)

$$\Rightarrow \mathrm{v}_{[B]} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_{[B]}$$

REEMPLAZO DE UN VECTOR EN UNA BASE – CAMBIO DE BASE

Dada una base de un espacio vectorial se trata de elegir otro vector del espacio que no pertenezca a la base y sustituir uno de los vectores de la base por éste de tal forma que el nuevo conjunto de vectores siga siendo una base. Hay que determinar qué vector puede salir. Este tema es de suma utilidad, por ejemplo en el método Simplex, ya que el método se basa justamente en partir de una base, e ir sustituyendo un vector a la vez y obtener así nuevas bases.
Para asegurar que el nuevo vector constituye con los que quedaron una nueva base se deben cumplir las siguientes condiciones:

1) Se escribe el vector que se va a introducir como combinación lineal de la base.
2) Se determinan los coeficientes de la combinación lineal y se obtienen así las coordenadas del nuevo vector respecto de la base original.
3) Se determinan las posibles bases que se pueden formar teniendo en cuenta que puede sustituirse cualquier vector cuyo coeficiente en la combinación lineal sea distinto de 0.

Ejemplo

Tenemos la base B = {(1;2;0), (4;3;1), (2;1;5)}, queremos introducir el vector x = (1;5;–5). Debemos ver qué vector puede salir de la base para que los vectores que quedan con el que entra sigan constituyendo una base. Para eso expresamos a x como combinación lineal de la base:
$x = \alpha_1.(1;2;0) + \alpha_2.(4;3;1) + \alpha_3.(2;1;5) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 5 \\ \alpha_2 + 5\alpha_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -1$$

Como $\alpha_2 = 0$, no puede salir (4;3;1). Por lo tanto pueden constituirse dos posibles nuevas bases: B_1={(1;5;–5), (4;3;1), (2;1;5)} y B_2= {(1;2;0), (4;3;1), (1;5;–5)}.

MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

De acuerdo con lo visto sabemos que en un espacio vectorial existen diferentes bases y que en general, las coordenadas de un vector varían cuando se cambia una base por otra.

Veremos ahora como se determinan las coordenadas de un vector cuando se produce un cambio de base. Lo haremos mediante una matriz que denominamos ***matriz de cambio de base***.
Sean A={u_1;u_2;...;u_n} y B={v_1,v_2,...,v_n} dos bases cualesquiera de un espacio vectorial V de dimensión ***n***.

Como todo vector de V se puede expresar como combinación lineal de una base de V, en particular cada vector de la base B se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base A.

$$v_1 = \alpha_{11}.u_1 + \alpha_{21}.u_2 + ... + \alpha_{n1}.u_n = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ .... \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix}_{[A]}$$

$$v_2 = \alpha_{12}.u_1 + \alpha_{22}.u_2 + ... + \alpha_{n2}.u_n = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ .... \\ \alpha_{n2} \end{bmatrix}_{[A]}$$

. . . .

$$v_n = \alpha_{1n}.u_1 + \alpha_{2n}.u_2 + ... + \alpha_{nn}.u_n = \begin{bmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ .... \\ \alpha_{nn} \end{bmatrix}_{[A]}$$

Cada coeficiente tiene dos subíndices. El primero, asociado a cada vector de la base A y el segundo en correspondencia con el vector de la base B.
Por ejemplo el a_{12} es el coeficiente del 1º vector de A (u_1) correspondiente al transformado del 2º vector de B (v_2).
La matriz formada por las coordenadas de los vectores v_i respecto de la base A se llama ***matriz de cambio de base*** de la base B a la base A y se expresa como P_{AB}. Las coordenadas de cada vector constituyen una columna de la matriz de pasaje. Así la matriz de pasaje es:

$$P_{AB} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ . & . & ... & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Propiedad: si P es una matriz de cambio de base en un espacio vectorial V de dimensión ***n***, entonces P es una matriz cuadrada de orden ***n*** no singular.

Veremos ahora como conocido el vector de coordenadas X respecto de la base B es posible hallar, utilizando la matriz de cambio de base P_{AB} el vector de coordenadas X respecto de la base A:

$$X_{[A]} = P_{AB}.X_{[B]}$$

Ejemplo: sean A = {(0;1) y (–1;1)} y B = {(1;2) y (–1;0)} dos bases de $\mathbb{R}^2$. La matriz de cambio de la base B a la base A es P_{AB} y se obtiene hallando las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base A.

$$(1;2) = \alpha_{.11}.(0;1) + \alpha_{.21}.(-1;1) \Rightarrow (1;2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{[A]}$$

$$(-1;0) = \alpha_{.12}.(0;1) + \alpha_{.22}.(-1;1) \Rightarrow (-1;0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{[A]} \Rightarrow P_{AB} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, si un vector de coordenadas X respecto de la base B es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{[B]}$, el vector de coordenadas X respecto de la base A es: $X_{[A]} = P_{AB}.X_{[B]}$ $\Rightarrow X_{[A]} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{[B]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{[A]}$

El problema inverso

Si conociéramos el vector de coordenadas X respecto de la Base A y quisiéramos hallar el vector de coordenadas X respecto de la base B, utilizando la matriz de cambio de base de la matriz A a la matriz B podríamos proceder de forma similar a la anterior y obtendríamos la expresión: $X_{[B]} = P_{BA}.X_{[A]}$.

Propiedad: la matriz P_{BA} es la matriz inversa de la matriz P_{AB}.

$$P_{BA} = (P_{AB})^{-1}$$

EJEMPLO INTEGRADOR

Si $W = \{(x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}^3,\ /\ x_1=x_2 \text{ y } x_3=2x_1\}$ demostrar que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, hallar una base y su dimensión.
Debemos verificar las 4 condiciones de subespacio, luego hallar una base y su dimensión.

a) $W \in \mathbb{R}^3$ por definición, porque es un conjunto formado por ternas ordenadas.

b) $(0;0;0) \in W$ porque $0 = 0$ y $0 = 2.0$.

c) si $x = (x_1;x_2;x_3) \in W$ e $y = (y_1;y_2;y_3) \in W$ debemos probar que $x+y \in W$.

$x+y = (x_1;x_2;x_3) + (y_1;y_2;y_3) = (x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3)$, debemos probar que $x_1+y_1 = x_2+y_2$ y que $x_3+y_3 = 2(x_1+y_1)$. Pero $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$; por ser x e y elementos de W, sumando miembro a miembro queda $x_1+y_1 = x_2+y_2$ y además, por la misma razón, $x_3 = 2x_1$ e $y_3 = 2y_1$, también sumando miembro a miembro queda $x_3 + y_3 = 2x_1 + 2y_1 = 2(x_1+y_1)$, con lo que queda demostrado.

d) si $x = (x_1;x_2;x_3) \in W$, debemos probar que $\alpha.\ (x_1;x_2;x_3) \in W$.
$\alpha.(x_1;x_2;x_3) = (\alpha.x_1;\alpha.x_2;\alpha.x_3)$, debemos probar $\alpha.x_1 = \alpha.x_2$ y que $\alpha.x_3 = 2\alpha.x_1$.
Pero como $x_1=x_2$ y $x_3=2x_1$, multiplicando por α queda que $\alpha.x_1 = \alpha.x_2$, y $\alpha.x_3 = \alpha.2x_1 = 2\alpha.x_1$ con lo que queda demostrado que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Buscamos ahora una base, para lo cual debemos encontrar un conjunto de vectores que sea sistema de generadores de W y L.I.
Para eso debemos expresar un elemento genérico de W en función de la menor cantidad posible de incógnitas: $(x_1;x_2;x_3) = (x_1;x_1;2x_1)$ que se puede expresar como $x_1.(1;1;2)$. Es decir que todo vector que pertenece a W se puede expresar en función de una sola incógnita, por ejemplo de x_1 y éste a su vez se puede expresar como combinación lineal del $(1;1;2)$. Es decir que el vector $(1;1;2)$ genera a W y es por lo tanto un S.G. Además, por ser un elemento único no nulo, es linealmente independiente, por lo tanto $B=\{(1;1;2)\}$ es una base de W y la dimensión del subespacio es 1.

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEOS Y LOS ESPACIOS VECTORIALES

Teorema

El conjuntos de vectores solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es un subespacio de $\mathbb{R}^n$*, donde* ***n*** *es el número de incógnitas del sistema.*

Dem.: Debemos demostrar que si sumamos dos vectores del conjunto solución se obtiene otro vector que también es solución del sistema y que si multiplicamos un vector solución por un escalar se obtiene otro vector que también es solución del sistema.
Sean x y x' dos vectores del conjunto solución $\Rightarrow$ A.x = 0 y A.x'= 0.
Debemos probar que $x+x'$ también es solución:
A.($x + x'$) = A.x + A.x' = 0 + 0 = 0.
Ahora debemos probar que α.x también es solución:
A.(α.x) = α.(A.x) = α.0 = 0.

El subespacio W se denomina espacio solución del sistema A.X = 0.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema, encontrar una base y la dimensión del subespacio vectorial que constituye el conjunto solución.

b) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & -1 & & 0 \\ 1 & -4 & 3 & & 0 \\ \hline 3 & -2 & 1 & & 0 \\ 4 & -1 & 0 & & 0 \\ -8 & 2 & 0 & & 0 \\ \hline -5 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ -4 & 1 & 0 & & 0 \end{array}$$

$$\rho(A) = 2 = \rho(A') < 3 \Rightarrow$$

sistema compatible

El sistema tiene infinitas soluciones. Las variables que intervienen en los vectores canónicos x_2 y x_3 son las *variables principales*, la otra es la variable no principal: x_1.

$S = \{(x_1;4x_1;5x_1)/\ x_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, $(x_1;4x_1;5x_1) = x_1.(1;4;5) \Rightarrow B = \{(1;4;5)\}$, dim S = 1.

LOS POLINOMIOS Y LOS ESPACIOS VECTORIALES

Se llama polinomio a una expresión algebraica racional entera de la forma: $p_n(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$ con $a_n \neq 0$.

El polinomio es de grado n**,** a_n es el coeficiente principal.

Los polinomios y las n-uplas

Un polinomio de grado n se puede asociar a una n-upla de n+1 componentes.

$$p_n(x) = (a_n; a_{n-1}; ...; a_1; a_0)$$

Ejemplo: $p_2(x) = 3x^3 - 2x + 1 = (3;0;-2;1)$

Se puede demostrar así que el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con el polinomio nulo con el cuerpo de los números reales tiene estructura de espacio vectorial.

$(P_n(x);\oplus;\mathbb{R};\odot)$, $\oplus$ es la ley interna en $P_n(x)$ y es la suma de polinomios que equivale a sumar n-uplas. La ley externa $\odot$ es el producto de un número real por un polinomio, equivalente a multiplicar un escalar por una n-upla.

$$(a_n; a_{n-1}; ...; a_1; a_0) \oplus (b_n; b_{n-1}; ...; b_1; b_0) =$$
$$(a_n + b_n; a_{n-1} + b_{n-1}; ...; a_1 + b_1; a_0 + b_0)$$
$$\alpha \odot (a_n; a_{n-1}; ...; a_1; a_0) = (\alpha.a_n; \alpha.a_{n-1}; ...; \alpha.a_o)$$

UNA INTERPRETACIÓN DISTINTA DE LA ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL

Veremos ahora algunas interpretaciones *domésticas* de la estructura de Espacio Vectorial. Algunos de los conceptos que veremos aquí aparecen muy vinculados a la estructura de espacio vectorial, por ejemplo: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, sistema de generadores, base y dimensión.

La combinación lineal

Podemos pensar en elementos que se obtengan a partir de la participación de otros, y así acercarnos al concepto de *combinación lineal.* Podemos pensar al dulce de leche como una *combinación lineal* de la leche y el azúcar, a la mayonesa como una *combinación lineal* del aceite y los huevos; en general, a cualquier elemento como una *combinación lineal* de las partes que lo componen. En este caso los coeficientes son las cantidades con que intervienen. En general podemos decir que cualquier *plato de comida* es una *combinación lineal* de sus ingredientes.

Dependencia e independencia lineal

Un conjunto de elementos es linealmente independiente si ninguno de ellos se puede obtener a partir de los demás. Por el contrario, si algún elemento del conjunto se puede obtener a partir de los otros, ese conjunto de elementos es linealmente dependiente.

Por ejemplo: A={azúcar, leche} es LI., pero B={azúcar, leche, dulce de leche} es L D., ya que el dulce de leche se puede obtener a partir del azúcar y de la leche. Lo mismo ocurre con este caso: A={huevos, aceite} es LI., pero B={ huevos, aceite, mayonesa} es L D.

Sistema de generadores

Un conjunto de elementos A constituye un sistema de generadores de otro conjunto V si cualquier elemento de V se puede expresar como combinación lineal de los elementos de A.

Así podemos pensar que el conjunto (A) de *ingredientes* que un ama de casa tiene en su hogar es un *sistema de generadores* del *conjunto de platos de comida* (*V*) que pueda ofrecer a su familia.

Este concepto podemos trasladarlo a un restaurante. Así el conjunto de ingredientes con que trabaja el cocinero constituye un *sistema de generadores* del menú que ofrece el restaurante.

Si al llegar a un restaurante y pedir un plato éste no estuviese disponible, quiere decir que el conjunto de ingredientes con el que se está trabajando no es un *sistema de generadores*.

Base

Este es otro concepto muy importante vinculado a la estructura de los espacios vectoriales. Decimos que un conjunto es una *base* si es *linealmente independiente* y *sistema de generadores*. Podemos decir que para que un conjunto de ingredientes sea una *base* debe permitir generar todos los platos de comidas (es decir ser sistema de generadores), pero además no debe haber elementos que se puedan obtener a partir de otros. Si un restaurante trabaja con aceite, huevo y mayonesa, no está trabajando con una base, aunque si sea un sistema de generadores.

Si un conjunto de elementos es S.G., pero no es base, quiere decir que hay elementos que sobran, como la mayonesa en el ejemplo anterior. Si es L.I., pero no es base, quiere decir que ese conjunto de elementos no alcanza para generar todos los elementos del conjunto.

Cuando un restaurante trabaja con una base, puede generar todos los platos del menú, pero no repite elementos. Es decir que trabaja con la cantidad mínima de ingredientes necesarios para cumplir con el menú.

Cambio de base

Cambiar la base en un restaurante significa cambiar los ingredientes, pero cumpliendo las condiciones antedichas, poder generar todo el menú sin repetir elementos.

Dimensión

La dimensión evidentemente es la cantidad de ingredientes con los que trabaja el restaurante cuando lo hace con una base.

Otro ejemplo

Estas son simplemente algunas ideas para desestructurar un poco la estructura de Espacio Vectorial y algunos conceptos vinculados a ella. Pero podemos pensar en otros ejemplos.

Si una empresa trabaja con un conjunto de empleados que es una base, quiere decir que trabaja con la cantidad mínima necesaria para poder generar el conjunto de tareas que realiza la empresa. Si el conjunto de empleados es un S.G. pero no L.I., es decir que no es una base, quiere decir que hay tareas que se superponen, sobra gente. (es muy fácil encontrar estos ejemplos en algunas empresas públicas). Si el conjunto de empleados es L.I., pero no S.G., hay tareas que los empleados no alcanzan a realizar.

Si pensamos en las áreas de un gobierno ocurre lo mismo, cuando el conjunto de áreas o funcionarios no es L.I., hay áreas que se superponen, por ejemplo el área de Acción Social, que a veces depende de muchos ministerios o secretarías a la vez. Esta superposición de funciones hace que se pierda eficiencia en el rol que cumplen.

Y así podríamos seguir pensando en otros ejemplos de aplicaciones de estos conceptos a la vida diaria, obviamente con ciertas licencias y sin exigirle a estos ejemplos que cumplan rigurosamente los axiomas vistos.

EJERCICIOS GENERALES RESUELTOS

1) Sea $W = \left\{ A \in \Re^{2x2} \;/\; A = \begin{pmatrix} b & -2a \\ a & 3b \end{pmatrix}, \text{con } a \in \Re \wedge b \in \Re \right\}$

a) verificar si (W; ⊕;K;⊙) es un subespacio de ($\mathbb{R}^{2x2}$; ⊕;K;⊙)

b) en caso afirmativo hallar una base de W y su dimensión.

c) ¿la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ es un elemento de W?

d) en caso afirmativo dar sus coordenadas en la base

$$\mathrm{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) i) $W \subset \mathbb{R}^{2x2}$ por definición de W.

ii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ porque 0 = –2.0 = 0 y 3.0 = 0.

iii) Si $X = \begin{pmatrix} b_1 & -2a_1 \\ a_1 & 3b_1 \end{pmatrix} \in W$ e $Y = \begin{pmatrix} b_2 & -2a_2 \\ a_2 & 3b_2 \end{pmatrix} \in W$ debemos probar que $X + Y = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 & -2a_1 - 2a_2 \\ a_1 + a_2 & 3b_1 + -3b_2 \end{pmatrix} \in W$

debemos probar que $a_1 – 2a_2 = –2.(a_1+a_2)$, y que $3b_1+3b_2 = 3.(b_1+b_2)$. Sacando factor común –2 y 3 respectivamente es fácil ver que ambas relaciones se verifican.

iv) Si $X = \begin{pmatrix} b & -2a \\ a & 3b \end{pmatrix}$, debemos probar que $\alpha.X = \begin{pmatrix} \alpha.b & \alpha.(-2a) \\ \alpha.a & \alpha.3b \end{pmatrix} \in W$.

debemos probar que $\alpha.(–2a) = –2\alpha.a$, y que $\alpha.3b = 3\alpha.b$. Aplicando la propiedad asociativa y conmutativa de la multiplicación de números reales se verifican fácilmente las igualdades.

b) $\begin{pmatrix} b & -2a \\ a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2a \\ a & 0 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ que $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$, es un sistema de generadores de W, por tener 2 elementos no proporcionales es L.I. y por lo tanto constituye una base de W. La dim de $W = 2$.

c) Sí, se puede expresar como combinación lineal de B,

$$A=1.\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}0 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}$$

d) Las coordenadas son $A_{[B]}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

2) Dado el conjunto A = {(3;0;–2), (2;–1;–5)} $\subset \mathbb{R}^3$.
a) ¿A genera $\mathbb{R}^3$?, b) si no, ¿qué subespacio genera? Hallar una base y su dimensión.

Debemos ver que ternas de $\mathbb{R}^3$ se pueden expresar como combinación lineal de A.

$$(x_1;x_2;x_3) = \alpha_1.(3;0;-2) + \alpha_2.(2;-1;-5) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = x_1 \\ -\alpha_2 = x_2 \\ -2\alpha_1 - 5\alpha_2 = x_3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{array}{cc:c} 3 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \\ -2 & -5 & x_3 \\ \hdashline 3 & 0 & x_1+2x_2 \\ 0 & 1 & -x_2 \\ -2 & 0 & x_3-5x_2 \\ \hdashline 0 & 0 & x_1 - \frac{11}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ 0 & 1 & -x_2 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \end{array}$$

Para que el sistema tenga solución se debe verificar que:

$$x_1 - {}^{11}\!/_{2}\, x_2 + {}^{3}\!/_{2}\, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = {}^{11}\!/_{2}\, x_2 - {}^{3}\!/_{2}\, x_3$$

Por lo tanto $\overline{A} = \left\{ \left({}^{11}\!/_{2}\, x_2 - {}^{3}\!/_{2}\, x_3 ; x_2 ; x_3 \right) / \, x_2 \in \Re \wedge x_3 \in \Re \right\}$, $\overline{A}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

$$\left({}^{11}\!/_{2}\, x_2 - {}^{3}\!/_{2}\, x_3 : x_2 ; x_3 \right) = \left({}^{11}\!/_{2}\, x_2 ; x_2 ; 0 \right) + \left(- {}^{3}\!/_{2}\, x_3 ; 0 ; x_3 \right) =$$
$$x_2 . \left({}^{11}\!/_{2} ; 1 ; 0 \right) + x_3 . \left(- {}^{3}\!/_{2} ; 0 ; 1 \right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B} = \left\{ \left({}^{11}\!/_{2} ; 1 ; 0 \right), \left(- {}^{3}\!/_{2} ; 0 ; 1 \right) \right\}$$

es un sistema de generadores de $\overline{\mathrm{A}}$, además, por ser un conjunto formado por dos vectores no proporcionales es L.I., por lo tanto es una base. Dim $\overline{\mathrm{A}} = 2$.

3) Dado el conjunto A = {(1;2;2), (2;1;1), (3;3;k)} $\subset \mathbb{R}^3$,

a) calcular los valores de k para que el subespacio generado por A sea de dimensión 2.

b) indicar una base del mismo.

a) para que el subespacio generado por A sea de dimensión 2 se debe verificar que: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & k \end{vmatrix} = k + 12 + 8 - 6 - 3 - 4k = 0 \Rightarrow k = 3.$

A = {(1;2;2), (2;1;1), (3;3;3)}

b) buscamos una base del subespacio generado por A, para lo cual necesitamos ver que vectores genera A.

$(x_1;x_2;x_3) = \alpha_1.\ (1;2;2) + \alpha_2.\ (2;1;1) + \alpha_3.\ (3;3;3) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = x_1 \\ 2\,\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = x_2 \\ 2\,\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = x_3 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{ccc:c}
1 & 2 & 3 & x_1 \\
2 & 1 & 3 & x_2 \\
2 & 1 & 3 & x_3 \\
\hdashline
1 & 2 & 3 & x_1 \\
0 & -3 & -3 & x_2 - 2x_1 \\
0 & -3 & -3 & x_3 - 2x_1 \\
\hdashline
1 & 0 & 0 & \dfrac{-3x_1 - x_2 + 4x_1}{-3} \\
0 & 1 & 1 & \dfrac{x_2 - 2x_1}{-3} \\
0 & 0 & 0 & \dfrac{-3x_3 + 6x_1 + 3x_2 - 6x_1}{-3}
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ el sistema tiene solución si $-3x_3 + 6x_1 + 3x_2 - 6x_1 = 0$

$x_3 - x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = x_2$.

Vemos que el conjunto A genera el subespacio de $\mathbb{R}^3$ / $x_3 = x_2$, es decir ternas ordenadas de la forma $(x_1;x_2;x_2)$. $\bar{A}=\{(x_1;x_2;x_3)\in \mathbb{R}^3 / x_3 = x_2\}$.

$(x_1;x_2;x_2) = (x_1;0;0) + (0;x_2;x_2) = x_1.(1;0;0) + x_2.(0;1;1)$

$$\Rightarrow B = \{(1;0;0), (0;1;1)\}$$

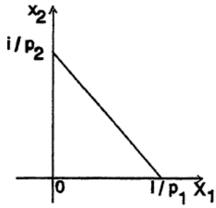
APLICACIONES ECONÓMICAS

Vector de precios – Ecuación presupuestaria – Plano de balance

Dado un conjunto de bienes X_1, X_2,…,X_n, cuyos precios son respectivamente p_1, p_2,…,p_n, el vector precios, como ya vimos, es aquel en el cual aparecen expresados los precios de los distintos bienes: $\vec{p} = (p_1; p_2; ...; p_n)$.
La ecuación de presupuesto es, dado un cierto ingreso I, *que suponemos se gasta en su totalidad*, $x_1.p_1 + x_2.p_2 + … + x_n.p_n = I$, donde x_1, x_2, …,x_n son respectivamente las cantidades de los bienes X_1, X_2,…,X_n, que pueden adquirirse con ese ingreso.

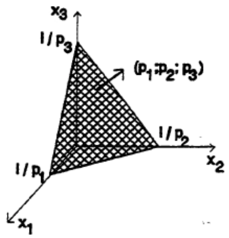
Esta ecuación indica las distintas combinaciones de las cantidades de los bienes que se pueden obtener con un ingreso fijo conocidos sus precios y suponiendo que se utiliza todo el ingreso.

En el caso de dos bienes y dos precios tenemos la ecuación de una recta, que recibe el nombre de *recta de balance o línea de posibilidades de consumo*: $x_1.p_1 + x_2.p_2 = I$.



Vemos que el ingreso, conocidos los precios de los artículos, se puede expresar como combinación lineal de las cantidades de los bienes consumidos.

Si son tres los bienes, tenemos una ecuación presupuestaria que es:
$x_1.p_1 + x_2.p_2 + x_3.p_3 = I$, cuya representación gráfica es un plano que recibe el nombre de *plano de balance,* que en su forma segmentaria es $\frac{x_1}{\frac{I_1}{p_1}} + \frac{x_2}{\frac{I_2}{p_2}} + \frac{x_3}{\frac{I_3}{p_3}} = 1$, donde $\frac{I_i}{p_i}$ representa la



cantidad del bien X_i que se puede obtener si todo el ingreso se utilizara para comprar únicamente ese bien. Geométricamente representa el

punto de intersección del plano de balance (o recta) con cada eje coordenado.

Propiedad

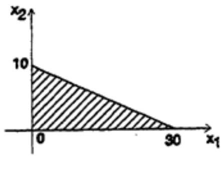
El vector de precios es perpendicular al plano de balance. Esto surge de la ecuación del plano vista en el apéndice ya que los precios son los coeficientes de la ecuación.

Ejemplos

1) Un consumidor tiene un ingreso $I = 3.000$ que quiere destinarlo a la compra de dos bienes cuyos precios son respectivamente p_1=100 y p_2=300. Vamos a obtener: a) el vector de precios, b) las posibles combinaciones de las cantidades de bienes si $I > 0$, c) la recta de balance o línea de posibilidades de consumo, d) el vector posición de cualquiera de sus puntos como combinación lineal de los vectores $\left(\frac{I_1}{p_1};0\right)$ y $\left(0;\frac{I_2}{p_2}\right)$.

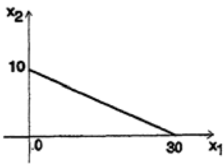
a) $\vec{p} = (100;300)$

b) los puntos se encuentran sobre el semiplano: $100.x_1 + 300.x_2 \leq 3.000$. En ese caso no hay porque utilizar todo el ingreso.



c) $100.x_1 + 300.x_2 = 3.000 \Rightarrow \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{10} = 1$

d) Recordemos que una combinación lineal es convexa si sus coeficientes son no negativos y la suma de los mismos da 1.
Primero debemos obtener esos vectores que son: (30;0) y (0;10)

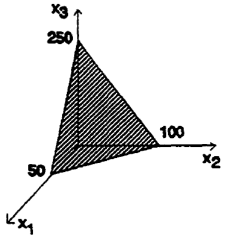


$$(x_1;x_2) = \alpha_1.(30;0) + \alpha_2.(0;10) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30\alpha_1 \\ x_2 = 10\alpha_2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{x_1}{30} \\ \alpha_2 = \frac{x_2}{10} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad (x_1;x_2) = \dfrac{x_1}{30}.(30;0) + \dfrac{x_2}{10}.(0;10)$, que corresponde a una combinación lineal convexa ya que, por la ecuación segmentaria de la recta sabemos que $\dfrac{x_1}{30} + \dfrac{x_2}{10} = 1$.

2) El plano de balance que contiene todos los presupuestos para un gasto de 50.000 correspondiente a tres bienes, en su forma segmentaria es $\dfrac{x_1}{50} + \dfrac{x_2}{100} + \dfrac{x_2}{250} = 1$, vamos a:

a)



b) Para obtener la ecuación presupuestaria debemos primero obtener los precios: $\dfrac{50.000}{p_1} = 50 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 1.000$

$\dfrac{50.000}{p_2} = 100 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 500$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{50.000}{p_3} = 250 \quad \Rightarrow \quad p_3 = 200$

La ecuación presupuestaria es $1.000x_1 + 500x_2 + 200x_3 = 50.000$

c) $\vec{p} = (1.000;500;200)$

3) Un cierto consumidor pretende gastar en el mercado de los productos A, B y C, la cantidad de 1.000 euros. Los precios de los productos en el mercado son: $p_A = 5$, $p_B = 2$, $p_C = 4$. Hallar: a) la ecuación del plano de balance y graficarlo, b) decir si pertenece al plano de balance la combinación: (200;0;0), c) ¿cuál es el significado económico de esta combinación?, d) hallar el vector de precios.

a) $5A + 2B + 4C = 1.000 \;\Rightarrow\; \dfrac{A}{200} + \dfrac{B}{500} + \dfrac{C}{250} = 1$

b) El punto (200;0;0) pertenece al plano de balance.
c) Significa que gasta todo su dinero en consumir el bien A.
d) $\vec{p} = (5;2;4)$.

4) Si el vector de precios es un múltiplo de (6:9;4), una de las posibilidades de consumo es $(x_1;x_2;x_2) = (20;10;15)$ y el ingreso es \$3.240, calcular la ecuación presupuestaria.

El vector de precios es $\vec{p} = (p_1; p_2; p_3) = k.(6:9;4)$. Por lo tanto:
$6k.20 + 9k.10 + 4k.15 = 3.240 \;\Rightarrow\; 270\,k = 3.240 \quad \therefore \quad k = 12$

$\vec{p} = (p_1; p_2; p_3) = (72;108;48)$.

La ecuación presupuestaria es $72x_1 + 108x_2 + 48x_3 = 3.240$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Determinar si los siguientes conjuntos constituyen, con las operaciones indicadas, espacios vectoriales

   a) $(\mathbb{R}^2;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ si:
      i) $(x_1;x_2) \oplus (y_1;y_2) = (x_1+y_1;x_2+y_2) \wedge \alpha\odot(x_1;x_2) = (\alpha.x_1;\alpha.x_2)$
      ii) $(x_1;x_2)\oplus(y_1;y_2) = (x_1+y_1+3;x_2+y_2) \wedge \alpha\odot(x_1;x_2) = (\alpha.x_1-1;\alpha+\alpha.x_2)$

   b) $(\mathbb{R}^3;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ si:
      $(x_1;x_2;x_3) \oplus (y_1;y_2;y_3) = (x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3)$
      $\alpha\odot(x_1;x_2;x_3) = (\alpha.x_1;\alpha.x_2;x_3)$

   c) $(A;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ / $A=\{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3 \;/\; x_1+x_2+x_3 = 0\}$ si $\oplus$ y $\odot$ son la suma habitual de ternas y el producto habitual de un escalar por una terna respectivamente.

2) Dados los siguientes subconjuntos W de $\mathbb{R}^2$, determinar si $(W;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ es subespacio de $(\mathbb{R}^2;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ y representar en el plano

   a) $W_1 = \{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x_2 = 0\}$
   b) $W_2 = \{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x_1-x_2 = 0\}$
   c) $W_3 = \{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \;/ x_1+x_2-1= 0\}$
   d) $W_4 = \{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x_1^2+x_2^2 = 0\}$
   e) $W_5 = \{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x_2 \geq 0\}$
   f) $W_6 = \{(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x_1.x_2 = 1\}$
   g) $W_7 = \{(0;0)\}$

3) Dados los siguientes subconjuntos W de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$, determinar si $(W;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ es subespacio de $(\mathbb{R}^3;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ o $(\mathbb{R}^4;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ respectivamente.

   a) $W_1 = \{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3 \;/\; x_1 = x_3 \wedge x_2 = x_1 + x_3\}$
   b) $W_2 = \{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3 \;/\; 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$
   c) $W_3 = \{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3 \;/\; x_3 = 0\}$
   d) $W_4 = \{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3 \;/\; x_1 + x_2 = 2x_3\}$
   e) $W_5 = \{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3 \;/\; x_1 + 3x_2 - 1 = 0\}$
   f) $W_6 = \{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3 \;/\; x_1+3x_2 = 0 \wedge x_3 = x_2\}$
   g) $W_7 = \{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\mathbb{R}^4 \;/\; x_1 + x_2 = x_3 \wedge x_4 = 2x_1 - x_2\}$
   h) $W_8 = \{(x_1;x_2;x_3;x_4)\in\mathbb{R}^4 \;/\; 3x_1 + x_2 - x_3 = 2x_2 + x_3 = 0\}$

4) Dados los siguientes subconjuntos W de $\mathbb{R}^{2x2}$, determinar si $(W;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ es subespacio de $(\mathbb{R}^{2x2};\oplus;\mathbb{R};\odot)$

a) $W_1=\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Re^{2x2} \;/\; a+b=0 \wedge c=d \right\}$

b) $W_2=\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Re^{2x2} \;/\; |A|=0 \right\}$

c) $W_3=\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Re^{2x2} / \; a=3b \wedge c=d=0 \right\}$

d) $W_4=\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Re^{2x2} / A=A^t \right\}$

5) Si $p_1(x)=x+1$, $p_2(x)=x^2+1$, $p_3(x)=7$ son polinomios pertenecientes a $P_n(x)$, escribir $p(x)$ como combinación lineal de los vectores $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $p_3(x)$ si $p(x)=2x^2+3x+33$.

6) Hallar los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los cuales el vector u es combinación lineal del conjunto A.

a) $u=(k,k^2)$ A = {(1;–1),(–1;1)}
b) $u=(1;2;0)$ A = {(2;1;–1), (2;1+k;k), (2;2;1)}
c) $u=(k;-2;k)$ A = {(1;2;3), (3;2;1)}
d) $U=\begin{pmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{pmatrix}$ A = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

7) Determinar si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o dependientes

i) $V=\mathbb{R}^2$

a) A={(–2;1), (3;–2)}
b) A={(–3;2)}
c) A={(0;0)}
d) A={(3;–5); (–3;5)}
e) A={(–2;1),(2;3),(5;–1)}

ii) $V = \mathbb{R}^3$

a) A={(1;2;4), (3;4;–16),(3;5;–2)} b) A={(1;3;5),(–2;1;4)}
c) A={(1;0;0), (0;2;0), (0;0;3)} d) A={(2;1;–3)}
e) A={(–2;1;–3),(1;2;1),(2;2;2),(–1;1;1)}

iii) $V = \mathrm{P_n}(x)$

a) A = $\{x^3+3x;3x;2x^3+4x\}$ b) A = $\{x+3;2x+5;x^2+1\}$
c) A = $\{x-2x^2;x^2-4x;-7x+8x^2\}$

iv) $V = \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2}$

a) A = $\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

b) A = $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$

8) Indicar en cada caso si el vector u se puede expresar como combinación lineal del conjunto A. Si fuese posible estudiar la unicidad de los coeficientes e indicar la combinación lineal.

a) u = (1;2) A={(1;1),(–2;3)} b) u = (1;2) A={(1;1), (2;2)}
c) u = (5;10) A={(1;2),(2;4)} d) u = (1;2;–3) A={(1;1;3), (2;2;–1)}
e) u = (1;2;–3) A={(1;1;3), (2;2;–1), (0;–1;2)}
f) u = (9;2;7) A={(1;2;–1), (6;4;2)}
g) $U = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ A=$\left\{\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\right\}$
h) $U = \begin{pmatrix}-3 & 2 & 8\\ -1 & 9 & 3\end{pmatrix}$ A=$\left\{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -2 & 3 & -6\end{pmatrix}\right\}$

9) Determinar valores de k para los cuales los siguientes vectores son linealmente independientes

a) $\{(1;k), (2;3)\} \subset \mathbb{R}^2$ b) $\{(1+k;1-k), (1-k;1+k)\} \subset \mathbb{R}^2$
c) $\{(1;2;2), (2;1;1), (3;3;k)\} \subset \mathbb{R}^3$
d) $\{(1;1;1), (k;k;0), (1;0;k)\} \subset \mathbb{R}^3$

10) Indicar para qué valores de a el siguiente sistema de generadores es base de $\mathbb{R}^3$

    $A = \{(2;a+2;0), (3;1;a+3), (a-1;0;0)\} \subset \mathbb{R}^3$

11) Si W = gen $\{(1;2), (3;-1)\}$

    a) encontrar un vector de W diferente de $(1;2)$ o $(3;-1)$
    b) ¿cuántos vectores hay en W?
    c) ¿cuántos vectores hay en $\{(1;2), (3;-1)\}$?
    d) describir geométricamente a W
    e) ¿pertenece $(5;-4)$ a W?
    f) expresar cualquier vector de W como combinación lineal de $\{(1;2), (3;-1)\}$

12) Si W = gen $\{(1;2), (3;6)\}$

    a) encontrar un vector de W diferente de $(1;2)$ o $(3;6)$
    b) ¿cuántos vectores hay en W?
    c) ¿cuántos vectores hay en $\{(1;2), (3;6)\}$?
    d) describir geométricamente a W
    e) ¿pertenece $(5;-4)$ a W?
    f) expresar cualquier vector de W como combinación lineal de $\{(1;2)\}$

13) Demostrar que los vectores $u_1=(0;1;0)$ y $u_2=(0;0;1)$ generan el espacio $W=\{(0;a;b) \,/\, a\in\mathbb{R} \wedge b\in\mathbb{R}\}$.

14) De los conjuntos indicados en los ejercicios 2, 3 y 4 que sean subespacios de los mismos indicar una base y su dimensión.

15) Hallar espacio generado por A en cada caso, indicar una base y su dimensión.

    a) $A=\{(2;-3)\}\subset\mathbb{R}^2$ b) $A=\{(1;1;1), (-1;2;3), (0;3;4)\}\subset\mathbb{R}^3$

c) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2x2}$

d) $A = \{(1;2;0;3), (3;2;0;1), (1;1;0;1)\} \subset \mathbb{R}^4$

16) Sea $W = \{(x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \wedge 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$. Probar que $(W;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ es subespacio de $(\mathbb{R}^3;\oplus;\mathbb{R};\odot)$. Hallar una base de W y su dimensión.

17) Dado $(\mathbb{R}^{2x1};\oplus;\mathbb{R};\odot)$, hallar las coordenadas de $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

18) Sea $S = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2x2} \,/\, A = \begin{pmatrix} b & a\sqrt{2} \\ a & 3b \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$

a) verificar que $(S;\oplus;\mathbb{R};\odot)$ es un subespacio de $(\mathbb{R}^{2x2};\oplus;\mathbb{R};\odot)$

b) hallar una base de S y su dimensión

c) ¿la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ es un elemento de S?

d) en caso afirmativo dar sus coordenadas en la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \sqrt{6} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

19) ¿Es $S = \{A \in \mathbb{R}^{3x3} \,/\, A \text{ es antisimétrica} \wedge a_{12} + 2a_{13} - 4a_{23} = 0\}$ subespacio de $(\mathbb{R}^{3x3};\oplus;\mathbb{R};\odot)$? Si lo es hallar una base y su dimensión.

20) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & k & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, a) hallar k para que $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea combinación lineal de las columnas de A, b) para los valores de k hallados en a), ¿cómo resulta $A.X = B$?

21) Dado el conjunto A = {(3;0;–2),(2;–1;–5)}. a) ¿A genera a $\mathbb{R}^3$?, b) si no, ¿qué subespacio de $\mathbb{R}^3$ genera?

22) Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{3x3}$ son subespacios de ($\mathbb{R}^{3x3}$;⊕;$\mathbb{R}$;⊙). En caso de serlo, indicar una base y su dimensión.

a) Matrices simétricas b) Matrices antisimétricas
c) Matrices diagonales d) Matrices triangulares inferiores
e) Matrices triangulares superiores

23) Demostrar que:

a) $\{v_1;k.v_1\}$ es L.D.
b) si $\{v_1;v_2\}$ es L.I. entonces $\{v_1+v_2;v_2\}$ es L.I.
c) $\{v_1\}$ es L.I. $\Leftrightarrow v_1 \neq \vec{0}$ y es L.D. $v_1 = \vec{0}$
d) si $\{v_1;v_2;v_3\}$ es L.I. entonces $\{v_1;v_2+a.v_3;v_3+b.v_2\}$ es L.I. si $a.b\neq 1$

24) Dados lo siguientes sistemas de ecuaciones lineales hallar el conjunto solución, determinar si los mismos son un subespacio de ($\mathbb{R}^3$;⊕;$\mathbb{R}$;⊙), indicar una base y su dimensión.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

25) Hallar los valores de k para los que el conjunto generado por A tiene dimensión 3. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \right\}$

26) Dado el conjunto $A = \left\{ ax^2 - ax + 4; -x^2 + x - a; x^2 - x + a \right\}$, a) calcular los valores de a para que el subespacio de $p_2[x]$ generado por este conjunto sea de dimensión 1, b) hallar uno de dichos subespacios e indicar una base del mismo, c) indicar si existen valores de a para que el subespacio sea de dimensión 2.

27) Dada la base B= {(1;0;1),(2;–1;4),(0;0;2)} de $\mathbb{R}^3$, determinar cuáles son las posibles nuevas bases que se pueden formar si se cambia la base introduciendo el vector x = (2;–1;8) en la base B.

28) Dada las bases A= {(0;1),(–1;1)} y B = {(0;1),(–1;1)} de $\mathbb{R}^2$, a) obtenga la matriz de cambio de base P_{AB}, b) determine los coordenadas del vector $X_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en la base B.

29) Dado el conjunto $A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$, hallar los valores de k para que A sea una base de las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{2x2}$.

30) Un consumidor tiene un ingreso $3.000 y lo destina a la compra de dos bienes, cuyo vector de precios es $\vec{p} = (150;200)$. Hallar y representar: a) la recta de balance de consumo y obtener el vector posición de cualquiera de sus puntos como combinación lineal convexa de los vectores $\left(\frac{I}{p_1};0 \right)$ y $\left(0;\frac{I}{p_2} \right)$ si consume todo el ingreso, b) el semiplano de posibilidades si no consume todo su ingreso.

31) El plano balance que contiene todos los presupuestos con un gasto de $45.000 para la adquisición de tres bienes en su forma segmentaria es: $\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{10} + \frac{x_3}{20} = 1$. a) representarlo, b) escribir la ecuación presupuestaria, c) hallar el vector de precios.

32) El plano balance que contiene todos los presupuestos con un gasto de $600 para la adquisición de tres bienes en su forma segmentaria es: $\frac{x_1}{25} + \frac{x_2}{40} + \frac{x_3}{z} = 1$. a) hallar k para si una posibilidades consumo es (5;22;3), b) escribir la ecuación presupuestaria que resuelta en la forma implícita.

RESPUESTAS

1) a) i) sí, ii) no, no cumple con que el 1 es neutro
 b) no, no cumple con la distributividad respecto de la suma de escalares, c) sí
2) a) sí, b) sí, c) no, d) sí, e) no, f) no, g) sí
3) a) sí, b) sí, c) sí, d) sí, e) no, f) sí, g) sí, h) sí,
4) a) sí, b) no, c) sí, d) sí
5) $2x^2 + 3x + 33 = 3.(x+1) + 2.(x^2+1) + 4.7$
6) a) $k = 0$, $k = -1$, b) $k \neq 1$, c) $k = -2$, d) $k = 1$
7) i) a) L.I., b) L.I., c) L.D., d) L.D., e) L.D.
 ii) a) L.D., b) L.I., c) L.I., d) L.I., e) L.D.
 iii) a) L.D., b) L.I., c) L.D.
 iv) a) L.I., b) L.I.
8) a) $(1;2) = \frac{7}{5}.(1;1) + \frac{1}{5}.(-2;3)$ b) no se puede,
 c) $(5;10) = (5-2k).(1;2) + k.(2;4)$, $k \in \mathbb{R}$, la combinación lineal no es única.
 d) no se puede
 e) $(1;2;-3) = -\frac{1}{7}.(1;1;3) + \frac{4}{7}.(2;2;-1) - 1.(0;-1;2)$
 f) $(9;2;7) = -3.(1;2;-1) + 2.(6;4;2)$
 g) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 5.\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 4.\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
 h) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$
9) a) $k \neq \frac{3}{2}$, b) $k \neq 0$, c) $k \neq 3$, d) $k \neq 0$ 10) $a \neq 1$, $a \neq -2$, $a \neq -3$
11) a) cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ b) infinitos c) 2
 d) todo el plano $(x_1;x_2)$ e) sí
 f) $(x_1;x_2) = \dfrac{x_1 + 3x_2}{7}(1;2) + \dfrac{2x_1 - x_2}{7}(3;-1)$
12) a) cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ de la forma $x_2 = 2x_1$ b) infinitos
 c) 2 d) la recta $x_2 = 2x_1$ e) no f) $(x_1;x_2) = x_1.(1;2)$
13) $(0;a;b) = a.(0;1;0) + b.(0;0;1)$
14) 2) a) B = {(1;0)}, dim $W_1 = 1$, b) B = {(1;1)}, dim $W_2 = 1$,
 d) = g) no tiene base, dim = 0

3) a) B = {(1;2;1)}, dim W_1 = 1,
b) B = {(1;0;2), (0;1;1)}, dim W_2 = 2,
c) B = {(1;0;0), (0;1;0)}, dim W_3 = 2
d) B = {(1;–1;0), (0;2;1)}, dim W_4 = 2,
f) B = {(–3;1;1)}, dim W_6 = 1
g) B = {(1;0;1;2), (0;1;1;–1)}, dim W_7 = 2,
h) B = {(1;–1;2;0), (0;0;0;1)}, dim W_8 = 2

4) a) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, dim W_1 = 2

c) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, dim W_3 = 1

d) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, dim W_4 = 3

15) a) $\overline{A} = \{(x_1;x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 = -\frac{3}{2} x_1\} = \{(x_1; -\frac{3}{2} x_1) / x_1 \in \Re\}$,

$B = (1; -\frac{3}{2})$, dim $\overline{A}$ =1

b) $A = \{(x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 4x_2 - 3x_3\} =$
$= \{(4x_2 - 3x_3; x_2; x_3) / x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$

B = {(4;1;0); (–3;0;1)}, dim $\overline{A}$ =2

c) $\overline{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{2}{3} b & 0 \end{pmatrix} / a \in \Re \wedge b \in \Re \right\}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \right\}$,

dim $\overline{A}$ = 2

d) $\overline{A} = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_4 = -x_1 + 2x_2 \wedge x_3 = 0\}$
$= \{(x_1;x_2;0;-x_1+2x_2) / x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$

B = {(1;0;0;–1), (0;1;0;2)}, dim $\overline{A}$ = 2

16) B = {(1;0;–1)}, dim W = 1

17) $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

18) b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$, dim S = 2, c) sí, para $a = 2$, b = 1.

d) $\begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{9-2\sqrt{3}}{36} \end{pmatrix}$

19) Sí, es subespacio, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, dim S = 2

20) $k \neq 1$, el sistema es compatible indeterminado.

21) No, $\overline{A} = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \in \Re^3 \,/\, x_1 = \frac{11}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \right\} =$

$= \left\{ \left(\frac{11}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3; x_2; x_3 \right) / \, x_2 \in \Re \wedge x_3 \in \Re \right\}$

22) a) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

dim $M_S = 6$

b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. dim $M_{AS} = 3$

c) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. dim $M_D = 3$

d) $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

dim $M_{TI} = 6$

e) $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

dim $M_{TS} = 6$

24) a) $S=\{(-10x_1;7x_1;5x_1)/\ x_1\in\mathbb{R}\}$, $B=\{(-10;7;1)\}$, dim S = 1

b) $S=\{(x_1;4x_1;5x_1)/\ x_1\in\mathbb{R}\}$, $B=\{(1;4;5)\}$, dim S = 1 25) $k\neq 7$

26) a) $a=\pm 2$, b) $S=\{p_2[x]=\alpha.(2x^2-2x+4)\}$, dim S=1, $B=\{(2x^2-2x+4)\}$

c) $a\in\mathbb{R}-\{2;-2\}$.

27) $B_1=\{(1;0;1),(2;-1;8),(0;0;2)\}$ $B_2=\{(1;0;1),(2;-1;4),(2;-1;8)\}$

28) a) $P_{AB}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}$. b) $X_B=\begin{pmatrix}3/2\\7/2\end{pmatrix}$

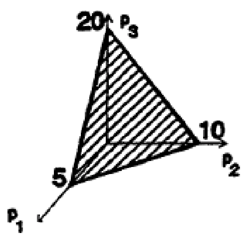
29) $k\neq 7/6$.

30) a) $150x_1+200x_2=3.000$ o $\dfrac{x_1}{20}+\dfrac{x_2}{15}=1$,

$$(x_1;x_2)=\frac{x_1}{20}.(20;0)+\frac{x_2}{15}.(0;15)$$

b) $150x_1+200x_2\leq 3.000$

31) b) $9.000x_1+4.500x_2+2.250\,x_3=45.000$ a)



c) $\vec{p}=(9.000;4.500;2.250)$

32) a) $k=12$, b) $24x_1+15x_2+50x_3=600$

Capítulo 5

Transformaciones Lineales

Definición de transformación lineal. Propiedades y ejemplos.

Núcleo e imagen.

Clasificación: isomorfismos, epimorfismos, endomorfismos, automorfismos.

Composición de transformaciones lineales.

Transformación lineal inversa.

Teorema fundamental de las transformaciones lineales.

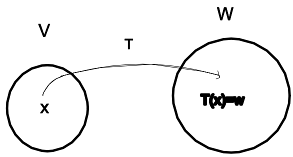
Matriz asociada a una transformación lineal.

Espacio vectorial de las transformaciones lineales.

Aplicaciones económicas: transformación del vector de producción en un vector de insumos.

TRANSFORMACIONES LINEALES

Definición



Sean $(V,\oplus,K,\odot)$ y $(W,\oplus,K,\odot)$ dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, una función T: $V \to W$ es una ***transformación lineal*** si cumple con las siguientes condiciones:

a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$ $\forall x \in V$, $\forall y \in V$
b) $T(\alpha.x) = \alpha.T(x)$ $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in K$, $T(x) \in W$ y $T(y) \in W$

V es el espacio ***dominio*** o de partida y W es el espacio ***de llegada.***

Ejemplos

1) Sean $(\mathbb{R}^3,\oplus,\mathbb{R},\odot)$ y $(\mathbb{R}^2,\oplus,\mathbb{R},\odot)$, vemos si las siguientes funciones son T.L.

a) $T(x_1;x_2;x_3) = (x_1-x_2;x_2-x_3)$

i) $T[(x_1;x_2;x_3) + (y_1;y_2;y_3)] = T(x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3) =$
$= (x_1+y_1-x_2-y_2;x_2+y_2-x_3-y_3) = (x_1-x_2;x_2-x_3) + (y_1-y_2;y_2-y_3) =$
$= T(x_1;x_2;x_3) + T(y_1;y_2;y_3)$

vemos que se verifica la 1º condición

ii) $T(\alpha.x) = T[\alpha.(x_1;x_2;x_3)] = T(\alpha.x_1;\alpha.x_2;\alpha.x_3) =$
$= (\alpha.x_1-\alpha.x_2;\alpha.x_2-\alpha.x_3) = \alpha.(x_1-x_2;x_2-x_3) = \alpha.T(x_1;x_2;x_3)$

vemos que también se verifica la 2º condición por lo tanto T es una T.L.

b) $T(x_1;x_2;x_3) = (x_1-x_3;x_2-x_3+1)$

i) $T[(x_1;x_2;x_3) + (y_1;y_2;y_3)] = T(x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3) =$
$= (x_1+y_1-x_3-y_3;x_2+y_2-x_3-y_3+1)$ (1)

ii) $T(x_1;x_2;x_3) + T(y_1;y_2;y_3) = (x_1-x_3;x_2-x_3+1) + (y_1-y_3;y_2-y_3+1) =$
$= (x_1-x_3+y_1-y_3;x_2-x_3+y_2-y_3+2)$ (2)

(1) $\neq$ (2) $\Rightarrow$ T no es T.L.

2) ***Transformación cero (o nula)***

T: $V \to W$ / $T(v) = 0_w$ (elemento neutro en W), para todo $v \in V$ es una T.L.

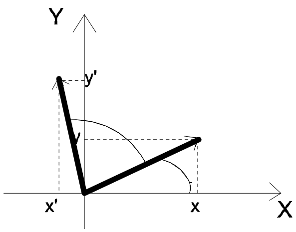
a) $T(v_1+v_2) = 0_w = 0_w + 0_w = T(v_1) + T(v_2)$
b) $T(\alpha.v) = 0_w = \alpha.0_w = \alpha.T(v)$

3) ***Transformación identidad***

T: $V \to V$ / $T(v) = v$ es una transformación lineal

a) $T(v_1+v_2) = v_1 + v_2 = T(v_1) + T(v_2)$ b) $T(\alpha.v) = \alpha.v = \alpha.T(v)$

4) ***Transformación de rotación***



Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rota en el plano ***xy*** un ángulo

$\boldsymbol{\alpha}$, se obtiene $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$x = r.\cos\beta$ $y = r.\operatorname{sen}\beta$

$x' = r.\cos(\alpha+\beta) = r.\cos\alpha.\cos\beta - r.\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta = x.\cos\alpha - y.\operatorname{sen}\alpha$
$y' = r.\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = r.\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + r.\operatorname{sen}\beta.\cos\alpha = x.\operatorname{sen}\alpha + y.\cos\alpha$

Se obtiene así la transformación lineal que caracteriza a una rotación. Se puede expresar en forma matricial.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La transformación queda entonces: $T(v) = A_\alpha.v$, donde A_α es la matriz de rotación de ángulo $\boldsymbol{\alpha}$. Se puede demostrar que corresponde a una transformación lineal.

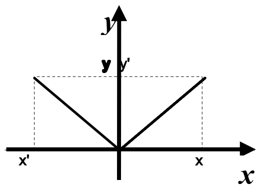
5) ***Operador de transposición***

T: $\mathbb{R}^{mxn} \rightarrow \mathbb{R}^{mxn}$ / $T(A) = A^t$ es otro ejemplo de T.L.
T se denomina operador de transposición.

a) $T(A+B) = (A+B)^t = A^t + B^t = T(A) + T(B)$
b) $T(\alpha.A) = (\alpha.A)^t = \alpha.A^t = \alpha.T(A)$, por propiedades vistas en el capítulo de matrices.

6) ***Transformación de reflexión respecto del eje y***

Sea T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$, se puede demostrar fácilmente que es una transformación lineal. A cada vector de $\mathbb{R}^2$ le hace corresponder como imagen otro vector de $\mathbb{R}^2$ que es el reflejado (o simétrico) respecto del eje y.



Propiedades

Sea T: $V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces se verifica que:

1) $T(0_v) = 0_w$ *el transformado del neutro en V es el neutro en W.*

Dem.: $T(0_v) = T(0.v) = 0.\ T(v) = 0.w = 0_w$

2) $T(-v) = -T(v)$ *el transformado del opuesto es el opuesto del transformado*

Dem.: $T(-v) = T(-1.v) = -1.T(v) = -T(v)$

3) $\forall u \in V, \forall v \in V$: $T(u-v) = T(u) - T(v)$

Dem.: $T(u-v) = T[u+(-v)] = T(u) + T(-v) = T(u) - T(v)$
(por prop. 2)

4) Si $\{v_1,v_2,...,v_n\} \subset V$ y $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\} \subset K \Rightarrow$

$$T(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + ... + \alpha_n.v_n) = \alpha_1.T(v_1) + \alpha_2.T(v_2) + ... + \alpha_n.T(v_n)$$

Esta propiedad se demuestra por el principio de inducción completa (ver capítulo introductorio)

n=2 $T(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2) = T(\alpha_1.v_1) + T(\alpha_2.v_2) = \alpha_1.T(v_1) + \alpha_2.T(v_2)$ se verifica

n=h

$$T(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + ... + \alpha_h.v_h) = \alpha_1.T(v_1) + \alpha_2.T(v_2) + ... + \alpha_h.T(v_h)$$

n=h+1

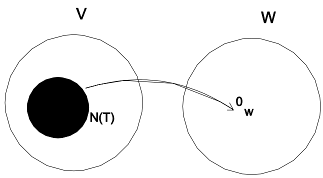
$$T(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + ... + \alpha_h.v_h + \alpha_{h+1}.v_{h+1}) =$$
$$= \alpha_1.T(v_1) + \alpha_2.T(v_2) + ... + \alpha_h.T(v_h)+\alpha_{h+1}.T(v_{h+1})$$

Dem.:

$$T(\alpha_1.v_1+\alpha_2.v_2+...+\alpha_h.v_h+\alpha_{h+1}.v_{h+1}) =$$
$$= T(\alpha_1.v_1+\alpha_2.v_2+...+\alpha_h.v_h) +T(\alpha_{h+1}.v_{h+1})$$
$$= \alpha_1.T(v_1) + \alpha_2.T(v_2) + ... + \alpha_h.T(v_h) + \alpha_{h+1}.T(v_{h+1})$$

NÚCLEO DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Definición



Consideramos una T.L. T: $V \rightarrow W$, se denomina núcleo de la T.L. al conjunto de vectores de V cuyas imágenes son el vector nulo en W (0_w).

☞ $$\boxed{N(T) = Ker\,(T)^{*} = \{v \in V \,/\, T(v) = 0_w\}}$$

Propiedad

El núcleo de toda transformación lineal entre dos espacios vectoriales, de $V \rightarrow W$, es un subespacio de V.

Hipótesis: T: $V \rightarrow W$ es una T.L.
Tesis: $(N(T);\oplus;K;\odot)$ es un subespacio de $(V;\oplus;K;\odot)$

Demostración

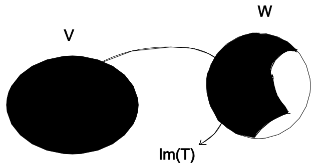
a) $N(T) \subset V$ por definición de N(T)
b) $N(T) \neq \phi$ ya que $0_v \in N(T)$ pues $T(0_v) = 0_w$
c) $x \in N(T) \wedge y \in N(T) \Rightarrow T(x) = 0_w \wedge T(y) = 0_w \Rightarrow T(x) + T(y) = 0_w$
$\Rightarrow T(x+y) = 0_w \ \therefore \ (x + y) \in N(T)$
d) $\alpha \in K \wedge x \in N(T) \Rightarrow \alpha \in K \wedge T(x) = 0_w \Rightarrow \alpha.T(x) = \alpha.0_w = 0_w$
$\Rightarrow T(\alpha.x) = 0_w \ \therefore \ (\alpha.x) \in N(T)$

---

* La denominación **Ker** se debe al término alemán Kern (médula o núcleo).

IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Se denomina imagen de una T.L. T: $V \to W$ al conjunto de vectores de W que son imagen de algún vector de V.



☞ $$\boxed{\text{Im (T)} = \{w \in W \ / \ \exists\, v \in V \wedge T(v) = w\}}$$

Propiedad

La imagen de toda transformación lineal entre dos espacios vectoriales, de $V \to W$, es un subespacio de W.

Hipótesis T: $V \to W$ es una T.L.
Tesis (Im(T); $\oplus$;K;$\odot$) es un subespacio de (W;$\oplus$;K;$\odot$)

Demostración

a) Im(T) $\subset W$ por definición de Im(T)
b) Im(T) $\neq \phi$ ya que $0_w \in$ Im(T) pues $T(0_v) = 0_w$
c) $u \in \text{Im(T)} \wedge v \in \text{Im(T)} \Rightarrow \exists x \wedge \exists y \in V \,/\, T(x) = u \wedge T(y) = v \Rightarrow$
$T(x) + T(y) = u + v \Rightarrow T(x + y) = u + v \wedge (x + y) \in V \Rightarrow$
$(u + v) \in \text{Im(T)}$
d) $\alpha \in K \wedge u \in \text{Im(T)} \Rightarrow \alpha \in K \wedge T(x) = u \wedge x \in V \Rightarrow$
$\alpha.T(x) = \alpha.u \Rightarrow T(\alpha.x) = \alpha.u \wedge \alpha.x \in V \Rightarrow \alpha.u \in \text{Im(T)}$

Nulidad y rango de una transformación lineal

nulidad (T) = n(T) = dim N(T)
rango de (T) = r(T) = dim Im(T)

Teorema de la dimensión

Dada T: $V \to W$, la suma de las dimensiones del núcleo y de la imagen de T es igual a la dimensión de V (siempre que éste sea un espacio vectorial de dimensión finita).

☞ $$\boxed{dim\, N(T) + dim\, Im(T) = dim\, V}$$

Determinación del núcleo, la imagen, la nulidad y el rango

Ejemplos: hallar N(T), Im(T), la base y la dimensión de los respectivos subespacios si T:

a) T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / T $(x_1; x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

$$\text{N(T)} = \left\{ (x_1; x_2) / T\,(x_1; x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si $(x_1; x_2) \in \text{N(T)} \Rightarrow \text{T}(x_1; x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow \text{N(T)}=\{(x_1,-x_1) / x_1 \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Im (T)} = \{A \in \mathbb{R}^{2x2} / \text{T}(x_1;x_2) = A\}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Im}(T) \Rightarrow \exists (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 / \text{T}(x_1; x_2) = A$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = a \wedge x_1 + x_2 = d \wedge c = b = 0 \Rightarrow a = d = x_1 + x_2 \wedge c = b = 0$

$\Rightarrow \text{Im(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} / a \in \Re \right\}$

Base de N(T)

$(x_1;-x_1) = x_1.(1;-1) \Rightarrow$ B = {(1;–1)} es un sistema de generadores, además es L.I. por estar formado por un único vector no nulo, por lo tanto es una base, dim N(T) = 1 ⇒ n(T) = 1.

Base de Im(T)

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{B}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es un sistema de generadores, además es L.I. por estar formado por un único vector no nulo, por lo tanto es una base, dim Im(T) = 1 ⇒ r(T) = 1

n(T) + r(T) = 1 + 1 = 2 = dim $\mathbb{R}^2$
(se verifica el teorema de la dimensión)

b) T es la transformación identidad, T: $V \rightarrow V$ / T $(v) = v$, $\forall v \in V$

N(T) = $\{0_v\}$, no tiene base, dim N(T) = 0 ⇒ n(T) = 0
Im(T) = V, base de Im(T)=$\{v_1,v_2, ...,v_h\}$, dim Im(T) = n ⇒ r(T) = n.

n(T) + r(T) = 0 + n = n = dim V. Más ejemplos resueltos al final del capítulo.

CLASIFICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Si T es una T.L. de $V \rightarrow W$, T es una función que puede ser:

inyectiva ⇔ T es una ***monomorfismo***
sobreyectiva ⇔ T es un ***epimorfismo***
biyectiva ⇔ T es un ***isomorfismo***

Si T: $V \rightarrow V$, (es una T.L. de un espacio vectorial en sí mismo) entonces se denomina ***endomorfismo*** y cuando éste es biyectivo, tenemos un ***automorfismo***.

T es inyectiva $\Leftrightarrow \forall x \in V, \forall y \in V$: $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$.
T es sobreyectiva $\Leftrightarrow \forall w \in W, \exists x \in V$: $T(v) = w \Rightarrow \mathrm{Im}(T) = W$.

Ejemplo:

Sea T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $T(x_1; x_2; x_3) = (x_2; -x_1; x_3)$, probar que es un automorfismo.

1. Debemos verificar que es una T.L.

a) $T(x+y) = T[(x_1; x_2; x_3) + (y_1; y_2; y_3)] =$
$T[(x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)] = (x_2 + y_2; -x_1 - y_1; x_3 + y_3) =$
$= (x_2; -x_1; x_3) + (y_2; -y_1; y_3) = T(x_1; x_2; x_3) + T(y_1; y_2; y_3) =$
$= T(x) + T(y)$

b) $T(\alpha.x) = T[\alpha.(x_1; x_2; x_3)] = T[(\alpha.x_1; \alpha.x_2; \alpha.x_3)] = (\alpha.x_2; -\alpha.x_1; \alpha.x_3)$
$= \alpha.(x_2; -x_1; x_3) = \alpha.\, T(x_1; x_2; x_3) = \alpha.T(x)$

2. Debemos verificar que es biyectiva.

a) inyectiva

$\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall y \in \mathbb{R}^3$: $T(x) = T(y) \Rightarrow T(x_1; x_2; x_3) = T(y_1; y_2; y_3)$
$\Rightarrow (x_2; -x_1; x_3) = (y_2; -y_1; y_3) \Rightarrow x_2 = y_2 \wedge x_1 = y_1 \wedge x_3 = y_3$
$\Rightarrow (x_1; x_2; x_3) = (y_1; y_2; y_3) \Rightarrow x = y$

b) sobreyectiva

$\forall w \in \mathbb{R}^3, \exists x \in \mathbb{R}^3$ / $T(x) = w \Rightarrow T(x_1; x_2; x_3) = (x_2; -x_1; x_3) =$
$= (w_1; w_2; w_3) \Rightarrow x_2 = w_1 \wedge x_1 = -w_2 \wedge x_3 = w_3$
$\Rightarrow \forall (w_1; w_2; w_3) \in \mathbb{R}^3\ \exists (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 = (-w_2; w_1; w_3)$/
$T(x_1; x_2; x_3) = T(-w_2; w_1; w_3) = (w_1; w_2; w_3)$.

Con lo que queda demostrado que T es un automorfismo de $\mathbb{R}^3$.

Propiedades

a) Del núcleo de un monomorfismo

T: *$V \rightarrow W$ es una T.L. inyectiva $\Leftrightarrow$ el único elemento del núcleo es el vector nulo de V.*
Es decir que T: *$V \rightarrow W$ es una T.L. inyectiva $\Leftrightarrow$ N(T)=*$\{0_v\}$

Primero demostramos que si T es inyectiva entonces $N(T)=\{0_v\}$

H) T: $V \rightarrow W$ es inyectiva (es un monomorfismo)
T) $N(T)= \{0_v\}$

Dem.: para demostrar la tesis debemos probar que: a) $\{0_v\} \subset N(T)$ $\wedge$ b) $N(T) \subset \{0_v\}$

a) $T\{0_v\} = 0_w \Rightarrow 0_v \in N(T)$, por lo tanto $\{0_v\}\subset N(T)$
b) Si $x \in N(T) \Rightarrow T(x) = 0_w$, $T(x) = T(0_v) \Rightarrow x = 0_v$ (por ser T inyectiva), por lo que $x \in \{0_v\} \Rightarrow N(T) \subset \{0_v\}$.

Ahora falta demostrar que si $N(T)= \{0_v\}$, entonces T es inyectiva.

H) T: $V \rightarrow W$ es una T. L. $\wedge$ $N(T) = \{0_v\}$
T) T es inyectiva ($\forall x\in V, \forall y\in V$: $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$)

Dem.: $T(x) = T(y) \Rightarrow T(x) - T(y) = 0_w \Rightarrow T(x - y) = 0_w$.
Por lo tanto $(x - y)\in N(T) =\{0_v\} \Rightarrow x - y = 0_v \therefore x = y$.

Con lo cual queda demostrado que T es un monomorfismo sí y sólo sí $N(T) = \{0_v\}$.

Nota: esta propiedad permite investigar la inyectividad con sólo analizar el núcleo.

b) De la imagen de un conjunto de vectores linealmente independiente

Si T: *$V \rightarrow W$ es una T.L. y $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ es un conjunto de vectores de V linealmente dependiente, entonces su imagen es un conjunto de vectores linealmente dependiente en W.*

H) T: $V \rightarrow W$ es una T.L.y $\{v_1; v_{2;\ldots;}\, v_n\} \subset V$ es L.D.
T) $\{T(v_1); T(v_2); \ldots; T(v_n)\} \subset W$ es L.D.
es decir, $(\alpha_1.T(v_1) + \alpha_2.T(v_2) + \ldots + \alpha_n.T(v_n) = 0_w \wedge \exists i \,/\, \alpha_i \neq 0)$

Dem.:

$\{v_1; v_{2;\ldots;}\, v_n\}$ es L.D $\Rightarrow \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n = 0_v \wedge \exists i \,/\, \alpha_i \neq 0$

aplicando T queda: $T(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n) = T(0_v) = 0_w$

por ser una T.L. queda: $\alpha_1.T(v_1) + \alpha_2.T(v_2) + \ldots + \alpha_n.T(v_n) = 0_w$

llamando $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, …, $T(v_n) = w_n$, queda:

$\alpha_1.w_1 + \alpha_2.w_2 + \ldots + \alpha_n.w_n = 0_w$ con $\alpha_i \neq 0$

por lo que $\{T(v_1), T(v_2),\ldots,T(v_n)\}$ es L.D.

c) De los vectores cuyas imágenes son un conjunto linealmente independiente

Si T: *$V \rightarrow W$ es una T.L.y $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ es un conjunto de vectores de V tales que sus imágenes constituyen un conjunto de vectores linealmente independiente en W, entonces $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ es L.I: en V.*

H) T: $V \rightarrow W$ es T.L., $\{T(v_1), T(v_2),\ldots,T(v_n)\} \subset W$ es L.I.
T) $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\} \subset V$ es L.I.
$\Rightarrow \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n = 0_v \wedge \forall i \,/\, \alpha_i = 0$

Dem.: consideramos una combinación lineal con escalares a determinar de los $\{v_1; v_2;\ldots; v_n\}$ que sea igual al vector nulo de V.

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n = 0_v$$

Si demostramos que los α_i son todos 0, habremos demostrado la propiedad.

Aplicando T queda: $T(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n) = T(0_v) = 0_w$

Por ser T una T.L. queda: $\alpha_1.T(v_1) + \alpha_2.T(v_2) + \ldots + \alpha_n.T(v_n) = 0_w$

como los vectores $\{T(v_1), T(v_2),...,T(v_n)\}$ son L.I. en W, entonces $\forall i$: $\alpha_i = 0$. Por lo tanto el conjunto de vectores $\{v_1; v_2;\ldots; v_n\}$ es L.I.

d) De la imagen de un conjunto linealmente independiente de una T.L. inyectiva

Si T: *$V \rightarrow W$ es una T.L. inyectiva y $\{v_1; v_2;...; v_n\}$ es un conjunto de vectores de V linealmente independiente en V, entonces su imagen es un conjunto de vectores L.I. en W.*

H) T: $V \rightarrow W$ es una T.L. inyectiva, $\{v_1; v_2;\ldots; v_n\} \subset V$ es L.I.
T) $\{T(v_1), T(v_2),...,T(v_n)\} \subset W$ es L.I. $\Rightarrow \alpha_1.T(v_1) + \alpha_2.T(v_2) + \ldots +$
$+ \alpha_n.T(v_n) = 0_w \wedge \forall i / \alpha_i = 0$

Dem.: consideramos una combinación lineal con escalares a determinar de los $\{T(v_1), T(v_2),...,T(v_n)\}$ que sea igual al vector nulo de W.

$$\alpha_1.T(v_1) + \alpha_2.T(v_2) + \ldots + \quad + \alpha_n.T(v_n)$$

Si demostramos que los α_i son todos 0, habremos demostrado la propiedad.

Por ser T una T.L. queda: $T(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n) = 0_w$
por definición de núcleo $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n \in N(T)$
por ser T inyectiva, $N(T) = \{0_v\} \Rightarrow \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n = 0_v$

pero como $\{v_1; v_2;\ldots; v_n\}$ es L.I., $\forall i$ / $\alpha_i = 0$, por lo tanto

$\{T(v_1), T(v_2),...,T(v_n)\}$ es L. I.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean $(V,\oplus,K,\odot)$ *y* $(W,\oplus,K,\odot)$ *dos espacios vectoriales y* $B = \{v_1; v_2;\ldots; v_n\}$ *una base de* V. Si $\{w_1; w_2;\ldots; w_n\}$ *son n vectores de W tales que* $T(v_i) = w_i$, *entonces existe una única transformación lineal* T: $V \to W$ *tal que* $T(v_i) = w_i$, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

H) $(V,\oplus,K,\odot)$ *y* $(W.\oplus,K,\odot)$ son espacios vectoriales y $B = \{v_1; v_2;\ldots; v_n\}$ una base de V y $\{w_1; w_2;\ldots; w_n\}\subset W$ /$T(v_i) = w_i$ $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

T) $\exists$ una T.L. T: $V \to W$ que es única tal que $T(v_i) = w_i$, $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Dem.: $\forall x\in V$, existen y son únicos los α_i /

$x = \alpha_1.w_1 + \alpha_2.w_2 + \ldots + \alpha_n.w_n$

Definimos T: $V \to W$ / $T(x) = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n$.
Probaremos que la función T es una T.L. única.

1) T es T.L.

a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$

$\forall x\in V, \forall y\in V$: $x = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n$ e
$y = \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2 + \ldots + \beta_n.v_n$

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n + \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2 + \ldots + \beta_n.v_n) \\ &= T[(\alpha_1+\beta_1).v_1 + (\alpha_2+\beta_2).v_2 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n).v_n] = \\ &\quad (\alpha_1+\beta_1).w_1 + (\alpha_2+\beta_2).w_2 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n).w_n \\ &= (\alpha_1.w_1 + \alpha_2.w_2 + \ldots + \alpha_n.w_n) + (\beta_1.w_1 + \beta_2.w_2 + \ldots + \beta_n.w_n) \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$

b) $T(\alpha.x) = \alpha.T(x)$

$$\begin{aligned} T(\alpha.x) &= T\,[\alpha.(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n)] \\ &= T\,(\alpha.\alpha_1.v_1 + \alpha.\alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha.\alpha_n.v_n) \\ &= \alpha.\alpha_1.w_1 + \alpha.\alpha_2.w_2 + \ldots + \alpha.\alpha_n.w_n \\ &= \alpha.(\alpha_1.w_1 + \alpha_2.w_2 + \ldots + \alpha_n.w_n) = \alpha.T(x) \end{aligned}$$

de a) y b) surge que T es una T.L.

2) Si $i = 1, 2, 3, \ldots, n \Rightarrow T\,(v_i) = w_i$

$v_i = 0.v_1 + 0.v_2 + \ldots + 0.v_{i-1} + 1.v_i + \ldots + 0.v_n$
$T(v_i) = 0.w_1 + 0.w_2 + \ldots + 0.w_{i-1} + 1.w_i + \ldots + 0.w_n = 1.w_i = w_i$

3) Ahora debemos probar la unicidad, es decir que si $T(v_i) = w_i$ entonces T es única.

Sea h: $V \to W$ una T.L. / $h(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$h\,(x) = h\,(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n) =$
$\alpha_1.h(v_1) + \alpha_2.h(v_2) + \ldots + \alpha_n.h(v_n) = \alpha_1.w_1 + \alpha_2.w_2 + \ldots + \alpha_n.w_n$
$= \alpha_1.T(v_1) + \alpha_2.T(v_2) + \ldots + \alpha_n.T(v_n) = T\,(\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n)$
$= T\,(x) \Rightarrow T\,(x) = h\,(x)$. Por lo tanto T es única.

Conclusión: este teorema asegura que toda transformación lineal entre dos espacios vectoriales que da unívocamente determinada por las imágenes de cualquier base del primero. Es decir que conociendo las imágenes de una base de V podemos determinar la imagen de cualquier vector de V.

Ejemplo

Sea T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, y si T(1;1;1) = (1;2); T(1;1;0) = (1;2); T(1;0;0) = (–1;1) hallar la T.L.

Como {(1;1;1); (1;1;0); (1;0;0)} es una base de $\mathbb{R}^3$ y conocemos los transformados e la base, por el teorema la T.L. existe y es única.

Por lo tanto cualquier vector $(x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}^3$ se puede inscribir como combinación lineal de los mismos.

$(x_1;x_2;x_3) = \alpha_1.(1;1;1) + \alpha_2.(1;1;0) + \alpha_3.(1;0;0)$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ x_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ x_3 = \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = x_3,\ \alpha_2 = x_2 - x_3,\ \alpha_3 = x_1 - x_2$$

Entonces: $(x_1;x_2;x_3) = x_3.(1;1;1) + (x_2 - x_3).(1;1;0) + (x_1 - x_2).(1;0;0)$

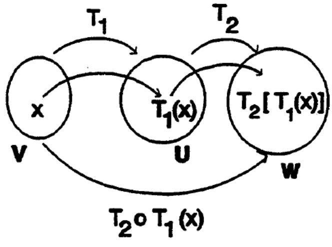
$T(x_1;x_2;x_3) = T[x_3.(1;1;1) + (x_2 - x_3).(1;1;0) + (x_1 - x_2).(1;0;0)]$
$T(x_1;x_2;x_3) = x_3.T(1;1;1) + (x_2 - x_3).T(1;1;0) + (x_1 - x_2).T(1;0;0)$
$T(x_1;x_2;x_3) = x_3.(1;2 + (x_2 - x_3).(1;2) + (x_1 - x_2).(-1;1)$
$T(x_1;x_2;x_3) = (x_3;2x_3) + (x_2 - x_3;2x_2 - 2x_3) + (-x_1 + x_2;x_1 - x_2)$
$T(x_1;x_2;x_3) = (2x_2 - x_1;\ x_1 + x_2)$

Hemos encontrado la función que por el teorema sabemos que es una T.L. única.

COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean $T_1: V \rightarrow U$ y $T_2: U \rightarrow W$ dos T.L.
La función compuesta $T_2 o T_1: V \rightarrow W$ se define como $T_2[T_1(x)]$.

Propiedad: la composición de T.L. es otra T.L.



Dem.: a) $T_2oT_1(x+y) = T_2[T_1(x+y)]$
$= T_2[T_1(x) + T_1(y)]$
$= T_2[T_1(x)] + T_2[T_1(y)]$
$= T_2oT_1(x) + T_2oT_1(y)$

b) $T_2oT_1(\alpha.x) = T_2[T_1(\alpha.x)] = T_2[\alpha.T_1(x)] = \alpha.T_2[T_1(x)] = \alpha.T_2oT_1(x)$

De a) y b) surge que la composición de transformaciones lineales es otra transformación lineal.

Ejemplo

Sean $T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \wedge T_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dos T.L. definidas por
$T_1(x_1; x_2; x_3) = x_1 - x_2 + x_3$ y $T_2(y) = (y;0)$.

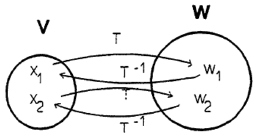
$T_2 o T_1(x_1; x_2; x_3) = T_2[T_1(x_1; x_2; x_3)] = T_2(x_1 - x_2 + x_3) = (x_1 - x_2 + x_3; 0)$

TRANSFORMACIÓN LINEAL NO SINGULAR

T: $V \to W$ es una T.L. ***no singular*** $\Leftrightarrow \exists T^{-1} \,/\, T^{-1}oT = I_v$ y $T^{-1}oT = I_w$

Propiedad

La inversa de una transformación lineal no singular es una transformación lineal



H) T: $V \to W$ es T.L. no singular
T) T^{-1}: $W \to V$ es una T.L.

Dem.: Consideramos w_1 y w_2 en W. Por ser T biyectiva, son únicos x_1 y x_2 / $T(x_1) = w_1 \wedge T(x_2) = w_2 \wedge x_1 = T^{-1}(w_1) \wedge x_2 = T^{-1}(w_2)$

a) $T^{-1}(w_1+w_2) = T^{-1}[T(x_1)+T(x_2)] = T^{-1}[T(x_1+x_2)] = T^{-1}oT(x_1+x_2)$
$= x_1+x_2 = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$
b) $T^{-1}(\alpha.w_1) = T^{-1}[(\alpha.T(x_1)] = T^{-1}[T(\alpha.x_1)] = T^{-1}oT(\alpha.x_1) = \alpha.x_1 =$
$= \alpha.T^{-1}(w_1)$

Ejemplo: hemos probado que T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ /
$T_1(x_1; x_2; x_3) = (x_2; -x_1; x_3)$ es un automorfismo (ver página 210).

$(w_1; w_2; w_3)$ es la imagen de $(x_1; x_2; x_3)$ a través de T, por lo tanto $(x_1; x_2; x_3)$ es la imagen $(w_1; w_2; w_3)$ a través de T^{-1}.

$T_1(x_1;x_2;x_3)=(x_2;-x_1;x_3)=(w_1;w_2;w_3) \Rightarrow x_2=w_1, -x_1=w_2, x_3=w_3$, para obtener T^{-1} debemos despejar x_1, x_2 y x_3 en función de w_1, w_2 y w_3: $x_1=-w_2$; $x_2=w_1$ y $x_3=w_3 \Rightarrow$ la expresión de la transformación lineal inversa es $T^{-1}(w_1;w_2;w_3)=(x_1;x_2;x_3)=(w_2;w_1;w_3)$.

Propiedad

Si $T: V\to V$ es suficiente que T sea inyectiva o sobreyectiva para ser no singular.

Ejemplo: Sea T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $T(x_1;x_2)=(x_2;2x_1-x_2)$

Probaremos que es no singular simplemente probando que es inyectiva. Para eso calculamos el núcleo de T: N (T) = {(0;0)} $\Rightarrow$ T es inyectiva, por lo tanto T es no singular $\Rightarrow \exists\, T^{-1}$.

$T(x_1;x_2)=(x_2;2x_1-x_2)=(w_1;w_2) \Rightarrow x_2=w_1 \wedge 2x_1-x_2=w_2$.

$$x_1=\frac{w_1+w_2}{2} \wedge x_2=w_1 \quad \Rightarrow \quad T^{-1}(w_1;w_2)=\left(\frac{w_1+w_2}{2};w_1\right)=(x_1;x_2)$$

ESPACIO VECTORIAL DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Si llamamos $L(V;W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales entre los espacios vectoriales V y W sobre el cuerpo K:

$$L(V;W)=\{T: V\to W \text{ / T es una T.L.}\}$$

En $L(V;W)$ definimos la suma de funciones y el producto de escalares por funciones de la siguiente manera:

a) $(T_1+T_2)(x)=T_1(x)+T_2(x)$ b) $(\alpha.T)(x)=\alpha.[T(x)]$

Demostraremos que $\{L(V;W); \oplus, K, \odot\}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

1. La suma de dos T.L. de $V \to W$ es una T.L. de $V \to W$.

1.a) $(T_1 + T_2)(x+y) = T_1(x+y) + T_2(x+y) = T_1(x) + T_1(y) + T_2(x) + T_2(y)$
$= (T_1 + T_2)(x) + (T_1 + T_2)(y)$

1.b) $(T_1 + T_2)(\alpha.x) = (T_1)(\alpha.x) = (T_2)(\alpha.x) = \alpha.[(T_1)(x)] + \alpha.[(T_2)(x)]$
$= \alpha.[(T_1)(x) + (T_2)(x)] = \alpha.[(T_1 + T_2)(x)]$

2. El producto de cualquier escalar por cualquier T.L. de $V \to W$ es una T.L. de $V \to W$.

2.a) $(\alpha.T)(x+y) = \alpha.[T(x+y)] = \alpha.[T(x) + T(y)] = \alpha.T(x) + \alpha.T(y)$
$= (\alpha.T)(x) + (\alpha.T)(y)$
2.b) $(\alpha.T)(\beta.x) = \alpha.[T(\beta.x)] = \alpha.[\beta.T(x)] = (\alpha.\beta).[T(x)] = (\beta.\alpha).[T(x)]$
$= \beta.(\alpha.T)(x)$

Además las definiciones a) y b) permiten comprobar que $L(V;W)$ es un espacio vectorial sobre K.

El vector nulo de $L(V;W)$ es la transformación cero (ver página 204).

MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sean T: de $V \to W$ y V y W dos espacios vectoriales de dimensiones finitas **n** y **m** respectivamente.
Si tenemos una base de cada espacio B_v y B_w, entonces queda determinada una matriz A de orden mxn que caracteriza a la transformación lineal T: $V \to W$.
Dicha matriz A se llama ***matriz asociada a la T.L. respecto del par de bases dadas.***

Sean $B_v = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ una base de V y $B_w = \{w_1; w_2; \ldots; w_m\}$ una base de W. A cada $v_i \in B_v$ le corresponde a través de la T.L. como imagen un vector $T(v_i) = y_i \in W$ que por pertenecer a W se puede expresar como combinación lineal de B_w.

$$\begin{cases} T(v_1) = y_1 = a_{11}.w_1 + a_{21}.w_2 + ... + a_{m1}.w_m \\ T(v_2) = y_2 = a_{12}.w_1 + a_{22}.w_2 + ... + a_{m2}.w_m \\ . \\ . \\ T(v_n) = y_n = a_{1n}.w_1 + a_{2n}.w_2 + ... + a_{mn}.w_m \end{cases}$$

Asignamos a cada escalar a_{ij} (coeficientes de la combinación lineal) un doble subíndice. El primero, asociado a cada vector de la base B_w y el segundo en correspondencia con el vector de la base B_v. Por ejemplo el a_{23} es el coeficiente del 2º vector B_w (w_2) correspondiente al transformado del 3º vector de B_v (v_3). Los mxn escalares (a_{ij}) que figuran en las combinaciones lineales de los vectores que son imágenes de los elementos de la base de V constituyen una matriz, cuya matriz transpuesta es la matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ que caracteriza a la transformación lineal T respecto de las bases B_v y B_w.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ . & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, para hallar la matriz que caracteriza a una T.L.: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se determinan las imágenes de los vectores de B_v y se expresan cada una de estas imágenes en la base B_w. Luego la matriz transpuesta de la matriz de los coeficientes de las combinaciones lineales es la matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$.

Ejemplo: sea T.: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ / $T(x_1;x_2;x_3) = (x_1+x_3;x_2-x_3)$

$B_v = \{(1;1;1), (1;1;0), (1;0;0)\}$, $B_w = \{(2;0), (0;1)\}$

$T(1;1;1) = (2;0) = 1.\ (2;0) + 0.(0;1)$

$T(1;1;0) = (1;1) = \dfrac{1}{2}.\ (2;0) + 1.(0;1)$

$T(1;0;0) = (1;0) = \dfrac{1}{2}.\ (2;0) + 0.(0;1) \ \Rightarrow\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Propiedad

Si A es la matriz asociada a la transformación lineal T: $V \to W$ respecto de las bases B_v y B_w y X_{Bv} es la matriz columna cuyos elementos son las coordenadas de x respecto de B_v, entonces la imagen de x a través de T expresada en función de los elementos de la base de W (B_w) se obtiene multiplicando la matriz A por la matriz X_{Bv}: $T(x)_{Bw} = A.X_{Bv}$.

Nota: Si la bases B_v y B_w son las bases canónicas entonces se cumple que $T(x) = A.X$, donde X es la matriz columna cuyos elementos son las componentes del vector x.

Ejemplo: sea T.: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ / \ T(x_1;x_2;x_3) = (2x_1+x_2+x_3;x_2-3x_3)$

$B_v = \{(1;0;1),\ (1;1;0),\ (1;1;1)\}$, $B_w = \{(1;-1),\ (2;3)\}$, hallar A y $T(1;1;2)$.

$T(1;0;1) = (3;-3) = 3.\ (1;-1) + 0.(2;3)$

$T(1;1;0) = (3;1) = \dfrac{7}{5}.\ (1;-1) + \dfrac{4}{5}.(2;3)$

$T(1;1;1) = (4;2) = \dfrac{16}{5}.(1;-1) + \dfrac{2}{5}.(2;3) \ \Rightarrow\ A = \begin{pmatrix} 3 & 7/5 & 16/5 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Para hallar $T(1;1;2)$ es necesario determinar las coordenadas de x respecto de las base de B_v.

$(1;1;2) = \alpha_1.(1;0;1) + \alpha_2.(1;1;0) + \alpha_3.(1;1;1)$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 1 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2 = \alpha_1 + \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -1 \text{ y } \alpha_3 = 2$$

$$X_{Bv} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \ T(x)_{Bv} = A.X_{Bv} = \begin{pmatrix} 3 & 7/5 & 16/5 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}_{Bw}$$

$\Rightarrow$ T(1;1;2) = 5.(1; –1) + 0.(2;3) = (5; –5)

Verificación: si aplicamos a x = (1;1;2) la transformación lineal T se obtiene: T(x) = T(1;1;2) = (5;–5) que expresado en función de los elementos de B_w

$$(5;-5) = 5.(1;-1) + 0.(2;3) \Rightarrow w_{Bv} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}_{Bw}$$

Otra forma de definir una T.L.

Otra forma es a través de las matrices. Como ya vimos, toda matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ define una T.L.: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ / T(x) = $A.X$, respecto de las bases canónicas.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ define a la T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ /

$$T(x_1;x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

es decir la T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / $T(x_1;x_2) = (2x_1 - x_2; x_1 - 2x_2; 2x_1 + x_2)$

Propiedad: el rango de una T.L. es igual al rango de la matriz asociada a la misma.

MATRIZ ASOCIADA A LA COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean T_1: $V \to U$ y T_2: $U \to W$ dos T.L., $B_v = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$, $B_u = \{u_1; u_2; \ldots; u_p\}$ y $B_w = \{w_1; w_2; \ldots; w_m\}$ las bases de V, U y W respectivamente. Si las transformaciones T_1 y T_2 quedan caracterizadas por las matrices $A \in \mathbb{R}^{pxn}$ y $B \in \mathbb{R}^{mxp}$ respecto de las bases dadas en cada espacio entonces la transformación lineal compuesta $T_2 o T_1$: $V \to W$ está asociada a la matriz $C = B.A$ / $C \in \mathbb{R}^{mxn}$.

Ejemplo

Sea T_1: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ / $T(x_1;x_2;x_3) = x_1+x_2-x_3 \wedge T_2$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ / $T(x) = (x;2x)$

Debemos seleccionar una base para cada espacio, por ejemplo:
$B_v = \{(1;0;1), (0;1;0), (0;0;1)\}$ en $\mathbb{R}^3$, $B_u = \{1\}$ en $\mathbb{R}$ y
$B_w = \{(2;0), (0;2)\}$ en $\mathbb{R}^2$.

Debemos determinar las matrices asociadas a T_1 y T_2

$T(1;0;0) = 1 = 1.1$
$T(0;1;0) = 1 = 1.1 \qquad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$T(0;0;1) = -1 = (-1).\ 1$

$$T_2(1) = (1;2) = \frac{1}{2}.(2;0) + 1.(0;2) \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = B.A = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Debemos definir ahora $T_2 o T_1$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T_2 o T_1\ (x_1;x_2;x_3) = T_2\ [T_1\ (x_1;x_2;x_3)] = T_2\ (x_1+x_2-x_3) =$
$= (x_1+x_2-x_3; 2x_1+2x_2-2x_3)$

Buscamos la matriz asociada y verificaremos que coincide con C.

$T_2oT_1\ (1;0;0) = (1;2) = \frac{1}{2}.(2;0) + 1.(0;2)$

$T_2oT_1\ (0;1;0) = (1;2) = \frac{1}{2}.(2;0) + 1.(0;2) \quad \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$T_2oT_1\ (0;0;1) = (–1;–2) = -\frac{1}{2}.(2;0) + (–1).(0;2)$

MATRIZ ASOCIADA A LA TRANSFORMACIÓN LINEAL INVERSA

Sea T: $V \to W$ una T.L., $B_v = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ y $B_w = \{w_1; w_2; \ldots; w_n\}$ las bases de V y W respectivamente. Si la transformación T está asociada a la matriz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ no singular, entonces la transformación lineal inversa está asociada a la matriz A^{-1}.

$T^{-1}: W \to V \ /\ T^{-1}(x)_{Bv} = A^{-1}.X_{Bv}$

La imagen de w a través de T^{-1} expresada en función de los elementos de la base de V (B_v) se obtiene multiplicando la matriz A^{-1} por la matriz X_{Bw}.

RELACIÓN ENTRE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Dada una T.L. T: $V \to W$ es posible hallar la matriz asociada respecto de un par de bases. Si A es la matriz asociada respecto de las bases canónicas, entonces se cumple que $T(X) = AX$. Por lo tanto, resolver el sistema de ecuaciones lineales $A.X = B$ equivale a encontrar el subconjunto de todos los vectores de V cuya imagen a través de la T.L. asociada a la matriz A, sea el vector B de W y resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A.X = 0$, equivale a encontrar el núcleo de la transformación lineal asociada a la matriz A.

EJERCICIOS GENERALES RESUELTOS

1) Sean *V* y *W* dos espacios vectoriales. Dar bases del Núcleo e Imagen de las siguientes transformaciones lineales y verificar la relación de las dimensiones:

a) T: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ / $T(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1+x_2-x_3-x_4;x_1-x_4;x_1-x_2+x_3-x_4)$

Primero buscamos el núcleo, $T(x_1;x_2;x_3;x_4) = (0;0;0)$

$$(x_1+x_2-x_3-x_4;x_1-x_4;x_1-x_2+x_3-x_4) = (0;0;0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
- & - & - & - & - \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\
- & - & - & - & - \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_4;x_2;x_2;x_4)$$

$\Rightarrow N(T) = \{x = (x_4;x_2;x_2;x_4) \in \mathbb{R}^4\} = \{(0;x_2;x_2;0) + (x_4;0;0;x_4)\} =$
$= \{x_2.(0;1;1;0) + x_4.(1;0;0;1)\}$

B = {(0;1;1;0);(1;0;0;1)}, verificamos que B es S.G., debemos verificar que es L.I: $\alpha_1.(0;1;1;0) + \alpha_2.(1;0;0;1) = (0;0;0;0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ B es L.I. por lo tanto B es base de N(T) y Dim N(T) =2.

Buscamos la Imagen:

$$T(x) = T(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1+x_2-x_3-x_4;x_1-x_4;x_1-x_2+x_3-x_4) = (y_1;y_2;y_3) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = y_1 \\ x_1 - x_4 = y_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = y_3 \end{cases}$$

1	1	-1	-1	|	y_1
1	0	0	-1	|	y_2
1	-1	1	-1	|	y_3
-	-	-	-	-	-
1	1	-1	-1	|	y_1
0	-1	1	0	|	$y_2 - y_1$
0	-2	2	0	|	$y_3 - y_1$
-	-	-	-	-	-
1	0	0	-1	|	y_2
0	-1	1	0	|	y_2
0	0	0	0	|	$y_1 + y_3 - 2y_2$

Para que existan las imágenes el sistema debe tener solución, debe cumplirse que: $y_1+y_3-2y_2 = 0 \Rightarrow \text{Im (T)} = \{y = (2y_2-y_3;y_2;y_3) \in \mathbb{R}^3\}$

Buscamos ahora una base y la dimensión de Im (T)

$(2y_2-y_3;y_2;y_3) = (2y_2;y_2;0) + (-y_3;0;y_3) = y_2.(2;1;0) + y_3.(-1;0;1) \Rightarrow$
B = {(1;0;1);(2;1;0)}

Ya demostramos que B es sistema de generadores, debemos demostrar que es L.I. para asegurar que es una base.

$\alpha_1.(-1;0;1) + \alpha_2.(2;1;0) = (0;0;0) \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ los vectores de B son L.I. $\Rightarrow$ B es una Base de Im (T).

Dim Im (T) =2.

n(T) + r(T) = 2 + 2 = 4 = dim *V*

NOTA: Vemos que para buscar el núcleo debemos resolver el sistema de ecuaciones homogéneo asociado al sistema de ecuaciones que se resuelve al buscar la imagen.
Por lo tanto si comenzamos buscando la imagen, tendremos que resolver un solo sistema de ecuaciones. Veamos el siguiente ejemplo:

b) T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ / $T(x_1;x_2;x_3) = (x_1+x_2-x_3;x_2+x_3-x_1;x_1-2x_3+x_2;x_1+2x_2-x_3)$

Primero buscamos la imagen

$T(x_1;x_2;x_3) = (x_1+x_2-x_3;x_2+x_3-x_1;x_1-2x_3+x_2;x_1+2x_2-x_3) = (y_1;y_2;y_3;y_4)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = y_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = y_4 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{rrrcr}
1 & 1 & -1 & | & y_1 \\
1 & 1 & 1 & | & y_2 \\
1 & 1 & -2 & | & y_3 \\
1 & 2 & -1 & | & y_4 \\
- & - & - & - & - \\
1 & 1 & -1 & | & y_1 \\
0 & 2 & 0 & | & y_2 + y_1 \\
0 & 0 & -1 & | & y_3 - y_1 \\
0 & 1 & 0 & | & y_4 - y_1 \\
- & - & - & - & - \\
1 & 0 & -1 & | & 2y_1 - y_4 \\
0 & 0 & 0 & | & 3y_1 - 2y_4 + y_2 \\
0 & 0 & -1 & | & y_3 - y_1 \\
0 & 1 & 0 & | & y_4 - y_1 \\
- & - & - & - & - \\
1 & 0 & 0 & | & 3y_1 - y_3 - y_4 \\
0 & 0 & 0 & | & 3y_1 - 2y_4 + y_2 \\
0 & 0 & 1 & | & y_1 - y_3 \\
0 & 1 & 0 & | & y_4 - y_1
\end{array}
$$

Para que existan las imágenes el sistema debe tener solución, debe cumplirse que: $3y_1 - 2y_4 + y_2 = 0 \Rightarrow \text{Im}(T) = \{y = (y_1; 2y_4 - 3y_1; y_3; y_4) \in \mathbb{R}^4\}$

Buscamos ahora una base y la dimensión de Im (T)

$(y_1;2y_4-3y_1;y_3;y_4) = (y_1;-3y_1;0;0) + (0;0;y_3;0) + (0;2y_4;0;y_4) =$
$= y_1.(1;-3;0;0) + y_4.(0;2;0;1) + y_3.(0;0;1;0)$
$\Rightarrow B = \{(1;-3;0;0);(0;2;0;1);(0;0;1;0)\}$

Ya demostramos que B es sistema de generadores, debemos demostrar que es L.I. para asegurar que es una base.

$\alpha_1.(1;-3;0;0) + \alpha_2.(0;2;0;1) + \alpha_3.(0;0;1;0) = (0;0;0;0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -3\alpha_1 + 2\,\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow \text{los vectores de B son L.I.}$$

$B = \{(1;-3;0;0);(0;2;0;1);(0;0;1;0)\}$ es una base de Im (T). Dim Im (T) =3.

Para determinar el núcleo planteamos: $T(x_1;x_2;x_3) = (0;0;0;0)$

$(x_1 + x_2 - x_3;x_2 + x_3 - x_1;x_1 - 2x_3 + x_2;x_1 + 2x_2 - x_3) = (0;0;0;0)$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Para calcularlo analizamos la última tabla del sistema de ecuaciones ya resuelto, teniendo en cuenta que trabajamos con el sistema homogéneo asociado.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \ (x_1;x_2;x_3) = (0;0;0) \Rightarrow N(T) = \{(0;0;0)\}$$

Dim N(T) = 0, No tiene base.

n(T) + r(T) = 0 + 3 = 3 = dim V

c) T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $T(x_1;x_2) = (x_1+x_2;2x_1+2x_2)$

Nuevamente buscamos primero la imagen

$$T(x) = T(x_1;x_2) = (x_1+x_2;2x_1+2x_2) = (y_1;y_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y_1 \\ 2 & 2 & y_2 \\ - & - & - \\ 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & y_2 - 2y_1 \end{array} \Rightarrow (y_1;y_2) \in \text{Im}(T) \Leftrightarrow y_2 - 2y_1 = 0 \Leftrightarrow y_2 = 2y_1$$

$\Rightarrow$ Im (T) = $\{y = (y_1;2y_1) \in \mathbb{R}^2\} = \{y_1.(1;2)\} \Rightarrow B = \{(1;2)\}$. Dim Im (T)= 1

Para determinar el núcleo planteamos:

$$T(x_1;x_2) = (x_1+x_2;2x_1+2x_2) = (0;0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Para calcularlo analizamos la última tabla del sistema de ecuaciones ya resuelto, teniendo en cuenta que trabajamos con el sistema homogéneo asociado.

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$x_2 = -x_1 \Rightarrow$ N(T) = $\{x = (x_1;-x_1) \in \mathbb{R}^2\} = \{x_1.(1;-1)\} \Rightarrow$ B = $\{(1;-1)\}$

Dim N(T) = 1. n(T) + r(T) = 1 + 1 = 2 = dim V

d) T: $\mathbb{R}^{2x2} \rightarrow \mathbb{R}^4$ / T(x) = T$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ = $(x_{21};-x_{21};x_{11}+x_{22};x_{11}+x_{21}+x_{22})$

Empezamos por la imagen:

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = (x_{21};-x_{21};x_{11}+x_{22};x_{11}+x_{21}+x_{22}) = (y_1;y_2;y_3;y_4) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_{21} = y_1 \\ -x_{21} = y_2 \\ x_{11} + x_{22} = y_3 \\ x_{11} + x_{21} + x_{22} = y_4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 1 & 0 & | & y_1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & | & y_2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & | & y_3 \\
1 & 0 & 1 & 1 & | & y_4 \\
- & - & - & - & - & - \\
0 & 0 & 1 & 0 & | & y_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & | & y_2 + y_1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & | & y_3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & | & y_4 - y_1 \\
- & - & - & - & - & - \\
0 & 0 & 1 & 0 & | & y_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & | & y_2 + y_1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & | & y_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & | & y_4 - y_1 - y_3
\end{array}$$

Para que haya imagen el sistema debe tener solución, por lo tanto:

$$\begin{cases} y_2 + y_1 = 0 \\ y_4 - y_1 - y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\
- & - & - & - & - & -
\end{array}$$

$$\begin{cases} y_2 = -y_1 \\ y_4 = \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_3 \\ y_1 = y_1 \\ y_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \text{Im (T)} = \{\, y = (y_1; -y_1; y_3; y_1 + y_3) \in \mathbb{R}^4 \}$$

Buscamos una base y la dimensión de Im (T)

$(y_1;–y_1;y_3;y_1+y_3) = (y_1;–y_1;0;y_1) + (0;0;y_3;y_3) = y_1.(1;–1;0;1) + y_3.(0;0;1;1)$
$\Rightarrow$ B = {(1;–1;0;1) + (0;0;1;1)}

Verificamos que B es L.I.

$\alpha_1.(1;–1;0;1) + \alpha_2.(0;0;1;1) = (0;0;0;0) \Rightarrow \alpha_1=0 \wedge \alpha_2= 0 \Rightarrow$ B es una base de Im (T)

Dim Im (T) = 2.

Ahora buscamos el núcleo, tomamos la última tabla del sistema de ecuaciones ya resuelto:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_{11} = –x_{22};\ x_{21} = 0 \Rightarrow \text{N(T)} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & -x_{11} \end{pmatrix} \in \Re^{2x2} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & -x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & -x_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = {}_x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{B}= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Dim N(T)} = 2.$$

2) Construir una T: $\mathbb{R}^{2x2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ / {(1;2)} sea base de N (T) y {(–1;1)} sea base de Im (T).

Hay infinitas T.L. que cumplen con las condiciones establecidas, buscamos una de ellas.
Buscamos una base de $\mathbb{R}^2$.

Si $\{(1;2)\}$ es base de N (T) $\Rightarrow (1;2) \in$ N (T) $\Rightarrow$ T(1;2) = (0;0).
Si $\{(-1;1)\}$ es base de Im (T) $\Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^2 / T(v) = (-1;1)$.

Para obtener la T.L. necesitamos una base del espacio de salida ($\mathbb{R}^2$).
Elegimos como v un elemento que sea L.I. con (1;2), para que ambos puedan constituir una base de $\mathbb{R}^2$. Tomamos, por ejemplo, $v = (0;1)$ (porque (1;2) y (0;1) son L.I.) $\Rightarrow$ T(0;1) = (–1;1).
Para obtener una base del espacio de salida a la base del núcleo se le agregan tantos vectores como sea necesario siempre que sean L.I. con la base del núcleo.
Una base de $\mathbb{R}^2$ es B = $\{(1;2),(0;1)\}$.

Buscamos ahora la T.L.:

Para eso primero expresamos un elemento cualquiera $(x_1;x_2)$ del espacio de salida en función de la base.

$(x_1;x_2) = \alpha.(1;2) + ß.(0;1)$, debemos expresar α y ß en función de x_1 y x_2.

$$\begin{cases} \alpha = x_1 \\ 2\alpha + \beta = x_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = x_1 \text{ y } ß = x_2 - 2x_1 \Rightarrow (x_1;x_2) = x_1.(1;2) + (x_2 - 2x_1).(0;1)$$

La T.L. es $T(x_1;x_2) = T\,[x_1.(1;2) + (-2x_1+x_2).(0;1)] =$
$= x_1.T(1;2) + (-2x_1+x_2)$.
$T(0;1) = x_1.(0;0) + (-2x_1+x_2).(-1;1) = (2x_1-x_2;-2x_1+x_2)$
$\Rightarrow T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x_1;x_2) = (2x_1-x_2;-2x_1+x_2)$

3) Construir una T: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ / $\{(1;1;0;0);(0;0;1;1)\}$ sea base de N (T) y $\{(2;-1;1); (0;-1;1)\}$ sea base de Im (T).

Sabemos que hay infinitas T.L. que cumplen con las condiciones establecidas, buscamos una de ellas.

Buscamos una base de $\mathbb{R}^4$.

Si {(1;1;0;0);(0;0;1;1)} es base de N (T) $\Rightarrow$ (1;1;0;0) $\wedge$ (0;0;1;1)$\in$ N (T)
T(1;1;0;0) = T(0;0;1;1) = (0;0;0)

Si {(2;–1;1);(0;–1;1)} es base de Im (T) $\Rightarrow \exists v_1 \wedge \exists v_2 \in \mathbb{R}^4$ /
$T(v_1) = (2;-1;1) \wedge T(v_2) = (0;-1;1)$

Para obtener la T.L. necesitamos una base del espacio de salida ($\mathbb{R}^4$). Elegimos como v_1 y v_2 a elementos que sean L.I. con (1;1;0;0) $\wedge$ (0;0;1;1), para que los cuatro puedan constituir una base de $\mathbb{R}^4$. Tomamos, por ejemplo, $v_1 = (0;0;1;0)$ y $v_2 = (1;0;0;0)$ (porque (1;1;0;0), (0;0;1;1), (0;0;1;0) y (1;0;0;0) son L.I.) $\Rightarrow$
T(0;0;1;0) = (2;–1;1) $\wedge$ T(1;0;0;0) = (0;–1;1).
Para obtener una base del espacio de salida a la base del núcleo se le agregan tantos vectores como sea necesario siempre que sean L.I. con la base del núcleo.

Una base de $\mathbb{R}^4$ entonces es B = {(1;1;0;0);(0;0;1;1);(0;0;1;0);(1;0;0;0)}

Buscamos ahora la T.L.:

Para eso primero expresamos un elemento cualquiera $(x_1;x_2;x_3;x_4)$ del espacio de salida en función de la base.

$(x_1;x_2;x_3;x_4) = \alpha_1.(1;1;0;0) + \alpha_2.(0;0;1;1) + \alpha_3.(0;0;1;0) + \alpha_4.(1;0;0;0)$, debemos expresar α_1, α_2, α_3 y α_4 en función de x_1, x_2, x_3, x_4.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = x_1 \\ \alpha_1 = x_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \\ \alpha_2 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = x_2,\ \alpha_2 = x_4,\ \alpha_3 = x_3 - x_4 \wedge \alpha_4 = x_1 - x_2 \Rightarrow$$

$(x_1;x_2;x_3;x_4) = x_2.(1;1;0;0) + x_4.(0;0;1;1) + (x_3 - x_4).(0;0;1;0) +$
$+ (x_1 - x_2).(1;0;0;0)$.

La T.L. es:

$T(x_1;x_2;x_3;x_4) = x_2.T(1;1;0;0) + x_4.T(0;0;1;1) + (x_3 - x_4).T(0;0;1;0) +$
$+ (x_1 - x_2).T(1;0;0;0) = x_2.(0;0;0) + x_4.(0;0;0) + (x_3 - x_4).(2;-1;1) +$
$(x_1 - x_2).(0;-1;1) = (2x_3 - 2x_4;-x_1+x_2 - x_3 + x_4;x_1-x_2+x_3-x_4)$

$T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \,/\, T(x_1;x_2;x_3;x_4) = (2x_3 - 2x_4;-x_1+x_2 - x_3 + x_4;x_1-x_2+x_3-x_4)$

4) Dada $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2 \,/\, T(x_1;x_2;x_3) = (2x_1+3x_3).x^2 + (2x_2 - x_3).x + (x_1+x_2-x_3)$, hallar N(T) e Im(T). Clasificarla y si es posible hallar T^{-1}, $T^{-1}oT$ y ToT^{-1}, trabajando con la matriz asociada a la transformación lineal.

Para facilitar el trabajo podemos asociar el polinomio a la n–upla: $(2x_1+3x_3;2x_2 - x_3;x_1+x_2-x_3)$.

Planteamos la matriz asociada a la T.L. respecto de las bases canónicas: $B_v = B_w = \{(1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)\}$

$T(1;0;0) = (2;0;1) = 2.(1;0;0) + 0.(0;1;0) + 1.(0;0;1)$
$T(0;1;0) = (0;2;1) = 0.(1;0;0) + 2.(0;1;0) + 1.(0;0;1)$

$$T(0;0;1)=(3;-1;-1)=3.(1;0;0) - 1.(0;1;0) - 1.(0;0;1) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Buscamos la imagen utilizando la matriz asociada a la transformación lineal:

$$Im(T) = \{y = a_2.x^2 + a_1.x + a_0 = (a_2;a_1;a_0) \in P_2 \,/\, \exists x \in \mathbb{R}^3: A.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = a_2 \\ 2x_2 - x_3 = a_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = a_0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|r}
2 & 0 & 3 & & a_2 \\
0 & 2 & -1 & & a_1 \\
1 & 1 & -1 & & a_0 \\
- & - & - & - & - \\
0 & -2 & 5 & & a_2-2a_0 \\
0 & 2 & -1 & & a_1 \\
1 & 1 & -1 & & a_0 \\
- & - & - & - & - \\
0 & 8 & 0 & & 5a_1+a_2-2a_0 \\
0 & -2 & 1 & & -a_1 \\
1 & -1 & 0 & & a_0-a_1 \\
- & - & - & - & - \\
0 & 1 & 0 & & \frac{5}{8}a_1+\frac{1}{8}a_2-\frac{1}{4}a_0 \\
0 & 0 & 1 & & \frac{1}{4}a_1+\frac{1}{4}a_2-\frac{1}{2}a_0 \\
1 & 0 & 0 & & \frac{3}{4}a_0-\frac{3}{8}a_1+\frac{1}{8}a_2
\end{array}$$

este sistema siempre tiene solución por lo tanto el conjunto imagen es el conjunto P_2. Como el conjunto imagen coincide con el conjunto de llegada, la transformación es sobreyectiva.

Buscamos ahora el núcleo $N(T) = \{(x_1;x_2;x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, A.(x_1;x_2;x_3) = (0;0;0)\}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_3=0 \\ 2x_1-x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

que es el sistema de ecuaciones homogéneo asociado al sistema utilizado para calcular la imagen. Analizamos la última tabla.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow (x_1;x_2;x_3) = (0;0;0) \Rightarrow \text{T es inyectiva.}$$

La transformación lineal es por lo tanto biyectiva ⇒ admite transformación lineal inversa.

$$f^{-1}: P_2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f^{-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^{-1}.\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/8 & -3/8 & 3/4 \\ 1/8 & 5/8 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_2 - 3a_1 + 6a_0}{8} \\ \dfrac{a_2 + 5a_1 - 2a_0}{8} \\ \dfrac{a_2 + a_1 - 2a_0}{4} \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora $f^{-1} \circ f$

$f^{-1} \circ f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f^{-1} \circ f\,(x_1;x_2;x_3) = f^{-1}\,[f\,(x_1;x_2;x_3)] = f^{-1}\,(A.[x]) =$
$= A^{-1}\,(A.[x]) = (A^{-1}.A).[x] = \mathrm{I}.[x] = [x] \wedge f^{-1} \circ f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/$
$f^{-1} \circ f\,(x_1;x_2;x_3) = (x_1;x_2;x_3)$.

De la misma manera se demuestra que:

$f \circ f^{-1}: P_2 \to P_2 \,/\, f \circ f^{-1}\,(a_2.x^2 + a_1.x + a_0) = a_2.x^2 + a_1.x + a_0$

APLICACIONES ECONÓMICAS

Veamos ahora algunas aplicaciones a la economía que tienen las transformaciones lineales.
Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, si se consideran los espacios vectoriales $\mathbb{R}^{nx1}$ y $\mathbb{R}^{mx1}$, se puede demostrar que T: $\mathbb{R}^{nx1} \rightarrow \mathbb{R}^{mx1}$ / $T(X) = A.X.$ es una T.L.

Demostración

1) $T(X+Y) = A.(X+Y) = A.X + A.Y = T(X) + T(Y)$
2) $T(\alpha.X) = A.(\alpha.X) = \alpha.(A.X) = \alpha.T(X)$

Veamos entonces los siguientes ejemplos:

A) Transformación de un vector de producción en un vector de insumos

Un fabricante produce artículos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ en cantidades $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para los cuales utiliza insumos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ en cantidades $q_1, q_2, \ldots, q_m$.
Se puede obtener así la matriz A de requerimientos de insumos, donde cada a_{ij} representa la cantidad de insumo Q_i que se requiere para producir una unidad del producto X_j

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ . & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si las cantidades que se quieren producir de cada artículo se expresan a través de la matriz columna X (vector de producción), queremos obtener las cantidades de cada insumo que podemos expresar a través de la matriz columna Q (vector de insumos). Buscamos entonces una función que, a partir de la matriz $X \in \mathbb{R}^{nx1}$ nos permite obtener la matriz $Q \in \mathbb{R}^{mx1}$.

Dicha función es una T.L. y es la siguiente: T: $\mathbb{R}^{nx1} \rightarrow \mathbb{R}^{mx1}$ / T(X) = $A.X$ = Q.

$$T(x)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ . & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ . \\ . \\ . \\ q_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Una empresa produce 3 artículos X_1, X_2 y X_3 en cantidades 10, 20 y 30 respectivamente. La matriz de requerimientos de insumos es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Buscamos la transformación lineal que nos permitirá encontrar la matriz Q.

T: $\mathbb{R}^{3x1} \rightarrow \mathbb{R}^{2x1}$/ T($X$) = $A.X$ = Q.

$$\mathrm{T}(X)=\mathrm{T}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 80 \\ 130 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto se utilizarán 80 unidades del insumo 1 y 130 unidades del insumo 2.

B) *Transformación de un vector de producción en un vector de gastos*

Supongamos que una empresa tiene que producir bienes X_1, X_2,…, X_n en cantidades x_1, x_2,…, x_n, expresados en la matriz columna X (vector de producción). Tenemos también la matriz A de requerimientos de

pagos de insumos. Los a_{ij} representan ahora el precio del insumo *i* para producir una unidad del bien *X*j. Queremos obtener la matriz *G* de gastos que es la matriz columna que indica el total pagado por cada uno de los insumos.

Buscamos entonces una función que, a partir de la matriz $X \in \mathbb{R}^{nx1}$ nos permita obtener la matriz de gastos $G \in \mathbb{R}^{mx1}$.
Dicha función es una T.L. y es la siguiente: T: $\mathbb{R}^{nx1} \rightarrow \mathbb{R}^{mx1}$ / T(*X*) = *A*.*X*=*G*.

$$T(x)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ . & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ . \\ . \\ . \\ q_m \end{pmatrix}$$

Si las cantidades que se quieren producir de cada artículo se expresan a través de la matriz columna *X* (vector de producción), queremos obtener las cantidades de cada insumo que podemos expresar a través de la matriz columna *Q* (vector de insumos). Buscamos entonces una función que, a partir de la matriz $X \in \mathbb{R}^{nx1}$ nos permite obtener la matriz $Q \in \mathbb{R}^{mx1}$.
Dicha función es una T.L. y es la siguiente: T: $\mathbb{R}^{nx1} \rightarrow \mathbb{R}^{mx1}$/ T(*X*) = *A*.*X* = *Q*.

$$T(x)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ . & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ . \\ . \\ . \\ g_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Una empresa produce 3 bienes X_1, X_2 y X_3 en cantidades 100, 200 y 300 que utilizan 4 insumos cuyos precios están dados por la siguiente matriz A de requerimientos de pagos de insumos: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Buscamos la transformación lineal que nos permitirá encontrar la matriz G. T: $\mathbb{R}^{3x1} \rightarrow \mathbb{R}^{4x1}$ / $T(X) = A.X = G$.

$$T(X) = T\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1.500 \\ 1.300 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto se invertirán 700, 1.500, 1.300 y 1.000 unidades monetarias respectivamente en cada insumo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Determinar cuáles de las siguientes transformaciones son lineales:

a) T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / T $(x_1 ; x_2) = (x_1 ;0)$
b) T : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $T(x_1;x_2) = (x_1^2 ; x_2^2)$
c) T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / T $(x_1;x_2) = (x_1.x_2;0)$
d) T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$/ $T(x_1;x_2) = (x_1-2;x_2+3)$
e) T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ / $T(x_1;x_2;x_3) = (x_3; x_1+ x_2)$
f) T: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ / $T(x) = (2x;3x)$
g) T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / T $(x_1;x_2) = x_1-x_2$
h) T: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ / $T(x) = (x;1)$
i) T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ / $T(x_1;x_2;x_3) = (x_1+1;x_2+x_3)$
j): $\mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}$ / $T\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_2 + x_3$
k) T: $\mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}$ / $T(A) = |A|$
l) T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / $T(x_1;x_2) = (x_1+x_2;x_1-x_2;3x_2)$
m) T: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2x2}$ / $T(x_1;x_2;x_3;x_4) = \begin{pmatrix} x_3 + x_4 & x_2 \\ x_1 & -x_3 \end{pmatrix}$

2) Dadas las siguientes T.L. hallar el núcleo, la imagen, una base cada uno, la nulidad y el rango. Verificar el teorema de la dimensión.

a) T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $T(x_1;x_2) = (x_1;0)$
b) T : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $T(x_1;x_2) = x_1 +x_2$
c) T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ / $T(x_1;x_2;x_3) = (x_3;x_2)$
d) T : $\mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}$ / $T(A) = A.B$ donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
e) T: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ / T $(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_1-x_2-x_3+x_4;0)$
f) T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / T $(x_1;x_2) = (x_1-x_2; -2x_1+3x_2;x_2-2x_1)$
g) T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / T $(x_1;x_2;x_3) = (x_3-x_2;0;x_1-3x_2+x_3)$
h) T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ / T $(x_1;x_2;x_3) = (x_1-x_2;x_3-x_2)$

3) Probar que existe una única T.L. T : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / T(1;1) = (–2;1) y T (–1;2) = (3;2).

a) expresarla   b) hallar T(2;5) y T(–3;3)
c) ¿qué pares $(x_1;x_2)$ cumplen que $T(x_1;x_2) = (0;0)$?
d) hallar Im(T)

4) Dada la T.L. T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / T(1;2) = (–1;0;2) y T(2;1) = (0;2;–1), hallar T(3;3) y T(0; –1).

5) Probar que existe una única T.L. T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / T(1;1;1) = (2;3), T (1;1;0) = (1;1), y T (1;0;0) = (0;4).

a) expresarla   b) hallar T (4;5;2)
c) ¿qué terna $(x_1;x_2;x_3)$ verifican que T $(x_1;x_2;x_3) = (0;0)$?

6) ¿Existe una T.L. T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / T (1;–1) = (–2;3), T (–1;2) = (3;2) y T(4;2) = (–3;1)? Si existe, encontrarla, si no justifique porqué no existe.

7) ¿Existe una T.L. T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ / T (1;–1;2) = –2, T (–1;2;3) =3? Si existe, encontrarla, si no justifique porqué no existe.

8) ¿Existe una T.L. T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / T (1;1;1) = (1;2), T (1;1;0) = (1;2), T (1;0;0) = (–1;1)? Si existe, encontrarla, si no justifique porqué no existe.

9) Extender por linealidad a todo el espacio las siguientes T.L. definidas sobre las bases indicadas

a) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ /T(1;0;0) = (1;0; –2), T(0;1;0) = (–1;1;2), T(0;0;1) = (2;-1;3)
b) T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / T(1;0) = (1;2;0), T(0;1) = (0;3;1)
c) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / T(1;0;0) = (2;3), T(0;1;0) = (–1;4), T(0;0;1)= (5; –3)
d) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ / T(0;1;1) = (1;–1;2;0), T(–1;1;0) = (0;0;–2;3), T(0;–1;0) = (–1;–1;0;0)

10) Sean T_1 y T_2 dos transformaciones lineales definidas de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Determinar si definen la misma transformación lineal si se sabe que:

$T_1(1;1;1) = (4;2;-2)$ $\quad$ $T_2(1;0;1) = (2;3;1)$
$T_1(-1;1;1) = (-2;0;-4)$ $\quad$ $T_2(1;1;0) = (5;0;-2)$
$T_1(1;-1;1) = (0;4;4)$ $\quad$ $T_2(0;1;1) = (1;1;-3)$

Si fuesen la misma transformación lineal indicarla.

11) Hallar la matriz asociada a cada una de las siguientes transformaciones lineales considerando las bases canónicas a no ser que se indique otra. Hallar núcleo, imagen, una base de cada uno, nulidad y rango.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ / \ T(x_1;x_2) = (x_1-2x_2;-x_1+x_2)$
b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \ / \ T(x_1;x_2;x_3) = (x_1-x_2;x_2+x_3;2x_1-x_2-x_3;-x_1+x_2+2x_3)$
c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ T(x_1;x_2;x_3) = (2x_1-x_2+3x_3;4x_1-2x_2+6x_3;-6x_1+3x_2-9x_3)$
d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ / \ T(x_1;x_2;x_3) = (x_1-x_2+x_3;-2x_1+2x_2-2x_3)$
e) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ T(x_1;x_2;x_3) = (x_1-x_2+2x_3;3x_1+x_2+4x_3;5x_1-x_2+8x_3)$
f) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ / \ T(x_1;x_2) = (x_1-2x_2;2x_1+x_2)$, $B_v=\{(1;-2), (3;2)\}$,
$B_w=\{(1;-2), (3;2)\}$
g) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ / \ T(x_1;x_2;x_3) = (2x_1+x_2+x_3;x_2-3x_3)$,
$B_v=\{(1;0;1), (1;1;0), (1;1;1)\}$, $B_w=\{(1;-1), (2;3)\}$

12) Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ / T(1;1;1) = (2;1)$, $T(1;2;0) = (3;0)$ y $T(2;0;0) = (0;5)$ y $B_v=\{(1;1;1), (1;2;0), (2;0;0)\}$, $B_w=\{(2;1), (1;4)\}$, hallar la matriz que caracteriza a la transformación lineal.

13) Dada $T: \mathbb{R}^{nxn} \to \mathbb{R}^{nxn} \ / \ T(A) = A-A^t$, hallar: a) núcleo, b) imagen.

14) Dadas las siguientes T.L. hallar el núcleo, la imagen, una base de cada uno, la nulidad y el rango.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ / \ T(1;1) = (2;4)$, $T(-1;2) = (1;2)$
b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ T(1;1;1) = (4;2;-2)$, $T(-1;2;0) = (1;-3;-7)$,
$T(-1;0;0) = (-3;-1;-1)$

15) Determinar cuáles de las transformaciones lineales del ejercicio dos son monomorfismos, cuales epimorfismos, y cuales automorfismos.

16) Dadas las siguientes transformaciones lineales probar que son automorfismos y hallar sus inversas

a) T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / T $(x_1;x_2) = (x_1+x_2;x_2-x_1)$
b) T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / T $(x_1;x_2) = (2x_1;x_1-x_2)$
c) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / T $(x_1;x_2;x_3) = (x_2; x_1+x_2;-x_3)$
d) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / T $(x_1;x_2;x_3) = (x_3; x_2+x_1;-x_2)$
e) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / T $(x_1;x_2;x_3) = (x_1+x_2;x_2+x_3;x_3+ x_1)$
f) T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / T $(x_1;x_2;x_3) = (x_1-3x_2-2x_3;x_2-4x_3;x_3)$

17) Dadas las siguientes T.L. hallar a) $T_1 o T_2(x)$, b) $T_2 o T_3(x)$, c) verificar que la matriz asociada a la transformación lineal compuesta es el producto de las matrices asociadas a cada transformación lineal en el orden correspondiente.

T_1: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / T $(x_1;x_2) = (x_1+x_2; x_1)$
T_2: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / T $(x_1;x_2;x_3) = (x_1+x_3;-x_2)$
T_3: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / T $(x_1;x_2;x_3) = (2x_1;-x_3;x_2 + x_3)$

18) Probar que:

a) Si T: $V \rightarrow W$ es una T.L., es inyectiva $\Leftrightarrow$ N(T) = $\{0_v\}$.
b) Si T: $V \rightarrow W$ es una T.L. y $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es un conjunto de vectores de V linealmente dependiente, entonces su imagen es un conjunto de vectores linealmente dependiente en W.
c) Si T: $V \rightarrow W$ es una T.L. y $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ son vectores de V tales que sus imágenes constituyen un conjunto de vectores L.I. en W, entonces $\{ v_1,v_2,...,v_n\}$ es L.I. en V.
d) Si T: $V \rightarrow W$ es una T.L. inyectiva y $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es un conjunto de vectores L.I. en V, entonces su imagen es un conjunto de vectores L.I. en W.

19) Construir una T.L.: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / $\{(-1;2)\}$ sea base de N (T) y $\{(1;-1)\}$ sea base de Im(T).

20) Construir una T.L.: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ / $\{(1;0;1;0);(0;1;1;0)\}$ sea base de N(T) y $\{(3;-4;1) ; (2;1;-1)\}$ sea base de Im(T).

21) Construir una T.L.: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / N (T) = $x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y que Im (T) = $\{y \in \mathbb{R}^3 / y_1 + y_2 = y_2 + y_3 = 0\}$.

22) Construir una T.L.: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / N(T) = $\{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 + 2x_2 = 0\}$ y que Im (T) = $\mathbb{R}^3$.

23) Construir una T.L. / N(T) = Im(T), a) de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, b) de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

24) Determinar la transformación lineal definida por la matriz A respecto de la base canónica, indicar el núcleo y la imagen:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

RESPUESTAS

1) a) sí, b) no, c) no, d) no, e) sí, f) sí, g) sí, h) no, i) no, j) sí, k) no, l) sí, m) sí

2) a) $N(T) = \{(0;x_2),\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ $B = \{(0;1)\}$, $n(T) = 1$
$Im(T) = \{(y_1;0),\ y_1 \in \mathbb{R}\}$ $B = \{(1;0)\}$, $r(T) = 1$

b) $N(T) = \{(x_1;-x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}\}$ $B = \{(1;-1)\}$, $n(T) = 1$
$Im(T) = \mathbb{R}$ $B = \{(1)\}$, $r(T) = 1$

c) $N(T) = \{(x_1;0;0),\ x_1 \in \mathbb{R}\}$ $B = \{(1;0;0)\}$, $n(T) = 1$
$Im(T) = \mathbb{R}^2$ $B = \{(1;0);\ (1;0)\}$, $r(T) = 2$

d) $N(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ No tiene base $n(T) = 0$

$Im(T) = \mathbb{R}^{2x2}$ $N(T) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
$r(T) = 4$

e) $N(T) = \{(x_2+x_3-x_4;\ x_2;\ x_3;\ x_4),\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R} \wedge x_4 \in \mathbb{R}\}$
$B = \{(1;1;0;0)\}$, $n(T) = 3$
$Im(T) = \{(y_1;0),\ y_1 \in \mathbb{R}\}$ $B = \{(1;0)\}$, $r(T) = 1$

f) $N(T) = \{(0\,;0)\}$, No tiene base $n(T) = 0$
$Im(T) = \{(y_1;y_2;-4y_1;-y_2),\ y_1 \in \mathbb{R} \ \wedge y_2 \in \mathbb{R}\}$
$B = \{(1;0;-4);\ (0;1;-1)\}$, $r(T) = 2$

g) $N(T) = \{(2x_2;x_2;x_2),\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ $B = \{(2;1;1)\}$, $n(T) = 1$
$Im(T) = \mathbb{R}^2$ $B = \{(1;0),\ (0;1)\}$, $r(T) = 2$

3) a) $T\,(x_1;x_2) = \left(-\dfrac{7}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2\,;\,x_2\right)$ b) $T\,(2;5) = (-2;5)$, $T(-3;3) = (8;3)$

c) $T(0;0) = (0;0)$ d) $Im(T) = \mathbb{R}^2$

4) T(3;3) = (–1;2;1), T(0;–1) = $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)$

5) a) T $(x_1;x_2;x_3) = (x_2+x_3;4x_1-3x_2+2x_3)$, b) T (4;5;2) = (7;5)

c) N(T) = $\left\{\left(\frac{5}{4}x_3;-x_3;x_3\right)/\, x_3 \in \Re\right\}$

6) No existe porque {(1;–1);(–1;2);(4;2)} no es base, no es L.I.

7) No existe porque {(1;–1;2); (–1;2;3)} no es base, no es S.G.

8) Sí, porque {(1;1;1);(1;1;0); (1;0;0)} es una base de $\mathbb{R}^3$.

9) a) $T(x_1;x_2;x_3) = (x_1-x_2+2x_3;x_2-x_3;3x_3+2x_2-2x_1)$

b) $T(x_1;x_2) = (x_1;2x_1+3x_2;x_2)$

c) $T(x_1;x_2;x_3) = (2x_1-x_2+5x_3;3x_1+4x_2-3x_3)$

d) $T(x_1;x_2;x_3) = (x_1+x_2;x_1+x_2-2x_3;2x_3+2x_1;-3x_1)$

10) Son la misma T.L., $T(x_1;x_2;x_3) = (3x_1+2x_2-x_3;x_1-x_2+2x_3;x_1-3x_2)$

11) a) $A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, N(T) = {(0 ;0)}, no tiene base, n(T) = 0

Im(T) = $\mathbb{R}^2$, B = {(1;0), (0;1)}, r(T) = 2

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, N(T) = {(0;0;0)}, no tiene base, n(T) = 0

Im(T) = $\{(y_1;y_2;y_3;y_1+y_2-y_3),\ y_1\in\mathbb{R} \wedge y_2\in\mathbb{R} \wedge y_3\in\mathbb{R}\}$

B = {(1;0;0;1),(0;1;0;1),(0;0;1;–1)}, r(T) = 3

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$, N(T) = $\{(x_1;2x_1+3x_3;x_3) \wedge x_1\in\mathbb{R} \wedge x_3\in\mathbb{R}\}$

B = {(1;2;0),(0;3;1)}, r(T) = 2
Im(T) = $\{(y_1;2y_1;-3y_1), y_1\in\mathbb{R}\}$, B = {(1;2;–3)}, r(T) = 1

d) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, N(T) = $\{(x_1;x_1+2x_2;x_2) \wedge x_1\in\mathbb{R} \wedge x_2\in\mathbb{R}\}$

B = {(1;1;0),(0;1;1)}, r(T) = 2
Im(T) = $\{(y_1;-2y_1), y_1\in\mathbb{R}\}$, B = {(1;–2)}, r(T) = 1

e) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, N(T) = $\{(-3x_2;x_2;2x_2) \wedge x_2\in\mathbb{R}\}$,

B = {(–3;1;2)}, r(T) = 1
Im(T) = $\{(y_1-y_2;3y_1+y_2;5y_1-y_2) \wedge y_1\in\mathbb{R} \wedge y_2\in\mathbb{R}\}$,
B = {(1;3;5);(–1;1;–1)}, r(T) = 2

f) $A=\left\{\begin{pmatrix} 5/4 & -13/4 \\ 5/4 & 3/4 \end{pmatrix}\right\}$, N(T) = {(0 ;0)}, no tiene base, n(T) = 0

Im(T) = $\mathbb{R}^2$, B = {(1;0), (0;1)}, r(T) = 2

g) $A=\begin{pmatrix} 1 & 7/5 & 16/5 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix}$, N(T) = $\{(-x_3;3x_3;x_3) \wedge x_3\in\mathbb{R}\}$

B = {(–2;3;1)}, r(T) = 1
Im(T) = $\mathbb{R}^2$, B = {(1;0); (1;0)}, r(T) = 2

12) $A=\begin{pmatrix} 1 & 12/7 & -5/7 \\ 0 & -3/7 & 10/7 \end{pmatrix}$

13) a) N(T) = $\{A\in\mathbb{R}^{nxn}$ / A es simétrica$\}$
b) Im(T) = $\{A\in\mathbb{R}^{nxn}$ / A es antisimétrica$\}$

14) a) N(T) = $\{(x_1;-x_1) \wedge x_1\in\mathbb{R}\}$, B = {(1;–1)}, r(T) = 1
Im(T) = $\{(y_1;2y_1) \wedge y_1\in\mathbb{R}\}$, B = {(1;2)}, r(T) = 1
b) N(T) = {(0;0 ;0)}, no tiene base, n(T) = 0
Im(T) = $\mathbb{R}^3$, B = {(1;0;0), (0;1;0), (0;1;0)}, r(T) = 3

15) monomorfismos: d), f) epimorfismos: b), c), d), h)
automorfismos: d)

16) a) $T^{-1}(w_1;w_2) = \left(\dfrac{w_1-w_2}{2};\dfrac{w_2+w_1}{2}\right)$

b) $T^{-1}(w_1;w_2) = \left(\dfrac{w_1}{2};\dfrac{w_1-2w_2}{2}\right)$

c) $T^{-1}(w_1;w_2;w_3) = \left(w_2-w_1;w_1;-w_3\right)$

d) $T^{-1}(w_1;w_2;w_3) = \left(w_2+w_3;-w_3;-w_1\right)$

e) $T^{-1}(w_1;w_2;w_3) = \left(\dfrac{w_1-w_2+w_3}{2};\dfrac{w_2+w_1-w_3}{2};\dfrac{w_2-w_1+w_3}{2}\right)$

f) $T^{-1}(w_1;w_2;w_3) = \left(w_2+3w_2+14w_3;w_2+4w_3;w_3\right)$

18) a) $T_1oT_2(x) = (x_1+x_3-x_2;x_1+x_3)$ b) $T_2oT_3(x) = (2x_1+x_3+x_2;x_3)$

19) 20) 21) hay infinitas T.L., ver ejemplos resueltos en pág. 234-236

22) No existe porque dim $\mathbb{R}^2 = 2 \neq 1 + 3$

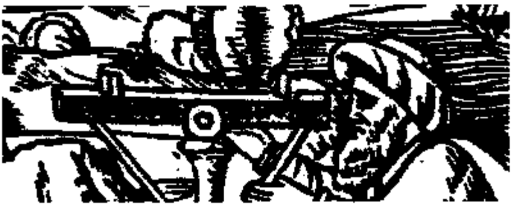
23) a) hay infinitas, n(T) = r(T) = 1,
b) no existe porque las dimensiones deberían ser 1,5.

24) a) T: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ / $T(x_1;x_2;x_3) = (x_2+x_3;x_1+3x_3;x_1-2x_2+x_3)$
N(T)=$\{(-3x_3;-x_3;x_3) \wedge x_3\in\mathbb{R}\}$
Im(T)=$\{(y_1;y_3+2y_1;y_3) \wedge y_1\in\mathbb{R} \wedge y_3\in\mathbb{R}\}$

b) T: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ / $T(x_1;x_2;x_3) = (x_1+x_2-x_3;3x_1-3x_2-3x_3;-2x_1+4x_2+2x_3)$
N(T)=$\{(x_1;0;x_1) \wedge x_1\in\mathbb{R}\}$ Im(T)=$\{(y_2+y_3;y_2;y_3) \wedge y_2\in\mathbb{R} \wedge y_3\in\mathbb{R}\}$

Capítulo 6

Programación Lineal



Introducción. Resolución gráfica de problemas de maximización y minimización.
Método Simplex. El problema dual.
Posoptimización: precios sombra,
costo de oportunidad, análisis de sensibilidad.

PROGRAMACIÓN LINEAL

Introducción

El problema de la Programación Lineal forma parte de la ***Investigación Operativa*** que tiene su origen en la segunda Guerra Mundial. En el posible ataque de Alemania, Inglaterra no sabía donde ubicar sus tropas. Las tropas se debían ubicar de manera tal que pudieran acudir eficazmente a cualquier punto.
Actualmente la Programación Lineal se utiliza para resolver problemas que se plantean en la industria, el comercio, la defensa, etc. Su objetivo es el asesoramiento en la ***toma de decisiones*** para obtener los mejores resultados posibles. Se trata de ***optimizar*** los resultados. Eso quiere decir: obtener el mayor beneficio, el menor costo, el mejor rendimiento, etc.
La Programación Lineal es un modelo que se utiliza en Investigación Operativa y trata aquellos problemas que pueden ser expresados a través de relaciones lineales (es decir con exponentes iguales a 1) que vinculan a las distintas variables con los datos.
En un problema de Programación Lineal nos encontramos con:

a) un conjunto de ***inecuaciones***, que son las ***restricciones*** del problema.
b) restricciones de no negatividad (las variables no pueden ser negativas).
c) una función que hay que optimizar (es decir obtener de ella un máximo o un mínimo) llamada ***funcional*** o ***función objetivo***.

Todo problema de programación lineal consta de estas 3 partes.

Se trata de la asignación de recursos limitados (de ahí las restricciones) orientada a maximizar o minimizar alguna función: costo, beneficio, ingreso, etc.
Veremos en primer lugar un ejemplo sencillo que podemos resolver gráficamente.

Un ejemplo sencillo - resolución gráfica

Un frigorífico cría truchas y salmones. Cada alimento tiene un costo de mano de obra y de materia prima. También hay una determinada capacidad de producción. Además la venta de cada producto genera un beneficio. Todos estos valores están dados por la siguiente tabla.

Productos Recursos	S	T	Disponibilidad
Mano de obra	5	6	15.000
Materia prima	10	20	20.000
Cantidad de unidades			1.500
Beneficio por unidad	60	80	

¿Cuántas truchas y cuántos salmones conviene criar para obtener el máximo beneficio?

Vemos que tenemos recursos escasos, 15.000 para invertir en mano de obra, 20.000 para invertir en materia prima y que 1.500 es la capacidad máxima de producción.
Por otro lado tenemos las restricciones de no negatividad (ninguna de las variables que interviene puede ser negativa). Y además tenemos que obtener el máximo de la función beneficio.
Toda esta información podemos expresarla como un sistema de inecuaciones:

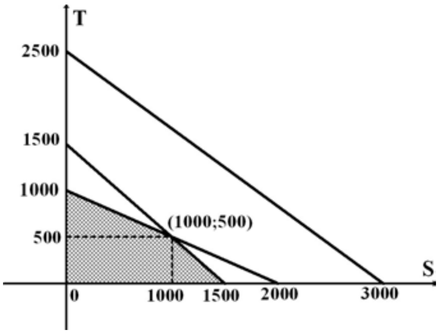
$$\begin{cases} 3S+6T \leq 15.000 \\ 10S+20T \leq 20.000 \\ S+T \leq 1.500 \\ S \geq 0 \\ T \geq 0 \end{cases}$$

En este sistema de inecuaciones tenemos expresadas las condiciones a) y b) señaladas.
Las desigualdades se deben a que no hay necesidad de consumir todos los recursos, lo que si sabemos es que no podemos consumir ***más*** que los que tenemos disponible.

Nos falta determinar cual es el funcional. La función beneficio es: $B = 60S + 80T$.
Hay que buscar, de todos los valores de S y T que satisfacen el sistema de inecuaciones, aquel que haga máximo el beneficio. En esto consiste básicamente un problema de programación lineal, que se complica cuando el número de variables aumenta. Resolveremos este caso gráficamente y luego plantearemos el problema general de la programación lineal y su forma de resolverlo: ***el método Simplex.***

Resolución

Las condiciones de no negatividad restringen el problema al primer cuadrante. Los puntos que satisfacen cada inecuación pertenecen a un semiplano. Los puntos que satisfacen todas las inecuaciones pertenecen a la intersección de dichos semiplanos, que en este caso es un polígono convexo y cerrado (en otros casos es abierto).



Solución factible: es cualquier conjunto de valores de las variables que cumple con todas las restricciones.

Teorema: si hay una solución única que maximiza o minimiza el funcional entonces tal solución corresponde a un vértice del polígono de soluciones factibles. Si hay más de una solución factible que sea extremo, por lo menos dos de ellas deben corresponder a vértices adyacentes del polígono de soluciones factibles y también serán extremo todas las soluciones factibles que sean combinación lineal convexa de los mismos.

Por lo tanto para determinar la solución óptima es necesario ***evaluar*** la función objetivo o funcional solamente para soluciones que correspondan a vértices del polígono de soluciones factibles.

Vemos que el polígono tiene 4 vértices. Según el teorema la solución debe hallarse en uno de esos vértices. Evaluamos el funcional en cada vértice.

En (0;0) $B = 60x0 + 80x0 = 0$
En (0;1000) $B = 60x0 + 80x1000 = 80.000$
En (1000;500) $B = 60x1000 + 80x500 = 100.000$
En (1500;0) $B = 60x1500 + 0x0 = 90.000$

Lo que significa que la mayor ganancia se obtiene cuando se crían 1.000 salmones y 500 truchas y el beneficio asciende a 100.000. Cualquier otra combinación de truchas y salmones genera una ganancia inferior.

Otro ejemplo

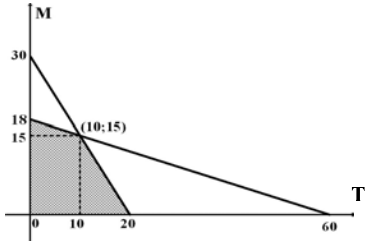
Un fabricante produce triciclos y motos, los cuales se procesan a través de dos centrales de producción mecánica. La primera tiene un máximo de 120 horas disponibles, y la segunda tiene un máximo de 180 horas disponibles. La manufactura de un triciclo requiere 6 horas de la central 1 y 3 horas de la central 2; la fabricación de una moto requiere de 4 horas en la central 1 y 10 horas en la central 2. Si el beneficio por cada triciclo es de U$S 45 y por cada moto es de U$S 55, determinar el número de triciclos y de motos que se deben fabricar para obtener el máximo beneficio.

Acá estamos nuevamente frente a una asignación de recursos, si destinar las horas disponibles de cada central para producir motos o bicicletas. Planteamos el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 6T + 4M \leq 120 \\ 3T + 10M \leq 180 \\ T \geq 0, M \geq 0 \end{cases} \qquad B = 45T + 55M \text{ es el funcional.}$$

Donde T es el número de triciclos y M el de motos que han de producirse.
Vemos que el polígono tiene 4 vértices. Según el teorema la solución debe hallarse en uno de esos vértices. Evaluamos el funcional en cada vértice.

En (0;0) $B = 45x0 + 55x0 = 0$
En (0;18) $B = 45x0 + 55x18 = 990$
En (10;15) $B = 45x10 + 55x15 = 1.275$
En (20;0) $B = 45x20 + 0x0 = 900$



Vemos que el mayor beneficio se obtiene si se fabrican 10 triciclos y 15 motos. Éste asciende a 1.275 dólares.

Ahora un ejemplo distinto

Veremos ahora un ejemplo donde las restricciones son desigualdades de ≥, se debe minimizar el funcional y el polígono es no acotado.

Dos alimentos X e Y contienen vitaminas A, B y C en las cantidades que se indican en la matriz. También en la matriz figura la cantidad mínima que necesita una persona de cada vitamina para seguir una dieta equilibrada y el precio unitario de cada alimento.
Debemos determinar qué cantidad de cada alimento debe tener la dieta de tal manera que el costo de seguir la dieta sea el mínimo posible.

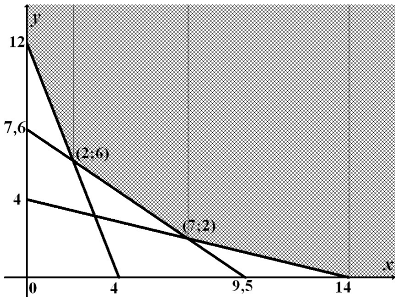
Alimentos / Vitaminas	X	Y	Cantidad mínima necesaria
Vitamina A	3	1	12
Vitamina B	3	4	30
Vitamina C	2	7	28
Costo por unidad	3	2	

Expresamos las inecuaciones y formamos la función objetivo, que en este caso hay que minimizar.

$$\begin{cases} 3x + y \geq 12 \\ 3x + 4y \geq 30 \\ 2x + 7y \geq 28 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$ el funcional es $z = 3x + 2y$

Las restricciones ahora son de mayor o igual porque lo que hay que garantizar es el mínimo de vitaminas que exige la dieta.

Representamos el polígono y determinamos los vértices en los cuales luego hay que evaluar el funcional. Vemos que el polígono ahora es no acotado y que hay 4 vértices. Evaluamos el funcional en los vértices.



En (0;12) $z = 3x0 + 2x12 = 24$
En (2;6) $z = 3x2 + 2x6 = 18$
En (7;2) $z = 3x7 + 2x2 = 25$
En (14;0) $z = 3x14 + 0x0 = 42$

Vemos que el menor costo que permite hacer la dieta es 18 consumiendo 2 unidades del alimento *X* y 6 del alimento *Y*.

MÉTODO SIMPLEX

Cuando hay más de dos variables no se puede resolver el problema gráficamente y se debe recurrir a otros procedimientos. Veremos ahora el método Simplex que consiste en ubicarse en una solución factible que a veces será el origen (no necesariamente) y preguntarse si la solución es óptima. Si lo es se pregunta si es única. Si no es única busca qué otras son óptimas. Si la hay debe ser un vértice adyacente al dado. Si no es óptimo entonces se pregunta a cual vértice adyacente puede pasar mejorando el funcional. Trata de pasar a aquel vértice adyacente que lo mejora lo más posible, aquel que de el mayor salto inmediato, en caso de haber varios vértices adyacentes.

Al pasar a un nuevo vértice se repite el procedimiento, el cual se agota porque el número de vértices es finito. El método busca sobre los vértices.

A) Desigualdades de ≤

En general podemos plantear matricialmente este caso de la programación lineal así:

$\boldsymbol{A.X \leq B}$
$\boldsymbol{X \geq 0}$
$\boldsymbol{z = C.X} \rightarrow$ maximizar

donde A es la matriz de los coeficientes de las inecuaciones o restricciones, B es la matriz columna de los recursos *(los elementos de B no deben ser negativos, si alguno lo fuese se multiplica la inecuación por (−1),* X es la matriz columna de las incógnitas o variables de decisión (productos a producir) y C es la matriz fila de los coeficientes de la función objetivo o funcional. Los C_j indican el beneficio o la ganancia que se obtiene al vender una unidad del producto j, es la ***contribución por unidad a la ganancia*** de cada producto.
Veamos el siguiente ejemplo ya resuelto gráficamente, el de las bicicletas y las motos.

$$\begin{cases} 6B + 4M \leq 120 \\ 3B + 10M \leq 180 \\ B \geq 0, M \geq 0 \end{cases} \text{, haciendo } B = x_1 \text{ y } M = x_2 \text{ el sistema queda:}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 120 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Se transforma el sistema de inecuaciones en un sistema de ecuaciones porque es más sencillo trabajar con ecuaciones que con inecuaciones.

Para ello se agrega a cada ecuación una variable positiva denominada de ***holgura*** (slack, en inglés). Si la desigualdad es de ≤ la variable de holgura se suma, si es de ≥ la variable de holgura se resta. Las variables de holgura tienen coeficiente 0 en el funcional porque no contribuyen al valor del mismo. En este ejemplo agregamos una variable de holgura a cada inecuación que denominamos s_1 y s_2 respectivamente.

Hay tantas variables de holgura como recursos tenga el problema. ***Las variables de holgura, en la solución óptima, representan los recursos disponibles no utilizados.*** Si en la solución óptima la variable de holgura vale 0, ese recurso está **saturado** (se ha utilizado totalmente). Al agregar más variables que ecuaciones queda un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones de la cual debemos buscar la óptima. El sistema queda:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 120 \\ 3x_1 + 10x_2 + s_2 = 180 \end{cases}$$

Tenemos un sistema con **m** ecuaciones (**m** es el número de recursos o restricciones) y **n+m** variables (a las **n** variables originales se suman **m** variables de holgura).
En este caso tenemos dos ecuaciones (hay 2 recursos) y 4 variables (las 2 originales y las 2 de holgura). Todas las variables deben además ser no negativas. Una solución ***factible*** es ahora un conjunto de valores que satisfacen todas las ecuaciones y las condiciones de no negatividad, por ejemplo $S_1=\{(10;20;20;50)\}$. En cambio $S_2=\{(10;20;-20;-50)\}$ es solución pero no es factible porque tiene valores negativos.

Solución básica

Este sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. Podemos expresar algunas variables en función de las otras. Por ejemplo podemos despejar las variables de holgura y expresarlas en función de x_1 y x_2.

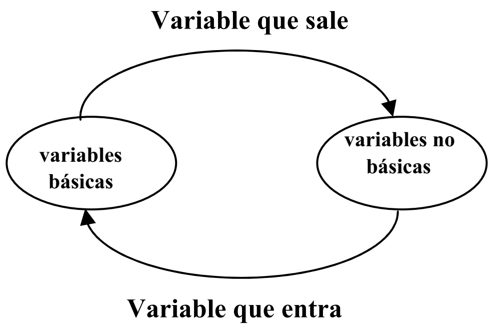
$$\begin{cases} s_1 = 120 - 6x_1 - 4x_2 \\ s_2 = 180 - 3x_1 - 10x_2 \end{cases}$$

Si le asignamos valores arbitrarios a x_1 y x_2 vamos obteniendo las infinitas soluciones del sistema. Hay que determinar cuales son factibles y de ellas cuál optimiza el funcional.

Para empezar y obtener así la solución inicial del problema hacemos $x_1 = x_2 = 0$.
Se obtiene así una ***solución básica*** que es cualquier solución que se obtenga de hacer 0 **n** de las **m+n** variables. Se puede demostrar que la solución óptima de un problema de programación lineal es una solución básica, es decir que tiene **n** variables nulas. Obtenemos así una ***solución básica factible*** (básica porque dos variables son 0 y factible porque satisface todas las restricciones). Esta primera solución básica se denomina solución básica inicial y es $S_0 = \{(0;0;120;180)\}$.
Las ***variables básicas*** iniciales son las que toman valores no nulos en la solución inicial, en este caso s_1 y s_2. Las otras variables (x_1 y x_2) son, en la solución inicial, ***variables no básicas.***

Concepto de base en el simplex

Al agregar las variables de holgura queda un sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes es de orden **m x n+m** con **m** vectores columna canónicos.



Estos vectores canónicos constituyen una base de $\mathbb{R}^m$. Las variables básicas son las que corresponden a los vectores canónicos. En este caso B = $\{s_1;s_2\}$. El método consiste en ir cambiando las variables de la base, entra una no básica y sale una básica, hasta encontrar la base que optimiza el funcional. La variable no básica que entra se transforma en variable básica y la variable básica que sale en variable no básica.

En busca de la primera tabla del método simplex

Una vez transformado el sistema de inecuaciones en un sistema de ecuaciones formamos la matriz de los coeficientes incluyendo los términos independientes.

Debajo de la matriz se colocan los coeficientes del funcional que utilizando todas las variables (las originales y las de holgura) queda $z = 45x_1 + 55x_2 + 0s_1 + 0s_2$. Dicha línea recibe el nombre de C_j (C_j son los coeficientes del funcional).

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
	6	4	1	0	120
	3	10	0	1	180
C_j	45	55	0	0	

Partimos de la solución inicial: $S_0 = \{(0;0;120;180)\}$. Además, a la izquierda de la matriz se escribe una columna con los nombres de las variables básicas en la solución inicial (x_i) y a su izquierda la columna de coeficientes que esas variables tienen en el funcional (C_i), es decir la contribución por unidad a la ganancia para las variables de la base. Se obtiene así la base inicial. En la primera tabla del simplex, como ya vimos, las variables básicas iniciales son las variables de holgura.
Al pasar a la tabla siguiente sale una variable básica y entra una variable no básica que al entrar se transforma en variable básica. Convendrá que ingrese la variable no básica cuyo coeficiente en el funcional sea mayor, es decir que contribuya a la ganancia con un mayor valor.
Así se van recorriendo los distintos vértices. Veremos luego como se determina cuál sale y cuál entra.

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
0	s_1	6	4	1	0	120
0	s_2	3	10	0	1	180
C_j		45	55	0	0	

Pasamos ahora a la siguiente tabla. En esta tabla aparecen dos filas más. Una es z_j, que se obtiene sumando los productos de los coeficientes en la columna C_i (coeficientes de las variables de la base) por los coeficientes de la columna asociada con la variable respectiva. Para la columna de los b_i se obtiene el z_j sumando los productos entre los C_i y los b_i.
Los z_0 (z_j iniciales) se obtuvieron de la siguiente manera:

para x_1: 0x6 + 0x3 = 0
para x_2: 0x4 + 0x10 = 0
para x_3: 0x1 + 0x0 = 0
para x_4: 0x0 + 0x1 = 0
para b: 0x120 + 0x180 = 0

Los z_j correspondientes a las variables indican la pérdida que se produce por cada unidad que se fabrica de cada producto (es el costo unitario de producción). Los z_j arrancan de valores z_0 (al inicio son todos 0 porque al no producirse nada no se pierde) y van variando conforme va cambiando la base.
El z_j correspondiente a la columna de los b_i indica el valor que va tomando el funcional a medida que vamos pasando de un vértice a otro (ahora vale 0). En el caso de un máximo, este valor debe ir aumentando.

La última fila de la tabla ($z_j - C_j$) es la resta de ambos. Ésta es la diferencia entre la pérdida (z_j) y la ganancia (C_j) que se produce al fabricar una unidad más de x_j.

Cada $z_j - C_j$ representa (con signo contrario), el cambio en el valor actual del funcional si la variable en esa columna aumenta de valor en 1 unidad, es decir que esa fila refleja la mejora neta que se da en la función objetivo por un aumento de una unidad de cada variable. Por eso ingresa la variable a la cual le corresponde el negativo de mayor valor absoluto.

Cuando todos los coeficientes son no negativos no se puede aumentar el funcional y se llegó a la solución óptima.

Si el problema es de ***minimización*** ingresa la variable a la cual le corresponde el positivo de mayor valor absoluto y el proceso se acaba cuando todos los coeficientes son no positivos.

Veamos la siguiente tabla y luego la analizaremos:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i	
0	s_1	6	4	1	0	120	
0	s_2	3	10	0	1	180	→
C_j		45	55	0	0		
z_0		0	0	0	0	0	
$z_0 - C_j$		-45	-55	0	0		
			↑				

En este caso por cada unidad de x_2 que entre el funcional se incrementa en 55 unidades y por cada unidad de x_1 que entre el funcional se incrementa en 45 unidades. Por eso que conviene que entre x_2.
Al haber valores de $z_j - C_j$ negativos el método continúa buscando un vértice adyacente que mejore el valor del funcional. Debemos determinar qué variable no básica entra y qué variable básica sale de la base para ir mejorando el funcional. La variable que entra, como ya vimos, es la que le corresponde el mayor valor absoluto de los $z_j - C_j$ no positivos. En este caso entra x_2 que pasa a ser variable básica. Falta determinar quién sale. Para eso se divide cada valor de los b_i por el coeficiente de la variable entrante (siempre que éstos sean no negativos*).
Se hace $\frac{120}{4} = 30$ y $\frac{180}{10} = 18$. Sale la variable a la cual le corresponde el menor cociente.
Los cocientes entre los b_i y los coeficientes de la variable que entra representan el valor con que se incorporaría la variable a la base si sale la que corresponde a esa fila.
Este valor conviene que sea lo más alto posible sin que ninguna variable se haga negativa, por eso se toma el menor cociente, de lo contrario se corre el riesgo de que la nueva solución no sea factible.
Hay que determinar qué variable básica (s_1 o s_2) se hace primero 0 al ingresar x_2. Esa es la variable que debe salir porque al hacerse 0 se

---

*Si no hay algún cociente no negativo y aún no se llegó a la solución (por haber $z_j - C_j$ negativos), el problema no tiene solución acotada. Ver situaciones especiales en página 292.

transforma en no básica.
En este caso pueden entrar 18 o 30 unidades de x_2. Si x_2 fuese 30, s_2 se hace negativa y estaríamos en una solución no factible. Veamos la situación: $s_1 = 120-6x_1-4x_2$ y $s_2 = 180-3x_1-10x_2$.
Si $x_2 = 30$, s_1 se hace 0, las nuevas variables no básicas son $s_1 = x_1 = 0$ y $s_2 = -120$, la solución sería básica pero no factible: S={(0;30;0;−120)}.
Pero si $x_2 = 18$, $s_2 = 0$, las nuevas variables no básicas son $s_2 = x_1 = 0$ y $s_1 = 48$. Queda S_1 = {(0;18;48;0)} que es una solución básica factible.
Por eso x_2 debe entrar con valor 18, es decir que se deben producir, en este punto, 18 unidades de x_2 y debe salir de la base s_2 que pasa a ser variable no básica.
Vimos que por cada unidad de x_2 que entra el funcional aumenta en 55 unidades, por lo tanto el funcional debe aumentar en 990 unidades. Esto se verá reflejado en la siguiente tabla.
El 4 y el 10 en la columna de la variable entrante indican, por cada unidad de x_2 que ingresa, que s_1 decrece 4 unidades y s_2 10 unidades; por lo tanto como entran 18 unidades de x_2, s_1 decrece 72 unidades y s_2 decrece 180 unidades a partir de los valores iniciales 120 y 160.
La intersección entre la variable que entra y la que sale determina un valor que se denomina ***pivote***. En este caso es el 10 que se obtiene de intersecar la fila correspondiente a la variable que sale (s_2) con la columna correspondiente a la variable que entra (x_2).

La siguiente tabla de la derecha se obtiene aplicando a ésta el método de Gauss-Jordan visto en el capítulo de matrices. La columna del pivote se transforma en un vector canónico, la fila del pivote se divide por el pivote y el resto de los elementos se transforman aplicando la regla del rectángulo (ver página 32). En la matriz de la izquierda aparece ahora la variable que entró (x_2) en lugar de la que salió (s_2). La nueva base es B = $\{s_1;x_2\}$. Los vectores de la base forman siempre una matriz unitaria positiva.

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i	
0	s_1	24/5	0	1	-2/5	48	→
55	x_2	3/10	1	0	1/10	18	
C_j		45	55	0	0		
z_1		33/2	55	0	11/2	990	
z_1-C_j		-57/2	0	0	11/2		

Los z_j se obtuvieron de la siguiente manera:

para x_1: $0x\frac{24}{5} + 55x\frac{3}{10} = \frac{33}{2}$

para x_2: $0x0 + 55x1=55$

para x_3: $0x1 + 55x0=0$

para x_4: $0x\left(-\frac{2}{5}\right)+55x\frac{1}{10} = \frac{11}{2}$

para b: $0x48+55x18 = 990$

Las variables básicas ahora son s_1 y x_2 que toman valores 48 y 18 respectivamente, valores que se pueden leer en la columna b_i. Las variables no básicas son x_1 y s_2. Estas variables toman valor 0 en la nueva solución, por lo tanto la nueva solución básica es $S_1 = \{(0;18;0;48)\}$. Para esta nueva solución el funcional vale 990.
Como todavía hay valores de $z_j–C_j$ negativos debemos continuar. Nuevamente hay que elegir la variable que entra y la que sale. Entra la única variable a la que le corresponde un $z_j–C_j$ negativo, es decir x_1. Para determinar quién sale debemos efectuar los cocientes entre los b_i y los coeficientes de la variable que entra (x_1).

$\frac{48}{\frac{24}{5}} = 10$, $\frac{18}{\frac{3}{10}} = 60$, sale la que le corresponde el cociente no negativo más pequeño, es decir s_1. El pivote ahora es $\frac{24}{5}$. Volvemos a transformar la matriz de la derecha aplicando el método de Gauss-Jordan. A la base entre x_1 que se convierte en variable básica y reemplaza a s_1 que pasa a ser variable no básica. La nueva base es $B = \{x_1;x_2\}$.

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
45	x_1	1	0	5/24	-1/12	10
55	x_2	0	1	-1/16	1/8	15
C_j		45	55	0	0	
z_2		45	55	95/16	25/8	**1275**
z_2-C_j		0	0	95/16	25/8	

Al ser todos los valores de z_j-C_j no negativos (positivos o 0) hemos llegado a la solución del problema que es x_1=10 y x_2=15. Conviene producir 10 bicicletas y 15 motos. El valor del funcional lo da el z_j correspondiente a la columna de los b_i, en este caso es 1275.
Las variables de holgura, al no figurar en la base, toman valor 0, es decir que $s_1 = s_2 = 0$. Esto significa que todos los recursos están saturados.
La nueva solución es $S_2 = \{(10;15;0;0)\}$.
La secuencia de los vértices que se recorrieron es: (0;0), (0;18), (10;15).
Ésta se obtiene teniendo en cuenta los valores correspondientes a las variables originales, en este caso x_1 y x_2, en la columna de los b_i cuando éstas aparecen en la base. En la primera base, x_1 y x_2 no aparecen, por lo tanto sus valores son 0, el vértice es el (0;0). En la segunda base aparece x_2 a la cual le corresponde en la columna de los b_i el valor 18, al no aparecer x_1 ésta tiene valor 0, el vértice es (0;18). En la tercera base aparecen x_1 y x_2 con valores en la columna de los b_i de 10 y 15 respectivamente. El vértice es por lo tanto el (10;15). Veamos otro ejemplo.

Otro ejemplo

En este ejemplo partimos del sistema de inecuaciones. Tenemos 3 inecuaciones y 2 incógnitas. Maximizar $z = x_1 + x_2$ sujeta a:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ 10x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Agregamos las variables de holgura, en ese caso s_1, s_2 y s_3 para transformar el sistema de inecuaciones en uno de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + s_1 = 24 \\ 4x_1 + 3x_2 + s_2 = 16 \\ 10x_1 + x_2 + s_3 = 40 \end{cases}$$, el nuevo funcional es $z = x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Formamos la primera tabla para lo cual tomamos como solución inicial $S_0 = \{(0;0;24;16;40)\}$. Esta se obtiene dándole a x_1 y x_2 valor 0, es decir tomando como variables básicas iniciales a s_1, s_2 y s_3. $B_0 = \{s_1; s_2; s_3\}$.

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	
0	s_1	2	8	1	0	0	24	
0	s_2	4	3	0	1	0	16	→
0	s_3	10	1	0	0	1	40	
C_j		1	1	0	0	0		
z_0		0	0	0	0	0	0	
$z_0 - C_j$		-1	-1	0	0	0		
		↑						

Estamos ubicados en el vértice (0;0), el funcional vale 0. Como hay valores negativos de los $z_j - C_j$ debemos pasar a otro vértice. Entra la variable x_1 (podría haber entrado x_2 porque tienen el mismo valor de $z_2 - C_j$). Para determinar quién sale debemos efectuar los cocientes entre los b_i y los coeficientes de x_1 (24:2 = 12, 16:4 = 4, 40:10 = 4). El menor cociente no negativo corresponde a s_2 (podría haber sido s_3 porque tiene el mismo cociente, que es 4). El nuevo vértice es (4;0). Entra la variable x_1 que se transforma en variable básica y sale la variable s_2 que pasa a ser variable no básica. La nueva base es $B_1 = \{s_1;x_1;s_3\}$ y la solución es $S_1 = \{(4;0;16;0;0)\}$.
Veamos como queda la nueva tabla. El pivote es el 4 que corresponde a la intersección de la fila s_2 (variable que sale) y la columna x_1 (variable que entra).

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	
0	s_1	0	13/2	1	-1/2	0	16	→
1	x_1	1	3/4	0	1/4	0	4	
0	s_3	0	-13/2	0	-5/2	1	0	
C_j		1	1	0	0	0		
z_1		1	3/4	0	1/4	0	4	
$z_1 - C_j$		0	-1/2	0	1/4	0		
			↑					

Vemos que hay valores negativos en el renglón de los $z_j - C_j$. Hay que continuar. Entra ahora x_2 y para saber cual sale volvemos a efectuar los cocientes entre los b_i y los coeficientes de x_2 (16:0,65=2,46; 4:0,75= 5,33; 0:−0,65=0). En este caso sale x_3 ya que le corresponde el menor cociente no negativo, que es 2,46. La nueva base es $B_2 = \{x_2;x_1;s_3\}$. Veamos como queda la siguiente tabla al entrar x_2 y salir s_1. La nueva solución es $S_2 = \left\{\left(\frac{28}{13};\frac{32}{13};0;0;16\right)\right\}$.

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
1	x_2	0	1	2/13	-1/13	0	32/13
1	x_1	1	0	-3/26	4/13	0	28/13
0	s_3	0	0	1	-3	1	16
C_j		1	1	0	0	0	
z_2		1	1	1/26	3/13	0	**60/13**
$z_2 - C_j$		0	0	1/26	3/13	0	

No hay $z_j - C_j$ negativos, por lo tanto se ha llegado a la solución que es $x_1 = \frac{28}{13}$ y $x_2 = \frac{32}{13}$ y el funcional vale $\frac{60}{13}$, s_3=16, corresponde a recursos no utilizados. Las variables no básicas son s_1 y s_2 que toman valor 0, corresponden a recursos saturados.

Veamos ahora un ejemplo con 3 variables

En este ejemplo también partimos del sistema de inecuaciones. Tenemos 2 inecuaciones y 3 incógnitas. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

El funcional que hay que maximizar es $z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$.
Agregamos las variables de holgura, en este caso s_1 y s_2 para transformar el sistema de inecuaciones en uno de ecuaciones.

$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_2 = 12 \end{cases}$, el funcional queda $z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 0s_1 + 0s_2$

Formamos la primera tabla tomando como variables básicas iniciales a las variables de holgura s_1 y s_2. Para eso hacemos $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. La solución inicial es $S_0 = \{(0;0;0;10;12)\}$. La base inicial es $B_0 = \{s_1; s_2\}$.

C_i	x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b_i	
0	s_1	3	2	1	0	0	10	
0	s_2	1	4	2	1	0	12	→
C_j		2	1	3	0	0		
z_0		0	0	0	0	0	0	
$z_0 - C_j$		-2	-1	-3	0	0		
				↑				

Estamos ubicados en el vértice (0;0;0), el funcional vale 0. Como hay valores negativos de los $z_j - C_j$ debemos pasar a otro vértice. Entra la variable x_3. Para determinar quién sale debemos efectuar los cocientes entre los b_i y los coeficientes positivos de x_3. El menor cociente positivo corresponde a s_2, que es 6. La nueva base es $B_1 = \{s_1; x_3\}$ y el nuevo vértice es (0;0;6). Vemos como queda la nueva tabla. El pivote es el 2 que corresponde a la intersección de la fila s_2 (variable que sale) y la columna x_3 (variable que entra).

C_i	x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b_i	
0	s_1	2,5	0	0	1	-0,5	4	→
3	x_3	0,5	2	1	0	0,5	6	
C_j		2	1	3	0	0		
z_1		1,5	6	3	0	1,5	18	
$z_1 - C_j$		-0,5	5	0	0	1,5		
		↑						

La nueva solución básica es $S_1 = \{(0;0;6;4;0)\}$. Ahora entra x_1 que es la única con $z_j - C_j$ negativo. Le toca salir a s_1 que es a la que le corresponde el menor cociente entre los b_i y los coeficientes de x_1. La nueva base es $B_2 = \{x_1; x_3\}$.

El pivote es 2,5, que es la intersección entre la fila s_1 (variable que sale) y la columna x_1 (variable que entra). Veamos la nueva tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b_i
2	x_1	1	0	0	0,4	-0,2	1,6
3	x_3	0	2	1	-0,2	0,6	5,2
C_j		2	1	3	0	0	
z_2		2	6	3	0,2	1,4	**18,8**
z_2-C_j		0	5	0	0,2	1,4	

La nueva solución básica es $S_2 = \{(1,6;0;5;2;0;0)\}$. En este caso hemos llegado a la solución por no haber z_j-C_j negativos. La solución es x_1=1,6, x_2=0 y x_3=5,2 y el funcional vale 18,8. Las variables de holgura s_1 y s_2 valen 0 por no figurar en la base, lo que quiere decir que todos los recursos están saturados.

B) Desigualdades de ≥ o restricciones de =

Al ser las desigualdades de ≥, las variables de holgura se restan y toman valor 0 en la solución inicial. En este caso las variables de holgura indican lo que la cantidad de insumo utilizada excede a la cantidad mínima.

Además, para obtener una solución factible, se agrega al lado izquierdo de la desigualdad una variable artificial no negativa (las designamos como a_i). Esto se debe a que de lo contrario, al tomar como solución factible inicial el vector nulo, las variables de holgura quedan negativas y no conviene trabajar con variables negativas. Dichas variables artificiales tienen coeficiente −M en la función objetivo si el problema es de maximización y +M si el problema es de minimización, siendo M un valor positivo muy grande.

Así se asigna a la variable artificial en la función objetivo un valor de contribución marginal que impide su aparición en la solución final.

Si la restricción es de igualdad no hace falta sumar ni restar la variable de holgura, solo se suma la variable artificial (ver ejemplo de la página 288).

SÍNTESIS DEL MÉTODO SIMPLEX

Requisitos:

1. Todas las restricciones deben formularse como ecuaciones.
2. El miembro derecho de una restricción no puede ser negativo.
3. Todas las variables están restringidas a valores no negativos.

Si el miembro derecho fuese negativo, se multiplica la inecuación por (-1)

Ejemplo: $2x_1 - x_2 \geq -2$, queda $-2x_1 + x_2 \leq 2$

Transformación de las inecuaciones en ecuaciones

1. Por cada restricción de $\leq$, al lado izquierdo de la restricción se le ***suma*** una variable no negativa, denominada ***variable de holgura***. Esta variable cumple la función de equilibrar ambos miembros de la ecuación y representa los recursos no utilizados.

Ejemplo: $x_1 - 2x_2 \leq 3 \Rightarrow x_1 - 2x_2 + s_1 = 3$

2. Por cada restricción de $\geq$, al lado izquierdo de la restricción se le ***resta*** una variable no negativa, denominada ***variable de holgura***. Esta variable cumple la función de equilibrar ambos miembros de la ecuación.

3. Por cada restricción de $\geq$ y por cada restricción (=) al miembro izquierdo de la restricción se le ***suma*** una variable no negativa, denominada ***variable artificial***.

La variable artificial carece de significado real en el problema, su única función consiste en ofrecer un punto de arranque adecuado (solución inicial) para el método simplex, habitualmente el origen.

Ejemplos:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4 \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_3 - s_1 + a_1 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow x_1 + 2x_2 - x_3 - s_1 + a_1 = 5$$

¿Cómo se obtiene la solución inicial?

Hay una variable básica por restricción. Si en la restricción figuran sólo variables de holgura, va la de holgura. Si hay una de holgura y una artificial, va la artificial. Las variables originales y las de holgura que no forman la base son las variables no básicas y por lo tanto valor 0 en la solución inicial. Los valores de las variables básicas se obtienen reemplazando en el sistema de ecuaciones.

La base inicial

En todo problema de programación lineal las variables básicas son aquellas a las que le corresponden los vectores canónicos en la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones. O sea aquellas variables que toman valores no nulos en la solución inicial.

Ejemplo

Maximizar: $2x_1 + x_2 + x_3$ sujeta a: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Transformando las restricciones: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - s_2 + a_1 = 12 \\ x_1 + x_2 - x_3 + a_2 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Para obtener la solución inicial despejamos las variables básicas en función de las no básicas.

$$\begin{cases} s_1 = 5 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ a_1 = 12 - x_1 - 4x_2 - 2x_3 + s_2 \\ a_2 = 4 - x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

Le damos a las variables no básicas valor 0, obtenemos así la solución inicial: $S_0 = \{(0;0;0;5;0;12;4)\}$. La base inicial es $B_0 = \{s_1;a_1;a_2\}$.

Ejemplos resueltos

a) Buscamos el mínimo de $z = 2x_1 + 10x_2$ sujeta a que $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 4x_1 \ge 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Para transformar el sistema de inecuaciones en uno de ecuaciones hay que tener en cuenta que la primera inecuación es de ≤, por lo tanto se la transforma sumándole una variable de holgura (s_1). La segunda inecuación es de ≥ por lo tanto para transformarla en una ecuación hay que restarle una variable de holgura (s_2) y sumarle una variable artificial (a_1). Si no le sumamos la variable artificial, al darle a las variables originales x_1 y x_2 valor 0, la variable de holgura s_2 toma valor – 20. Para evitar esto se le suma la variable artificial a_1.

Las variables de holgura en el funcional llevan coeficiente 0, y la artificial, por ser un problema de minimización, coeficiente +M. Finalmente el sistema queda así: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 - s_2 + a_1 = 20 \end{cases}$

El funcional es: $z = 2x_1 + 10x_2 + 0s_1 + 0s_2 + \mathrm{M}a_1$

Para obtener la primera solución básica factible debemos tener en cuenta que las variables no básicas son x_1, x_2 y s_1. La solución inicial es $S_0 = \{(0;0;6;0;20)\}$ y la base inicial es $B_0 = \{s_1;a_1\}$. Cuando en una ecuación hay una variable de holgura y una variable artificial la que interviene en la base inicial es la artificial ya que en la solución inicial la variable de holgura toma valor 0 porque resta.

La primera tabla es la siguiente:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b_i	
0	s_1	2	1	1	0	0	6	→
M	a_1	5	4	0	-1	1	20	
C_j		2	10	0	0	M		
z_o		5M	4M	0	-M	M	20M	
z_o-C_j		5M-2	4M-10	0	-M	0		
		↑						

Como estamos minimizando, recordemos que la búsqueda se acaba cuando todos los $z_j - C_j$ son negativos. Al haber valores positivos continuamos. Debemos ver quién entra y quién sale.

Entra la variable x_1 que es a la que le corresponde el $z_j - C_j$ positivo de mayor valor absoluto (tener en cuenta que M es un valor muy grande). Para determinar quien sale hacemos los cocientes entre los b_i y los coeficientes de x_1 (6:2=3, 20:5=4). Vemos que sale x_3 porque le corresponde el cociente positivo más pequeño que es 3.

Veamos como queda la próxima tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b_i	
2	x_1	1	0,5	0,5	0	0	3	
M	a_1	0	1,5	-2,5	-1	1	5	→
C_j		2	10	0	0	M		
z_1		2	1+1,5M	1-2,5M	-M	M	6+5M	
z_1-C_j		0	1,5M-9	1-2,5M	-M	0		
			↑					

Queda aún un $z_j - C_j$ positivo, debemos continuar la búsqueda. Entra la única variable a la que le corresponde un $z_j - C_j$ positivo que es x_2. Sale a_1 que es a la que le corresponde el único cociente entre los b_i y los coeficientes de x_2 positivo. La siguiente solución es y la siguiente base son $S_1 = \{(3;0;0;0;5)\}$ y $B_1 = \{s_1;a_1\}$. La siguiente tabla es:

C_i	x_i	x_1	X_2	s_1	s_2	a_1	b_i
2	x_1	1	0	4/3	1/3	-1/3	4/3
10	x_2	0	1	-5/30	-2/3	2/3	10/3
C_j		2	10	0	0	M	
z_2		2	10	-14	-6	6	**36**
z_2-C_j		0	0	-14	-6	6-M	

Al no haber z_j-C_j positivos, hemos llegado al final. La nueva solución es $S=\left\{\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3};0;0\right)\right\}$, y el valor del funcional es 36.

b) Buscamos el mínimo de $z = 2x_1 + x_2$ sujeta a que $\begin{cases} 5x_1+6x_2\geq 3 \\ 4x_1\geq 2 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$

Para transformar el sistema de inecuaciones en uno de ecuaciones hay que tener en cuenta que las dos inecuaciones son de ≥, por lo tanto se transforman restándoles una variable de holgura y sumándoles una variable artificial a cada una (s_1 y a_1 a la 1º y s_2 y a_2 a la 2º). Finalmente el sistema queda así: $\begin{cases} 5x_1+6\,x_2-s_1+a_1=3 \\ 4x_1-s_2+a_2=2 \end{cases}$ el funcional es:
$z = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + Ma_1 + 0s_2 + Ma_2$.

Para obtener la primera tabla debemos tener en cuenta que las variables básicas iniciales son a_1 y a_2. Por lo tanto la solución inicial es $S_0 = \{(0;0;0;3;0;2)\}$. Recordemos que las variables de holgura que restan (s_1 y s_2) también toman valor 0 en la solución inicial. En la base inicial intervienen las variables a_1 y a_2 que toman valores 3 y 2 en la solución inicial y tienen coeficiente M en el funcional. $B_0 = \{a_1;a_2\}$. Recordemos que cuando en una ecuación hay una variable de holgura y una artificial, la variable que interviene en la base inicial es la variable artificial.

La primera tabla es la siguiente:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	a_1	s_2	a_2	b_i	
M	a_1	5	6	-1	1	0	0	3	
M	a_2	4	0	0	0	-1	1	2	→
C_j		2	1	0	M	0	M		
z_0		9M	6M	-M	M	-M	M	5M	
z_0-C_j		9M-2	6M-1	-M	0	-M	0		
		↑							

Como estamos minimizando, recordemos que la búsqueda se acaba cuando todos los $z_j - C_j$ son negativos. Al haber valores positivos continuamos. Debemos ver quién entra y quién sale.

Entra la variable x_1 que es a la que le corresponde el $z_j - C_j$ positivo de mayor valor absoluto (tener en cuenta que M es un valor positivo muy grande). Para determinar quien sale hacemos los cocientes entre los b_i y los coeficientes de x_1 (3/5=0,6, 2/4=0,5). Vemos que sale a_2 porque le corresponde el cociente positivo más pequeño que es 0,5.

Veamos como queda la próxima tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	a_1	s_2	a_2	b_i	
M	a_1	0	6	-1	1	1,25	-1,25	0,5	→
2	x_1	1	0	0	0	-0,25	0,25	0,5	
C_j		2	1	0	M	0	M		
z_1		2	6M	-M	M	1,25M-0,5	-1,25M+0,5	0,5M+1	
z_1-C_j		0	6M-1	-M	0	1,25M-0,5	-2,25M+0,5		
			↑						

La solución ahora es $S_1 = \{(0,5;0;0;0,5;0;0)\}$ y $B_1 = \{a_1;x_1\}$.
Quedan aún $z_j - C_j$ positivos, debemos continuar la búsqueda. Entra la variable a la que le corresponde el $z_j - C_j$ positivo de mayor valor absoluto que es x_2. Sale a_1 (que es a la que le corresponde el menor cociente entre los b_i y los coeficientes de x_2 positivos). La nueva base es $B_2=\{x_2,x_1\}$ y la siguiente tabla es:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	a_1	s_2	a_2	b_i
1	x_2	0	1	-1/6	1/6	5/24	-5/24	1/12
2	x_1	1	0	0	0	-0,25	0,25	0,5
C_j		2	1	0	M	0	M	
z_2		2	1	-1/6	1/6	-7/24	7/24	**13/12**
z_2-C_j		0	0	-1/6	1/6-M	-7/24	7/24-M	

Al no haber $z_j - C_j$ positivos, hemos llegado al final. La solución es $S = \left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{12};0;0;0;0\right)\right\}$, y el valor del funcional es 13/12.

EL PROBLEMA DUAL

A cada problema de programación lineal, que denominamos ***primal***, le corresponde un segundo problema de tal programación que recibe el nombre de ***dual***. Cuando el primal es de maximización, el dual es de minimización y viceversa. Por ejemplo, si el problema primal plantea la maximización del beneficio, el problema dual plantea la minimización del costo. El número de variables originales del problema dual es igual al número de restricciones del problema primal y el número de restricciones del problema dual es igual al número de variables del problema primal.

Si el problema primal tiene la siguiente forma estandar:

$A.X \leq B$ $\qquad$ $A^t.Y \leq C$

$X \geq 0$ $\qquad$ la forma estandar del dual es: $\qquad$ $Y \geq 0$

$z = C.X \rightarrow$ máx $\qquad$ $z^* = B.Y \rightarrow$ mín

Si el problema primal tiene la siguiente forma estandar:

$A.X \geq B$ $\qquad$ $A^t.Y \leq C$

$X \geq 0$ $\qquad$ la forma estandar del dual es: $\qquad$ $Y \geq 0$

$z = C.X \rightarrow$ mín $\qquad$ $z^* = B.Y \rightarrow$ máx

Síntesis de las características del problema dual

a) El dual tiene una variable para cada restricción en el problema primal.
b) El dual tiene tantas restricciones como variables existen en el problema primal.
c) El dual de un problema de maximización es un problema de minimización y viceversa.
d) Los coeficientes del funcional del problema original son los términos independientes de las restricciones del dual y los términos independientes de las restricciones originales son los coeficientes del funcional del problema dual.
e) Los coeficientes de una variable cualquiera en las inecuaciones del problema original aparecen como coeficientes de una inecuación en el dual, pero transpuestos.
f) Las desigualdades tienen sentidos inversos en el problema dual y en el problema original.

Teorema fundamental de la dualidad

Si existe un valor óptimo para cada uno de los problemas, dual y primal, el valor mínimo que toma la función objetivo z^* del problema dual coincide con el valor máximo que toma la función objetivo z en el problema original o primal.

NOTA: A veces, en lugar de resolver problemas de minimización con restricciones de $\geq$, que suele ser más complicado por la intervención de las variables artificiales, conviene resolver el problema dual que es de maximización con restricciones de $\leq$.

Ejemplo

$$\text{Minimizar } 5x_1 + 9x_2 \text{ sujeta a: } \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + 10x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Planteamos el problema dual que es: maximizar $z^* = -6y_1 + 10y_2 + 9y_3$

sujeta a: $\begin{cases} -3y_1 + 5y_2 + y_3 \leq 5 \\ -2y_1 + y_2 + 10y_3 \leq 9 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$

Resolvemos este problema aplicando el método Simplex. Agregamos las variables de holgura s_1 y s_2: $\begin{cases} -3y_1 + 5y_2 + y_3 + s_1 = 5 \\ -2y_1 + y_2 + 10y_3 + s_2 = 9 \end{cases}$, el funcional es $z^* = -6y_1 + 10y_2 + 9y_3 + 0s_1 + 0s_2$.

La primera solución es el $S_0 = \{(0;0;0;5;9)\}$. La base inicial es $B_0 = \{s_1;s_2\}$ Veamos la primera tabla:

C_i	y_i	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	b_i	
0	s_1	-3	5	1	1	0	5	→
0	s_2	-2	1	10	0	1	9	
C_j		-6	10	9	0	0		
z_0^*		0	0	0	0	0	0	
$z_0^*-C_j$		6	-10	-9	0	0		
			↑					

Como hay valores negativos de los $z^*_j - C_j$ debemos pasar a otro vértice. Entra la variable y_2. Para determinar quién sale debemos efectuar los cocientes entre los b_i y los coeficientes de y_2. El menor cociente no negativo corresponde a s_1, que es 1. La nueva base es $B_1 = \{y_2;s_2\}$.

Vemos como queda la nueva tabla. El pivote es el 5 que corresponde a la intersección de la fila s_1 (variable que sale) y la columna y_2 (variable que entra).

C_i	y_i	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	b_i	
10	y_2	-0,6	1	0,2	0,2	0	1	
0	s_2	-1,4	0	9,8	-0,2	1	8	→
C_j		-6	10	9	0	0		
z_1^*		-6	10	2	2	0	10	
z_1^*-C_j		0	0	-7	2	0		
				↑				

La nueva solución es S_1 = {(0;1;0;0;8)}. Ahora entra y_3 que es la única con $z_j - C_j$ negativo. Le toca salir a s_2 que es a la que le corresponde el menor cociente entre los b_i y los coeficientes de y_3. La nueva base es B_1={y_2;y_3}.

El pivote es 9,8, que es la intersección entre la fila s_2 (variable que sale) y la columna y_3 (variable que entra). Veamos la nueva tabla:

C_i	y_i	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	b_i
10	y_2	-0,571	1	0	0,204	-0,02	0,836
9	y_3	0,143	0	1	-0,02	0,102	0,816
C_j		-6	10	9	0	0	
z_2		-4,423	10	9	1,86	0,718	**15,7**
z_2-C_j		1,577	0	0	$\boxed{1,86}$	$\boxed{0,718}$	

La nueva solución es S_2 = {(0;0,836;0,816;0;0)}. En este caso hemos llegado a la solución por no haber $z_j - C_j$ negativos. La solución es y_1 = 0, y_2 = 0,836 e y_3 = 0,816 y el funcional vale 15,7.

Esta es la solución del dual, es decir la solución del problema de maximización. A partir de esta solución se obtiene la solución del problema original. El funcional, como indica el teorema de las dualidad vale también 15,7. Los valores de las variables x_1 y x_2 del problema original también se encuentran en la tabla bajo las columnas correspondientes a las variables de holgura s_1 e s_2, en la fila z_j. Es decir x_1=1,86 y x_2 = 0,718. Para verificar este resultado reemplazamos estos valores en el funcional del problema original $5x_1+9x_2$ = 15,7.

Otro ejemplo

Maximizar $20x_1 + 40x_2$ sujeta a: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 500 \\ x_1 + x_2 \leq 200 \\ x_2 \leq 100 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Planteamos el problema dual que es: minimizar $500y_1 + 200y_2 + 100y_3$

sujeta a: $\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 20 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 \geq 40 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$

Resolvemos el problema primal (de maximización) aplicando el método Simplex a partir del cual obtendremos la solución del problema de minimización. Agregamos las variables de holgura:

$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + s_1 = 500 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 200 \\ x_2 + s_3 = 100 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$, el funcional es $z = 20x_1 + 40x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$.

La primera solución es $S_0 = \{(0;0;500;200;100)\}$, el funcional vale 0. La base inicial es $B_0 = \{s_1;s_2;s_3\}$.Veamos la primera tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	
0	s_1	2	4	1	0	0	500	
0	s_2	1	1	0	1	0	200	
0	s_3	0	**1**	0	0	1	100	→
C_j		20	40	0	0	0		
z_0		0	0	0	0	0	0	
z_0-C_j		-20	-40	0	0	0		
			↑					

Como hay valores negativos de los $z_j – C_j$ debemos pasar a otro vértice, decir vamos en busca de una nueva solución. Entra la variable x_2. Para determinar quién sale debemos efectuar los cocientes entre los b_i y los coeficientes de x_2. El menor cociente positivo corresponde a s_3, que es 100. La siguiente solución es $S_1 = \{(0;100;0;100;100)\}$. La nueva base es $B_1 = \{x_2;s_2;s_3\}$. Vemos como queda la nueva tabla. El pivote es el 1 que corresponde a la intersección de la fila s_3 (variable que sale) y la columna x_2 (variable que entra).

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
0	s_3	2	0	1	0	-4	100
0	s_2	1	0	0	1	-1	100
40	x_2	0	1	0	0	1	100
C_j		20	40	0	0	0	
z_1		0	40	0	0	40	4000
z_1-C_j		-20	0	0	0	40	

Ahora entra x_1 que es la única con $z_j - C_j$ negativo. Le toca salir a s_1 que es a la que le corresponde el menor cociente entre los b_i y los coeficientes de x_1.
El pivote es 2, que es la intersección entre la fila s_1 (variable que sale) y la columna x_1 (variable que entra). Veamos la nueva tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
20	x_1	1	0	0,5	0	-2	50
0	s_2	0	0	-0,5	1	1	50
40	x_2	0	1	0	0	1	100
C_j		20	40	0	0	0	
z_2		20	40	10	0	0	5.000
z_2-C_j		0	0	10	0	0	

La nueva solución es $S_2 = \{(50;100;0;50;0)\}$ y ahora la nueva base es $B_2 = \{x_1;x_2;s_2\}$. En este caso hemos llegado a la solución por no haber $z_j - C_j$ negativos. La solución es $x_1 = 50$, $x_2 = 100$ y el funcional vale 5.000. $s_2 = 50$, valor que corresponde a recursos no utilizados.

Esta es la solución del primal, es decir la solución del problema de maximización. A partir de esta solución se obtiene la solución del problema dual. El funcional, como indica el teorema de las dualidad vale también 5.000. Los valores de las variables y_1, y_2 e y_3 del problema original también se encuentran en la tabla bajo las columnas correspondientes a las variables de holgura s_1, s_2 y s_3, en la fila z_j. Es decir $y_1=10$, $y_2 = 0$ e $y_3 = 0$. Los valores de las variables de holgura del problema dual se encuentran bajo las columnas correspondientes a las variables originales en el renglón $z_j – C_j$, $s_{d1} = 0$, $s_{d2} = 0$.
Para verificar este resultado reemplazamos estos valores en el funcional del problema dual: $500y_1 + 200y_2 + 100y_3 = 5.000$.

Correspondencia de las variables

Hemos visto que existe una relación entre los valores que toman las variables de ambos problemas en la solución óptima.

A las variables originales del problema primal le corresponden las variables de holgura del dual y a las variables de holgura del problema primal le corresponden las variables originales del problema dual.

Interpretación del problema dual

Como en todo problema económico el objetivo es producir la mayor cantidad de bienes posibles con una cantidad de recursos dados o bien, utilizar la menor cantidad de recursos para fabricar una cantidad de bienes determinada.

En el primer caso estamos en el problema primal y en el segundo caso en el problema dual.

En este caso en el problema primal buscamos cuantas unidades (x_1, x_2, …, x_n) de n productos debemos producir para maximizar la ganancia sujetos a restricciones de m insumos.
En el problema dual buscamos minimizar la cantidad de los insumos para tener una ganancia mayor o igual a la de la función objetivo del problema primal.

Un ejemplo económico del problema dual

Veamos el siguiente problema:

Un empresario, que denominamos I, puede producir 2 bienes, X_1 y X_2. Los insumos que requiere son mano de obra, con una disponibilidad de 120, y capital, con una disponibilidad de 80.
Cada unidad del bien X_1 requiere 5 unidades de mano de obra y 2 unidades de capital.
Cada unidad del bien X_2 requiere 2 unidades de mano de obra y 3 unidades de capital.
A su vez, cada unidad de X_1, genera una ganancia de 3$ y cada unidad del bien X_2 una ganancia de 10$. Se plantea qué cantidades de los bienes X_1 y X_2 debe producir el empresario I para maximizar su ganancia.

Dado este problema, tenemos las siguientes restricciones y el siguiente funcional: $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 120 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$, $z = 3x_1 + 10x_2 \rightarrow$ máximo

Veamos ahora el problema dual de éste.

Otra opción que tiene el empresario I es alquilar la mano de obra y el capital disponible a un empresario II. El empresario II debe determinar cuánto va a pagar por cada unidad de mano de obra (y_1) y por cada unidad de capital (y_2) que alquila para minimizar su costo.

$z^* = 120\, y_1 + 80\, y_2 \rightarrow$ mínimo

Esto desde el punto de vista del empresario II. Pero para que la operación de alquiler se realice, el empresario I debe obtener por la operación por lo menos lo mismo que obtiene por fabricar sus productos.
Por cada unidad del producto X_1 que no se produce, quedan disponibles 5 unidades de mano de obra y 2 de capital. Por cada unidad del producto X_2 que no se produce, quedan disponibles 4 unidades de mano de obra y 3 de capital.

El pivote es 2,5, que es la intersección entre la fila s_1 (variable que sale) y la columna x_1 (variable que entra). Veamos la nueva tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b_i
2	x_1	1	0	0	0,4	-0,2	1,6
3	x_3	0	2	1	-0,2	0,6	5,2
C_j		2	1	3	0	0	
z_2		2	6	3	0,2	1,4	**18,8**
z_2-C_j		0	5	0	0,2	1,4	

La nueva solución básica es $S_2 = \{(1,6;0;5,2;0;0)\}$. En este caso hemos llegado a la solución por no haber z_j-C_j negativos. La solución es x_1=1,6, x_2=0 y x_3=5,2 y el funcional vale 18,8. Las variables de holgura s_1 y s_2 valen 0 por no figurar en la base, lo que quiere decir que todos los recursos están saturados.

B) Desigualdades de ≥ o restricciones de =

Al ser las desigualdades de ≥, las variables de holgura se restan y toman valor 0 en la solución inicial. En este caso las variables de holgura indican lo que la cantidad de insumo utilizada excede a la cantidad mínima.
Además, para obtener una solución factible, se agrega al lado izquierdo de la desigualdad una variable artificial no negativa (las designamos como a_i). Esto se debe a que de lo contrario, al tomar como solución factible inicial el vector nulo, las variables de holgura quedan negativas y no conviene trabajar con variables negativas. Dichas variables artificiales tienen coeficiente −M en la función objetivo si el problema es de maximización y +M si el problema es de minimización, siendo M un valor positivo muy grande.
Así se asigna a la variable artificial en la función objetivo un valor de contribución marginal que impide su aparición en la solución final.
Si la restricción es de igualdad no hace falta sumar ni restar la variable de holgura, solo se suma la variable artificial (ver ejemplo de la página 288).

El funcional queda: $z = -3x_1 + 2x_2 + 0s_1 - Ma_1 + 0s_2 - Ma_2 \rightarrow$ máximo. La solución inicial es $S_0 = \{(0;0;4;4;0;6)\}$.

Recordemos que las variables de holgura que restan, en este caso s_2, son variables no básicas y por lo tanto en la solución inicial valen 0. La base inicial es $B_0 = \{s_1;a_1;a_2\}$.

Veamos la primera tabla

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	a_1	s_2	a_2	b_i	
0	s_1	1	-1	1	0	0	0	4	
-M	a_1	-1	1	0	1	0	0	4	→
-M	a_2	1	0	0	0	-1	1	6	
C_j		-3	2	0	-M	-M	-M		
z_0		0	-M	0	-M	-M	-M	-10M	
z_0-C_j		3	-M-2	0	0	0	0		
			↑						

La única variable con coeficiente negativo en el renglón de $z_j - C_j$ es x_2, por lo tanto entra x_2 y le corresponde salir a a_1 que es la única variable a la que le corresponde un coeficiente positivo de x_2. La nueva base es $B_1 = \{s_1;x_2;a_2\}$. Veamos la siguiente tabla.

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	a_1	s_2	a_2	b_i	
0	s_1	0	0	1	1	0	0	8	
2	x_2	-1	1	0	1	0	0	4	
-M	a_2	1	0	0	0	-1	1	6	→
C_j		-3	2	0	-M	0	-M		
z_1		-2-M	2	0	2	M	-M	8-6M	
z_1-C_j		1-M	0	0	2+M	M	0		
		↑							

La nueva solución es $S_1 = \{(0;4;8;0;0;6)\}$, entra x_1 y sale a_2. La nueva base es $B_2=\{s_1;x_2;x_1\}$.

Veamos la nueva tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	a_1	s_2	a_2	b_i
0	s_1	0	0	1	1	0	0	8
2	x_2	0	1	0	1	-1	1	10
-3	x_1	1	0	0	0	-1	1	6
C_j		-3	2	0	-M	0	-M	
z_2		-3	2	0	2	1	-2	2
z_2-C_j		0	0	0	2+M	1	-2+M	

La nueva solución es $S_2 = \{(6;10;8;0;0;0)\}$, que es la solución óptima porque ya no quedan coeficientes negativos en el último renglón. El funcional vale 2. Además la variable de holgura s_1 vale 8 y corresponde a recursos no utilizados. $s_2 = 0$, lo que significa que el recurso 1 está saturado.

b) Minimizar $z = 12x_1 + 12x_2 - 12\,x_3$ sujeta a: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Transformamos las desigualdades en igualdades. Por ser las desigualdades de $\geq$, a cada una le restamos una variable de holgura (s_1 y s_2 respectivamente) y le sumamos una variable artificial (a_1 y a_2 respectivamente).

El sistema de restricciones queda: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - s_1 + a_1 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - s_1 + a_2 = 5 \end{cases}$

El funcional queda:

$z = 12x_1 + 12x_2 - \ 12\,x_3 + 0s_1 + \ \mathrm{M}a_1 + 0s_2 + \ \mathrm{M}a_2 \rightarrow$ mínimo

La solución inicial es $S_0 = \{(0;0;0;0;2;0;5)\}$. Recordemos que las variables de holgura que restan, en este caso s_1 y s_2, son variables no básicas y por lo tanto en la solución inicial valen 0. La base inicial es $B_0 = \{a_1;a_2\}$.

Veamos la primera tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	s_2	a_2	b_i	
M	a_1	1	1	-2	-1	1	0	0	2	→
M	a_2	-1	1	1	0	0	-1	1	5	
C_j		12	12	-12	0	M	0	M		
z_0		0	2M	-M	-M	M	-M	M	7M	
z_0-C_j		-12	2M-12	-M-12	-M	0	-M	0		
			↑							

La única variable con coeficiente positivo en el renglón de $z_j–C_j$ es x_2, por lo tanto entra x_2 y le corresponde salir a a_1 que es la variable a la que le corresponde el menor cociente positivo. La nueva base es $B_1 = \{x_2;a_2\}$. Veamos la siguiente tabla.

C_i	x_i	x_1	x_2	x_3	S_1	a_1	s_2	a_2	b_i	
12	x_2	1	1	-2	-1	1	0	0	2	
M	a_2	-2	1	3	1	-1	-1	1	3	→
C_j		12	12	-12	0	M	0	M		
z_1		12-2M	12	-24+3M	-12+M	12-M	-M	M	24+3M	
z_1-C_j		-2M	0	-12+3M	-12+M	12-M	-M	0		
				↑						

La nueva solución es $S_1 = \{(0;2;0;0;0;0;3)\}$, entra x_3 y sale a_2. La nueva base es $B_2=\{x_2;x_3\}$. Veamos la nueva tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	s_2	a_2	b_i
12	x_2	-1/3	1	0	-1/3	-1/3	-2/3	2/3	4
-12	x_3	-2/3	0	1	1/3	-1/3	-1/3	1/3	1
C_j		12	12	-12	0	M	0	M	
z_2		4	12	-12	-8	8	-4	4	**36**
z_2-C_j		-8	0	0	-8	8-M	-4	4-M	

La nueva solución es $S_2 = \{(0;4;1;0;0;0;0)\}$, que es la solución óptima porque ya no quedan coeficientes positivos en el último renglón. El funcional vale 36. Además las variables de holgura valen 0, lo que significa que los recursos están saturados.

SITUACIONES ESPECIALES

Veamos algunas situaciones especiales que se pueden plantear al aplicar el método simplex.

El problema tiene situaciones óptimas alternativas

A veces la solución óptima del problema, no es única. Veamos como se detecta esa situación en la tabla final del simplex.

Supongamos el siguiente ejemplo:

Maximizar $z = 200\, x_1 + 400\, x_2$ sujeta a: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 1.000 \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 2.000 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 800 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Procedemos a resolver el problema aplicando el método simplex:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	
0	s_1	2	4	1	0	0	1.000	
0	s_2	6	4	0	1	0	2.000	
0	s_3	2	4	0	0	1	800	→
C_j		200	400	0	0	0		
z_0		0	0	0	0	0	0	
z_0-C_j		-200	-400	0	0	0		
			↑					

Pasamos a la siguiente tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
0	s_1	0	0	1	0	-1	200
1	s_2	4	0	0	1	-1	1.200
400	x_2	1/2	1	0	0	1/4	200
C_j		200	400	1	0	0	
z_1		200	400	0	0	100	80.000
z_1-C_j		0	0	0	0	100	

Hemos llegado a la solución óptima que es $S_1 = \{(0;200;200;1.200;0)\}$. En esta solución se produce solo el producto 2 (200 unidades) y sobran 200 unidades del recurso 1 y 1.200 unidades del recurso 2. Habitualmente a las variables no básicas le corresponde valor no nulo en el renglón z_j–C_j.

Pero vemos en este caso que a la variable no básica x_1 le corresponde el valor 0 en el renglón z_j–C_j. Cuando esto ocurre quiere decir que ***hay otra solución óptima o una solución óptima alternativa,*** que surge de hacer entrar a la variable x_1. Lo que pasa es que el funcional no va a mejorar. A ambas soluciones óptimas le corresponde el mismo funcional.

Nota: para que la solución óptima sea única en el renglón z_j–C_j debe haber tantos ceros como variables básicas. Aquí hay 3 variables básicas y 4 ceros, la solución óptima no es única. Veamos como queda la nueva solución que se obtiene haciendo entrar a x_1:

Nota: Si hay 2 soluciones óptimas alternativas, tal cual lo plantea el teorema formulado en la página 257, hay infinitas soluciones óptimas que son todas las combinaciones lineales convexas entre ambas soluciones.

Veamos como queda la nueva solución que se obtiene haciendo entrar a $x_{1.}$

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
0	s_1	0	0	1	0	-1	200
200	x_1	1	0	0	1/4	-1/4	300
400	x_2	0	1	0	-1/8	3/8	50
C_j		200	400	1	0	0	
z_2		200	400	0	0	100	80.000
z_2-C_j		0	0	0	0	100	

Ahora tenemos una nueva solución óptima que es $S_2 = \{(300;50;200;0;0)\}$. El funcional vale lo mismo que antes, 80.000. En esta solución se producen ambos productos y sobran 200 unidades del recurso 1. Si ahora entrara s_2 volveríamos a la solución óptima anterior.

Las infinitas soluciones se pueden expresar:

$\alpha_1.(0;200)+(1-\alpha_1).(300;50)$, $0 \leq \alpha_1 \leq 1$.

Una elección con criterio "ético-social"

Cuando hay soluciones óptimas alternativas, a veces se puede elegir la opción más adecuada teniendo en cuenta un criterio "ético-social".
Por ejemplo, en este caso, si consideramos que socialmente es importante producir ambos productos para no generar un desabastecimiento (por ejemplo de un medicamento), debemos elegir la segunda opción, que es donde se producen ambos productos.

Si el recurso 2 fuese "mano de obra", también conviene elegir la segunda opción porque no queda gente desocupada.

Veamos otro ejemplo

Una empresa elabora 2 productos x_1 y x_2 para lo cual utiliza 3 insumos. La contribución marginal de cada artículo es de \$6 y \$8 por unidad para x_1 y x_2 y respectivamente. La matriz de requerimientos de insumos por unidad de artículo y la disponibilidad de los mismos se da en la siguiente tabla:

Productos / Recursos	x_1	x_2	Disponibilidad
Mano de obra	1	3	210 (horas-hombre)
Materia prima	3	4	330 (unidades de materia prima)
Maquinaria	3	1	240 (horas máquina)

Procedemos a resolver el problema aplicando el método simplex:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	
0	s_1	1	3	1	0	0	210	
0	s_2	3	4	0	1	0	330	
0	s_3	3	1	0	0	1	240	→
C_j		6	8	0	0	0		
z_0		0	0	0	0	0	0	
z_0-C_j		-6	-8	0	0	0		
			↑					

Pasamos a la siguiente tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
0	s_1	0	0	1	0	-1	200
1	s_2	4	0	0	1	-1	1.200
400	x_2	1/2	1	0	0	1/4	200
C_j		200	400	1	0	0	
z_1		200	400	0	0	100	80.000
z_1-C_j		0	0	0	0	100	

Ausencia de solución factible

Analicemos el siguiente ejemplo:

Maximizar $z = 10\,x_1 + 20\,x_2$ sujeta a: $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \ge 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Evidentemente este problema carece de solución factible, Veamos qué ocurre con el simplex. Transformamos les inecuaciones en ecuaciones.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 5 \\ x_1 + x_2 - s_2 + a_1 = 20 \end{cases}$$

El funcional queda: $z = 10\,x_1 + 20\,x_2 + 0s_1 + 0s_2 - \mathrm{M}a_1$

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b_i	
0	s_1	1	1	1	0	0	5	→
-M	a_1	1	1	0	-1	1	20	
C_j		10	20	0	0	-M		
z_0		-M	-M	0	M	-M	-20M	
z_0-C_j		-M-10	-M-20	0	M	0		
			↑					

Pasamos a la siguiente tabla:

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	b_i
0	x_2	1	1	1	0	0	5
-M	a_1	0	0	-1	-1	1	15
C_j		10	20	0	0	-M	
z_1		20	20	20+M	M	-M	-15M+100
z_1-C_j		10	0	20+M	M	0	

No hay valores negativos, por lo tanto estaríamos ante la solución óptima, pero la variable a_1 tiene valor 15 y el funcional vale –15M+100, lo cual significa que la solución no es factible. El problema no tiene solución.

Soluciones no acotadas o solución infinita

Esto se da cuando el conjunto de soluciones factibles es abierto o no acotado. La situación se manifiesta en el método simplex cuando debe ingresar una variable y no existe un cociente entre los b_i y los coeficientes de la variable entrante que sea positivo.
Veamos un ejemplo:

Maximizar $z = -2\,x_1 + 3x_2$ sujeta a: $\begin{cases} x_1 \le 10 \\ 2x_1 - x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
0	s_1	1	0	1	0	10
0	s_2	2	-1	0	1	30
		-2	3	0	0	
z_0		0	0	0	0	0
z_0-C_j		2	-3	0	0	

Debería entrar x_2 pero no existe ningún coeficiente positivo de x_2 que permita determinar la variable que sale. El problema no tiene una solución acotada, es un problema de solución infinita, *z se hace infinito*.

DANTZIG, *Geeorge Bernard (1914- 2005)* y la programación lineal

Estudió en la Universidad de Maryland donde se graduó en 1936 e hizo estudios de posgrado en la Universidad de Michigan.

Siempre sostuvo que los estudios que había hecho de Matemática eran demasiado abstractos y no tenían aplicaciones. Luego hízo el doctorado de Estadística. Un día llegó tarde a su clase de Estadística y encontró en el pizarrón dos problemas que creyó que era una tarea para el hogar aunque eran problemas un poco más difíciles de los habituales. Los resolvió y los entregó a su profesor, el famoso Jerzy Neymann. Sin saberlo, había resuelto dos problemas famosos de la Estadística que hasta ese momento no tenían solución (no eran problemas de tarea).

Luego trabajó para la Fuerza Aérea como asesor matemático. En este trabajo hizo sus grandes descubrimientos. La Fuerza Aérea necesitaba una forma más rápida de calcular el tiempo de duración de las etapas de un programa de despliegue, entrenamiento y suministro logístico. Así desarrolló su método Simples que vio rápidamente que podía aplicarse a objetivos no únicamente militares sino a distintos problemas de planificación.

Una de las cosas que más sorprendió del método Simples es la rapidez con que se recorren los vértices para problemas de muchas variables.

En cuanto a la terminología un Simples es un tipo especial de conjunto convexo poliédrico.

EL MÉTODO SIMPLEX – ANÁLISIS DE POSOPTIMIZACIÓN

Al resolver un problema de optimización, aplicando el método simples, hemos visto que obtenemos las cantidades de cada producto que conviene producir para obtener, por ejemplo, el mayor beneficio y a cuánto asciende éste. También determinamos, a partir de los valores de las variables de holgura, qué recursos están saturados (variable de holgura cero), es decir, que se utilizan totalmente, y cuáles no (variable de holgura no nula).
Pero hay otros análisis que se pueden hacer a partir de la última tabla del simplex que permiten sacar conclusiones interesantes. Veamos algunas de ellas.

LA CONTRIBUCIÓN MARGINAL DEL RECURSO
LOS PRECIOS SOMBRA

Cuando en la solución óptima un recurso está saturado, es decir que la variable de holgura correspondiente es 0, se plantea el problema de ver en cuánto se incrementa la función objetivo en una unidad dicho recurso. Esto se denomina ***contribución marginal del recurso o rendimiento marginal del recurso***. También interesa saber hasta qué precio conviene pagar por esa unidad que se agrega. Ese precio se denomina ***precio sombra***.
El precio sombra es el máximo precio que conviene pagar por agregar una unidad de un recurso saturado. Evidentemente ese precio es igual a la contribución marginal del recurso ya que no conviene pagar pro esa unidad adicional más de lo que se incrementa la función objetivo.
Lo ideal es pagar por debajo del precio sombra. Es decir que el costo de incrementar en una unidad un recurso saturado deberá ser inferior a la contribución marginal para que se justifique hacerlo.
Si un insumo no se utiliza totalmente (es decir que o está saturado), su precio sombra es 0 porque no tiene sentido pagar por un recurso que sobra y por lo tanto la contribución marginal de ese recurso es 0 (adquirir mayor cantidad de ese insumo no mejora el funcional).
Veamos ahora cómo se obtienen los precios sombra. Estos valores surgen de la última tabla del simplex. Analicemos la última tabla del problema planteado en la página 271.

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
1	x_2	0	1	2/13	-1/13	0	32/13
1	x_1	1	0	-3/26	4/13	0	28/13
0	s_3	0	0	1	-3	1	16
C_j		1	1	0	0	0	
z_2		1	1	1/26	3/13	0	**60/13**
z_2-C_j		0	0	1/26	3/13	0	

En este problema hay tres recursos y dos productos. La solución óptima se obtiene si se producen 28/13 unidades de x_1, 32/13 unidades de x_2 y se obtiene una ganancia de 60/13.
Además sobran 16 unidades del recurso 3. Es decir que los recursos 1 y 2 están saturados.
Veamos ahora cual es la contribución marginal y los precios sombra de esos recursos.

Los valores de las contribuciones marginales están en el renglón z_j-C_j y corresponden a las columnas de las variables de holgura s_1, s_2 y s_3 respectivamente. O sea que la contribución marginal del recurso 1 es 1/26, la del recurso 2 es 3/13 y la del recurso 3 es 0. Es decir que si se incrementa en 1 unidad el recurso 1, la función objetivo se incrementa en 1/26 unidades monetarias, si se incrementa en 1 unidad el recurso 2, la función objetivo se incrementa en 3/13 unidades monetarias. También surge de la tabla que la contribución marginal del recurso 3 es 0, cosa que ya sabíamos por ser un recurso no saturado.
Los precios sombra son 1/26, 3/13 y 0 respectivamente. Estos son los máximos valores que se paga por incorporar 1 unidad adicional de cada recurso.

COSTO DE OPORTUNIDAD

A veces vemos que conviene no producir algún producto (en la solución óptima alguno de los x es 0). El costo de oportunidad determina como influye en z la decisión de producir una unidad de un producto que no conviene producir, es decir cuánto se pierde (disminuye el funcional) por producir una unidad de ese producto. Por lo tanto también

indica en cuánto debería modificarse (como mínimo) la contribución del producto para que convenga producirlo, es decir en cuanto debe aumentar la ganancia que vender una unidad del producto genera (cuánto debe incrementarse el coeficiente de ese producto en el funcional).
Analicemos, por ejemplo, el problema planteado en la página 273 y su última tabla.

C_i	x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b_i
2	x_1	1	0	0	0,4	-0,2	1,6
3	x_3	0	2	1	-0,2	0,6	5,2
C_j		2	1	3	0	0	
z_2		2	6	3	0,2	1,4	**18,8**
z_2-C_j		0	5	0	0,2	1,4	

La solución óptima es S = {(1,6;0;5,2;0;0)}. Vemos que no conviene producir el producto 2. Veamos cuál es el costo de producir 1 unidad del producto 2 (producto que no conviene producir).
Los costos de oportunidad de cada producto se encuentran en las fila z_j-C_j y corresponden a las columnas de cada x_i. En este caso el costo de oportunidad de x_1 es 0, el de x_2 es 5 y el de x_3 es 0. Vemos que los costos de oportunidad de los productos que conviene producir son 0, mientras que el del producto que no conviene producir es 5, es decir que la ganancia que genera la producción de una unidad de x_2 debe incrementarse en más de 5 unidades monetarias para compensar la disminución en 5 unidades monetarias del funcional. Por lo tanto la ganancia debe se mayor que 6. Si la ganancia que se obtiene por vender una unidad de x_2 aumentará a más de 6, entonces se justifica producir una unidad de x_2.
El funcional debería ser, por ejemplo: $z = 2x_1 + 7x_2 + 3x_3$.
Es el mercado el que determinará si el producto se puede vender generando una ganancia superior a 6.
El costo de oportunidad de los productos que se producen siempre es 0 porque por el hecho de producirse no generan disminución del funcional y por lo tanto no es necesario que se incremente la ganancia.

Que genera su venta para justificar producirlos. Si la variable forma parte de la solución óptima no tiene sentido modificar la cantidad producida ni esperar un aumento en la ganancia para justificar su producción.

LOS PRECIOS SOMBRA Y EL COSTO DE OPORTUNIDAD EN EL PROBLEMA DUAL

Si analizamos la tabla final del problema planteado en la página 285, observamos que a partir de esta tabla obtuvimos la solución del problema dual. Pero vemos que la solución del problema dual coincide con los precios sombra del problema primal. Ahora podemos decir que la solución el problema dual está dada por los precios sombra del problema primal y viceversa.

C_i	x_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
20	x_1	1	0	0,5	0	-2	50
0	s_2	0	0	-0,5	1	1	50
40	x_2	0	1	0	0	1	100
C_j		20	40	0	0	0	
z_2		20	40	10	0	0	**5.000**
$z_2 - C_j$		0	0	10	0	0	

Los precios sombra son 10, 0 y 0 respectivamente, los que coinciden con la solución óptima del problema dual.
Además los costos de oportunidad coinciden con los valores de las variables de holgura del problema dual, en este caso $s_{d1} = s_{d2} = 0$, valores que coinciden con los costos de oportunidad de los productos x_1, x_2. Esto es lógico ya que ambos productos integran la solución óptima.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

La solución óptima surge de los diferentes parámetros que tiene el problema, es decir de los diferentes coeficientes que aparecen en las inecuaciones. El tema que se plantea es que pasa si alguno de esos parámetros varía. Es decir, que si por ejemplo cambia la ganancia que

genera la venta de un producto o algunas de las cantidades de los insumos, etc. Se trata de ver hasta que punto pueden variar los coeficientes involucrados en el problema sin que varíe la solución óptima. Es decir, determinar el rango de valores que puede tomar un determinado coeficiente sin alterar la solución óptima.
Este análisis recibe el nombre de ***análisis de sensibilidad***.
Si el análisis revela que la solución óptima es afectada ligeramente por importantes cambios de los valores de los parámetros, se dice que la solución es ***insensible***. Pero si la solución óptima varía ante pequeños cambios en los parámetros se dice que la solución óptima es ***sensible***.

Interesa particularmente el análisis hecho sobre los coeficientes de la función objetivo y las constantes del miembro derecho de las restricciones (recursos).
El análisis de sensibilidad va a indicar un límite inferior y un límite superior, valores entre los cuales puede variar el parámetro sin que se altere la solución óptima.
Se plantean los siguientes casos.

Cambio en el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica

Veamos qué ocurre si cambia el coeficiente en la función objetivo de una variable no básica, es decir que no pertenece a la base. Si la variable no pertenece a la base no conviene producir ese producto. El tema es ver cuánto debe variar ese coeficiente para que convenga producir ese producto.

Veamos la siguiente tabla final del simplex:

C_i	x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b_i
2	x_1	1	0	0	0,4	-0,2	1,6
3	x_3	0	2	1	-0,2	0,6	5,2
C_j		2	1	3	0	0	
z_2		2	6	3	0,2	1,4	**18,8**
z_2-C_j		0	5	0	0,2	1,4	

Vemos que no conviene producir el producto x_2. Buscamos determinar cuánto puede variar el coeficiente de x_2, es decir C_2, en el funcional para que esta solución siga siendo óptima. O sea para que no convenga producir x_2.
Es evidente que si C_2 empieza a crecer, va a llegar un momento en que convendrá producir x_2 y por lo tanto la solución dejará de ser óptima.

La sensibilidad de la solución óptima a cambios de los coeficientes de la función objetivo puede determinarse añadiendo una cantidad ΔC_j al coeficiente C_j que se quiere analizar. En este caso analizamos C_2, por lo tanto le agregamos ΔC_2.
El nuevo coeficiente es: $C_2^* = C_2 + \Delta C_2$, en nuestro ejemplo $C_2^* = 1 + \Delta C_2$.
Es posible determinar cuán grande puede ser ΔC_2 teniendo en cuenta que para que x_2 no entre a la base (y por lo tanto no convenga producirlo) debe ser $z_2 - C_2^* \geq 0$.

$6 - (1+\Delta C_2) \leq 0 \Rightarrow \Delta C_2 \leq 5 \therefore C_2^* \leq 6.$

Si C_2^* fuese > 6, entonces convendrá producir x_2 y la solución óptima cambiará.
Si C_2^* fuese 6, entonces se podría producir x_2 pero no aumentará el funcional y por lo tanto se puede mantener la solución óptima anterior.

En general podemos decir que para que una variable no básica siga siendo no básica debe verificarse que $\Delta C_j \leq z_j - C_j$.

Por lo visto el análisis de sensibilidad para el caso del cambio en el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica es bastante simple. Si la utilidad de la variable no básica disminuye (en el ejemplo fuese menor que 1), no hay cambio en la solución óptima, lo mismo que si las ganancias aumentan en una cantidad inferior a $z_j - C_j$. Solamente si la contribución a las ganancias aumenta en una cantidad que sea mayor que el valor actual de $z_j - C_j$ cambia la solución óptima.

Esto es lógico si se tiene que en cuenta que una variable no está en la solución óptima porque la ganancia que se obtiene al venderla es inferior al

costo de producirla, por lo tanto debe aumentar la ganancia de venderla para justificar su producción. Si la ganancia disminuye ($\Delta C_j < 0$) seguirá no siendo conveniente producirla, por lo tanto en este caso sólo interesa el límite superior.

Cambio en el coeficiente de la función objetivo de una variable básica

Veamos qué ocurre si cambia el coeficiente en la función objetivo de una variable básica, es decir que pertenece a la base. Si la variable pertenece a la base conviene producir ese producto. El tema es ver cuánto debe variar ese coeficiente para que no convenga producir ese producto y por lo tanto cambie la solución óptima.

Si cambia la contribución de una variable básica a las ganancias (cambia el coeficiente en el funcional), entonces puede producirse uno de dos resultados. Si el coeficiente de contribución de la variable básica ***disminuye***, entonces es posible que la variable tuviera que dejar la base puesto que tal vez no fuera suficientemente redituable para seguir siendo básica. Por otro lado si la contribución a las ganancias ***aumenta*** podría obtenerse un mayor nivel de producción para la variable que se considera (aumenta el valor de x en la solución óptima).

A diferencia de los cambios en los coeficientes para variables no básicas, en el caso de variables básicas deben considerarse tanto aumentos como disminuciones en los coeficientes del funcional. En este caso interesará el límite inferior y el límite superior.

También, a diferencia del otro caso, los cambios en las contribuciones a las ganancias para una variable básica influirán sobre la solución óptima existente.

Para analizar el efecto que producen los cambios en los coeficientes del funcional de variables básicas también añadimos un coeficiente ΔC_j al coeficiente C_j que queremos estudiar.

En el caso de la variable no básica el ΔC_j afectó sola una columna de la tabla. Sin embargo, en el caso de una variable básica, puede resultar afectada más de una columna.

Por eso, para determinar los límites de ΔC_j se deben examinar todos los valores de $z_j - C_j$ que se vean afectados por ΔC_j. Debemos tener en cuenta que C_j interviene también en la base.

Volvamos al ejemplo anterior y analicemos las variaciones en el coeficiente C_1 y C_3 que corresponden a las variables básicas.

Comencemos por analizar las variaciones de C_1, para eso veamos la siguiente tabla, donde se ha incorporado ΔC_1.
Luego haremos un análisis similar para C_3.

C_i	x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b_i
$2+\Delta C_1$	x_1	1	0	0	0,4	-0,2	1,6
3	x_3	0	2	1	-0,2	0,6	5,2
C_j		$2+\Delta C_1$	1	3	0	0	
z_2		$2+\Delta C_1$	6	3	$0{,}2+4\Delta C_1$	$1{,}4-0{,}2\Delta C_1$	$\mathbf{18{,}8+1{,}6\Delta C_1}$
z_2-C_j		0	5	0	$0{,}2+4\Delta C_1$	$1{,}4-0{,}2\Delta C_1$	

Para que la solución siga siendo óptima debe verificarse que:

$0{,}2+4\Delta C_1 \geq 0$ y que $1{,}4-0{,}2\Delta C_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta C_1 \geq -0{,}5$ y $\Delta C_1 \leq 7$.

$$-0{,}5 \leq \Delta C_1 \leq 7 \Rightarrow 1{,}5 \leq C_1 \leq 9$$

Si C_1 varía entre 1,5 y 9, la solución sigue siendo óptima, de lo contrario cambia.

Además vemos que el funcional puede variar entre 18 y 30.

Veamos ahora el análisis para C_3:

C_i	x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b_i
2	x_1	1	0	0	0,4	-0,2	1,6
$3+\Delta C_3$	x_3	0	2	1	-0,2	0,6	5,2
C_j		2	1	$3+\Delta C_3$	0	0	
z_2		2	$6+2\Delta C_3$	$3+\Delta C_3$	$0{,}2-0{,}2\Delta C_3$	$1{,}4+0{,}6\Delta C_3$	**$18{,}8+5{,}2\Delta C_3$**
z_2-C_j		0	$5+2\Delta C_3$	0	$0{,}2-0{,}2\Delta C_3$	$1{,}4+0{,}6\Delta C_3$	

Para que la solución siga siendo óptima debe verificarse que:

$5 + 2\Delta C_3 \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta C_3 \geq -2{,}5$
$0{,}2 - 0{,}2\Delta C_3 \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta C_3 \leq 1$
$1{,}4 + 0{,}6\Delta C_3 \geq 0 \Rightarrow \Delta C_3 \geq -2{,}33$

De estas restricciones surge que $-2{,}33 \leq \Delta C_3 \leq 1 \Rightarrow 0{,}67 \leq C_3 \leq 4$

Además vemos que el funcional puede variar entre 7,5 y 24.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Representar gráficamente el conjunto soluciones factibles y obtener el punto óptimo

a) Maximizar $z = 3x_1 + 6x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} 20x_1 + 50x_2 \le 3.300 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 380 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

b) Maximizar $z = 3x_1 + 10x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} 20x_1 + 50x_2 \le 3.300 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 380 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c) Minimizar $z = 300x_1 + 500x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 10 \\ x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

d) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

e) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

f) Maximizar $z = 4x_1 + 3x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

g) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

h) Minimizar $z = 4x_1 + 5x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

i) Maximizar $z = 5x_1 + 3x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} 10x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 10x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

j) Minimizar $z = 3x_1 + 7x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

k) Maximizar $z = 2x_1 + x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

l) Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2) Plantear el sistema de inecuaciones correspondiente a los siguientes problemas, representar gráficamente el conjunto solución y obtener analíticamente el punto óptimo.

a) Una compañía de muebles fabrica mesas y silla. Por cada silla se necesitan 20 dm^2 de madera y 4 horas de mano de obra. Por cada mesa se necesitan 50 dm^2 de madera y e horas de mano de obra. El fabricante posee 3.300 dm^2 de madera y una planta laboral que le proporciona 380 horas de mano de obra. Además se sabe que por cada silla vendida obtiene una ganancia neta de 3 dólares y por cada mesa una ganancia neta de 6 dólares. ¿Cuántas mesas y cuántas sillas conviene fabricar para obtener la máxima ganancia posible suponiendo que se venden todos los artículos fabricados?

b) Dos alimentos sólo contienen carbohidratos y proteínas. El alimento I cuesta $0,50 el kilo y contiene 90% de carbohidratos. El alimento II cuesta $1 el kilo y contiene 60% de carbohidratos. ¿Qué combinación de estos costos dos alimentos suministra por lo menos 2 kilos de carbohidratos y 1 kilo de proteínas? ¿Cuál es el costo por kilo de esta combinación?

c) En su consumo diario promedio de alimento, un animal necesita 10 unidades del alimento A, 12 unidades del alimento B y 12 unidades del alimento C. Estos requerimientos se satisfacen cazando dos tipos de especies. Una presa de la especie I suministra 5, 2, y 1 unidades de los alimentos A, B y C respectivamente. Una presa de la especie II suministra 1, 2, y 4 unidades de los alimentos A, B y C respectivamente. Capturar una presa de la especie I requiere 3 unidades de energía, el gasto de energía correspondiente a capturar una presa de la especie II es de 2 unidades. ¿Cuántas presas de cada especie debe capturar el animal para satisfacer sus necesidades alimentarías con un mínimo gasto de energía?

d) Una industria produce autos y ciclomotores. La siguiente tabla indica las restricciones y los requerimientos de mano de obra, materia prima y maquinaria. También figura en la tabla el beneficio que se obtiene al vender 1 unidad de cada producto.
Determinar cuántos ciclomotores y cuántos autos conviene producir para obtener el mayor beneficio.

Productos / Recursos	Autos	Ciclomotores	Disponibilidad
Mano de obra	5	6	15.500
Materia prima	10	20	20.000
Maquinaria	4	4	6.000
Beneficio	3	4	

e) Un chacarero tiene a su disposición 100 hectáreas de tierra, 160 días-hombre para cultivarlo y $1.100 para invertir. Desea sembrar dos cultivos: soja y maíz. La soja requiere 1 día-hombre y una inversión de $10 hectárea; produce un beneficio de $40 por hectárea. El maíz requiere 4 día-hombre y una inversión de $20 por hectárea; produce un beneficio de $120 por hectárea. Se desea saber cuántas hectáreas de cada cultivo habrá que plantar para obtener el máximo beneficio.

f) Un granjero tiene 100 hectáreas para plantar trigo y alpiste. La semilla de trigo cuesta \$4 por hectárea y la semilla de alpiste cuesta \$6 por hectárea. El costo total de mano de obra es de \$20 por hectárea de trigo y \$10 por hectárea de alpiste. Espera tener un beneficio de \$110 por hectárea de trigo y \$150 por hectárea de alpiste. Si no desea gastar más de \$480 en semillas ni más de \$1.400 en mano de obra, ¿cuántas hectáreas de cada uno de los cultivos debe plantar para obtener la máxima ganancia?

g) Un director cinematográfico presenta dos proyectos para la realización de dos miniseries en episodios, basadas en la obra de Julio Verne.
PROYECTO 1: Viaje al centro de la tierra
PROYECTO 2: 20.000 leguas de viaje submarino
Presenta un cuadro con los costos de producción de cada episodio para cada uno de los proyectos.

	PROYECTO 1	PROYECTO 2
Escenografía	2	4
Sueldos de actores	2	2
Gastos de laboratorio	4	3

(en millones de dólares)

El productor dispone de 50.000.000 para gastos de escenografía, 40.000.000 para sueldos de actores y 50.000.000 para gastos de laboratorio. Cada capítulo del proyecto 1 se puede vender a 15.000.000 y cada capítulo del proyecto 2 a 20.000.000. ¿qué cantidad de capítulos de cada proyecto conviene producir para optimizar el beneficio?

h) Una empresa de bicicletas produce dos modelos, profesional y familiar. Cada bicicleta profesional genera una ganancia de \$260 y cada familiar una ganancia de \$225. El modelo profesional requiere 8 horas de fabricación y 4 horas de armado. El modelo familiar requiere 5 horas de fabricación y 5 horas de armado. Se disponen de 80 horas para la fabricación de piezas y 60 horas para el armado.

¿Cuántas bicicletas de cada modelo conviene armar para obtener el máximo beneficio?

i) Un alumno debe preparar sus exámenes de Economía y Contabilidad para los que dispone de 36 horas. Cada hora dedicada a Economía le rinde 0,25 puntos y cada hora dedicada a Contabilidad le rinde 0,5 puntos. Ambas se aprueban con 4 puntos. Determinar como distribuir sus horas de estudio para obtener el máximo promedio general.

3) Resolver los problemas a, b, f, g, e i del punto 1 aplicando el método Simplex.

4) Resolver los problemas a, d, f, g, y h del punto 2 aplicando el método Simplex.

5) Obtener el óptimo de las siguientes funciones objetivo sujetas a las restricciones indicadas aplicando el método Simplex.

a) Maximizar $z = x_1 + 2x_2 + 2x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

b) Maximizar $z = x_1 - x_2 + x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

c) Maximizar $z = x_1 + x_2 - 3x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

d) Maximizar $z = 2x_1 + x_2 - x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \le -2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

e) Maximizar $z = 5x_1 + x_2 + 3x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 \le 3 \\ 4x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ x_3 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

f) Maximizar $z = 2x_1 + x_2 - 4x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 3x_3 \le 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

g) Maximizar $z = 10x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 400 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 200 \\ x_3 \le 40 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

h) Maximizar $z = 2x_1 + 12x_2 + 8x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 100 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 \le 80 \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 300 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

i) Maximizar $z = 10x_1 + 15x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 20 \\ 2x_1 + x_2 \le 48 \\ x_1 \le 20 \\ x_1 + x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

j) Maximizar $z = 15x_1 + 20x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 48 \\ 6x_1 + 9x_2 \le 216 \\ 15x_1 + 10x_2 \le 360 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

k) Minimizar $z = x_1 - x_2 - x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

l) Maximizar $z = 4x_1 + x_2 + 2x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

m) Maximizar $z = x_1 + x_2 - 3x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 3x_1 - x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

n) Maximizar $z = x_1 + x_2 + x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 - x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6) Determinar el problema del mínimo dual de los siguientes problemas de maximización. Indicar las soluciones de ambos problemas.

a) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

7) Determinar el problema del máximo dual de los siguientes problemas de minimización. Indicar las soluciones de ambos problemas.

a) Minimizar $z = 4x_1 + 5x_2$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) Minimizar $z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

8) Supongamos un problema con 3 recursos escasos y 2 productos. A partir de las siguientes tablas iniciales del simplex se pide: a) completar la tabla, b) hallar el máximo por el método simplex indicando la solución óptima, c) determinar el costo de oportunidad de cada producto, d) determinar las contribuciones marginales de cada insumo.

a)

C_i	x_i
C_j	

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
1	2				5
3	2				7
1	1				1
2	5				

b)

C_i	x_i
C_j	

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
1	2				40
2	1				50
2	2				80
100	20				

9) Dado el siguiente problema: maximizar $z = 50x_1 + 84x_2 + 60x_3$ sujeta a:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 36 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 62 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Indicar la solución óptima
b) Indicar la solución del problema dual
c) Indicar los costos de oportunidad de cada producto
d) Indicar los precios sombra
e) Determinar la sensibilidad de la solución óptima a cambios en los coeficientes de contribución de cada una de las tres variables e indicar cuáles son variables básicas y cuáles no básicas.

RESPUESTAS

1) a) (65;45), z = 435; b) (0;66), z = 660; (4;6), z = 4.200; d) sin solución; e) sin solución; f) (1;3), z =13; g) cualquier punto de la recta $2x_1+3x_2=10$ entre $\left(0;\frac{10}{3}\right)$ y (2;2), z = 10; h) (2;1), z = 13; i) $\left(\frac{10}{11};\frac{10}{11}\right)$, $z=\frac{80}{11}$ j) (1;0), z = 3; k) (1;5), z = 7; l) (0;2), z = 6.

2) a) 65 sillas y 40 mesas, z = 435 U$S.
b) alimento I = $\frac{2}{3}$ kg., alimento II = $\frac{7}{3}$ kg., costo por kg. = $\frac{8}{3}$
c) especie I = 1, especie II = 5, energía = 13 unidades
d) 1.000 autos y 500 ciclomotores, z = 5.000
e) 60 hectáreas de soja y 25 hectáreas de maíz, z = \$5.400
f) 45 hectáreas de trigo y 50 de alpiste, z = \$12.450
g) 5 cap. de Viaje al centro de la tierra y 10 cap. de 20.000 leguas, z = U$S 275.000.000
h) 5 profesionales y 8 familiares, z = \$3.100
i) 16 horas a Economía y 20 horas a Contabilidad, z = 7

5) a) $\left(\frac{5}{4};\frac{25}{8};0\right)$, z = $\frac{15}{2}$ b) $\left(\frac{13}{4};0;\frac{1}{2}\right)$, z = $\frac{15}{4}$
c) (3;2;0) y (0;5,0), hay infinitas soluciones que pertenecen al segmento que une ambos puntos, z = 5
d) (1;0;0), z = 2 e) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};1\right)$, z = $\frac{9}{2}$ f) $\left(\frac{13}{9};\frac{4}{9};0\right)$, z = $\frac{10}{3}$
g) (27,5;30;40), z = 525; h) (0;35;30), z = 660; i) (0;30), z = 450
j) sin solución; k) (3;0;1), z = 0; l) $\left(\frac{14}{3};\frac{2}{3};0\right)$, z = $\frac{58}{3}$
m) $\left(\frac{19}{5};\frac{12}{5}\right)$, z =11; n) (1;4;0), z = 5

6) a) Minimizar $z^*=5y_1+6y_2$

sujeta a: $\begin{cases} -y_1+2y_2 \geq 2 \\ y_1-3y_2 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$

b) Minimizar $z^*=5y_1+6y_2$

sujeta a: $\begin{cases} y_1+3y_2+2y_3 \geq 3 \\ 2y_1+4y_2+y_3 \geq 2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$

no tiene solución

$x_1 = \frac{8}{5}$; $x_2 = \frac{4}{5}$; $s_1 = \frac{9}{5}$; $s_2 = s_3 = 0$

$y_1 = 0$; $y_2 = \frac{1}{5}$; $y_3 = \frac{6}{5}$; $s_{d1} = s_{d2} = 0$

$z = z^* = 32/5$

7) a) Maximizar $z^*=3y_1+3y_2+7y_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \le 4 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \le 5 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1 = 7$, $x_2 = 0$,
$s_1 = 4$, $s_2 = 18$, $s_3 = 0$
$y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = 4$, $s_{d1} = 0$, $s_{d2} = 1$
$z = z^* = 28$

b) Maximizar $z^*=3y_1+7y_2+10y_3$

$$\text{sujeta a: } \begin{cases} 4y_1 + y_2 + 2y_3 \le 3 \\ 7y_1 + 3y_2 + y_3 \le 4 \\ y_1 + 5y_2 + 4y_3 \le 6 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1 = 0{,}143$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2{,}43$
$s_1 = 4$, $s_2 = 5{,}28$, $s_3 = 0$
$y_1 = 1{,}08.10^{-7}$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1{,}5$
$s_{d1} = s_{d3}$ 0, $s_{d2} = 2{,}5$
$z = z^* = 15$

8) a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $s_1 = 3$, $s_2 = 5$, $s_3 = 0$, C. de op. de $x_1 = 3$,
C. de op. de $x_2 = 0$, C_{mg} de s_1 = C_{mg} de $s_2 = 0$, C_{mg} de $s_3 = 5$

b) $x_1 = 25$, $x_2 = 0$, $s_1 = 15$, $s_2 = 0$, $s_3 = 30$, C. de op. de $x_1 = 0$,
C. de op. de $x_2 = 30$, C_{mg} de s_1 = C_{mg} de $s_3 = 0$, C_{mg} de $s_2 = 50$

9) a) $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $x_3 = 14$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 10$, $z = 1.512$
b) $y_1 = 18$, $y_2 = 12$, $y_3 = 0$; $s_{d1} = 28$, $s_{d2} = 0$, $s_{d2} = 3$, $z^* = 1.512$
c) C. de op. = 28, 0 y 0 respectivamente
d) Precios sombra = 18, 12 y 0 respectivamente
e) Variable no básica: $-\infty \le c_1 \le 78$
Variables básicas: $30 \le c_2 \le 120$, $42 \le c_3 \le 168$

Apéndice I

Algunos conceptos matemáticos básicos

En este apéndice haremos un repaso de temas que no son específicos del curso de Algebra pero cuyos conocimientos son fundamentales para abordar los temas que desarrollaremos en este texto. Veremos temas como el lenguaje matemático, las principales operaciones matemáticas y sus propiedades, algunas nociones sobre los vectores en el plano y el espacio, las ecuaciones de la recta en el plano y en el espacio, las ecuaciones del plano, entre otros temas.

EL LENGUAJE MATEMÁTICO

En matemática se utiliza un lenguaje propio que ya habrás, en parte, utilizado en la escuela secundaria o en el C.B.C. Repasamos aquí algunos de esos símbolos.

7 es ***mayor que*** 5	$7 > 5$	2 es ***menor que*** 6	$2 < 6$
el 5 ***está entre*** 2 y 8	$2 < 5 < 8$	***valor absoluto*** de x	$\lvert x \rvert$
x es mayor o igual que 3	$x \geq 3$	x es menor o igual que 6	$x \leq 6$
3 ***es*** un número natural	$3 \in N$	$\frac{1}{3}$ ***es*** un número racional	$\frac{1}{3} \in Q$
$\sqrt{2}$ ***es*** un número real	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$	-5 ***no es*** natural	$-5 \notin N$
9 es múltiplo de 3	$9=\dot{3}$	el 3 ***divide*** a 12	$3 \mid 12$
y	$\wedge$	***o***	$\vee$
implica	$\Rightarrow$	***si y sólo si***	$\Leftrightarrow$
está incluido en	$\subset$	***para todo***	$\forall$
existe al menos 1	$\exists$	***aproximadamente igual***	$\cong$
no existe	$\nexists$	***no pertenece***	$\notin$

(se lee cardinal y es el número de elementos de un conjunto)

Letras griegas más utilizadas

α alpha	δ delta minúscula	ρ rho	ε epsilon
ß betha	Δ delta mayúscula	φ phi	μ mu
γ gamma	λ lambda	π pi	

PRODUCTO CARTESIANO

Una operación muy importante que se define entre dos conjuntos es el producto cartesiano que se denomina como **AxB**. Es el conjunto formado por todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a A y cuya segunda componente pertenece a B.

$$AxB=\{(x;y)/\ x\in A\ \wedge\ y\in B\}$$

Ejemplo: $A=\{1;3;5\}$ $\quad B=\{2;5\}$

$AxB=\{(1;2),(1;5),(3;2),(3;5),(5;2),(5;5)\}$

Nota: Si $\#A=m$ y $\#B=n \Rightarrow \#AxB= mxn$

LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Repasemos ahora los distintos conjuntos numéricos

$$\textit{Complejos}\ (\mathbb{C})\begin{cases}\textit{Reales}\ (\mathbb{R})\begin{cases}\textit{Racionales}\ (Q)\begin{cases}\textit{Enteros}\ (Z)\begin{cases}\mathbb{N}_0\begin{cases}\textit{Naturales}\ (\mathbb{N})\\ 0\end{cases}\\ \textit{Enteros Negativos}\ (Z^-)\end{cases}\\ \textit{Fraccionarios}\end{cases}\\ \textit{Irracionales}\end{cases}\\ \textit{Imaginarios}\ (\mathbb{I})\end{cases}$$

ALGUNAS OPERACIONES Y SUS PRINCIPALES PROPIEDADES

Ahora veremos una síntesis de las principales operaciones y sus propiedades.

Propiedades de la Potenciación

a) $(a.b)^n = a^n . b^n$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ c) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\forall a \neq 0$ d) $a^n . a^m = a^{n+m}$

e) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ f) $(a^m)^n = a^{m.n}$ g) $(a^m)^n = (a^n)^m$ h) $a^0 = 1$, $\forall a \neq 0$

i) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$ j) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$

Propiedades de la radicación ($\forall a > 0, \forall b > 0$)

a) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$ b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ c) $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ d) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

e) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ f) $a^{\frac{-1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ g) $a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

h) $\sqrt[n]{x^n} = |x|$, $\forall$n par; $\sqrt[n]{x^n} = x$, $\forall$n impar

Operaciones con fracciones

adición $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+b.c}{b.d}$ **sustracción** $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}$

multiplicación $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$ **división** $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

Desigualdades

a) $a<b \Rightarrow a+c<b+c$ b) $a<b \Rightarrow -a>-b$ c) $a>b \Rightarrow -a<-b$

d) $a\leq b \Rightarrow a<b$ o $a=b$ e) $a\geq b \Rightarrow a>b$ o $a=b$ f) $a<b<c \Rightarrow a+x<b+x<c+x$

g) $\frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)$ h) $\frac{a}{b}<0 \Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0)$

LA SUMATORIA

El símbolo sumatoria $\sum$ se utiliza para abreviar la anotación de una suma cuyos términos admiten una cierta ley de formación.

Por ejemplo, para indicar la suma $a_1+a_2+a_3 ...+a_n$, se utiliza la notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$, i actúa como un contador.

Veamos otro ejemplo: $1^3+2^3+3^3+...+4^3+...+n^3$ se puede abreviar como $\sum_{i=1}^{n} i^3$

Propiedades de la sumatoria

1) $\sum_{i=1}^{n} k = n.k$

2) $\sum_{i=1}^{n} k.a_i = k.\sum_{i=1}^{n} a_i$

3) $\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA

Concepto

El principio de inducción completa proporciona un método de demostración por recurrencia de múltiples aplicaciones en matemática. No genera propiedades pero sí permite su demostración cuando éstas se refieren a los números naturales.

Veamos un ejemplo intuitivo de como funciona este principio. Supongamos un conjunto de fichas de dominó en una fila. Si una se cae, evidentemente se cae la de atrás. Si se cae la primera, entonces se caerán todas. Es decir que la propiedad de caerse se cumplirá para todas.

Para eso deben cumplirse las siguientes condiciones:

a) la propiedad se cumple para un valor inicial (en el ejemplo el 1, se cae la primera ficha)
b) si se cumple para uno cualquiera (se cae una ficha), se cumple para el siguiente (se cae la de atrás)
En estas condiciones podemos afirmar que se cumple para todas (todas se caen).

Principio de inducción completa

Dada una propiedad, si esta cumple que:

a) p(1) es V
b) Si p(h) es V entonces p(h+1) también es V
c) Entonces p(n) también es V $\forall n \in N$.

Para demostrar la validez general para todo número natural a partir de uno inicial (no todas las propiedades se verifican a partir del 1, algunas lo hacen a partir de otros valores, por ejemplo el 2, 3, etc.) de una propiedad debe demostrarse que ésta se verifica para ese valor inicial, y luego aceptando que se verifica para uno cualquiera (h) demostrar que se verifica para el siguiente (h+1).

Ejemplos

1) Demostrar que la suma de los **n** primeros números naturales es $\dfrac{n.(n+1)}{2}$

a) p(1) $\quad 1 = \dfrac{1+1}{2} = 1$, se verifica para n=1

b) ***Hipótesis inductiva***

Suponemos que se cumple para n=h

p(h) $\quad 1+2+3+\ldots+h = \dfrac{h.(h+1)}{2}$

c) ***Tesis inductiva***

Debemos demostrar que se verifica para n=h+1

p(h+1) $\quad 1+2+3+\ldots+h+h+1 = \dfrac{(h+1).(h+2)}{2}$

Demostración

$$1+2+3+\ldots+h+h+1 = \frac{h.(h+1)}{2} + h+1 = \frac{h.(h+1)+2.(h+1)}{2} = \frac{(h+1).(h+2)}{2}$$

Partimos del enunciado de la tesis inductiva, reemplazamos por la hipótesis inductiva los primeros términos y luego sumamos el término **h+1**. Luego operamos hasta demostrar la tesis.

Finalmente podemos afirmar que para todo número natural se verifica que:

$$S_n = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

a) p(1) $\qquad \sum_{i=1}^{1} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{1+2}{2}$

$$\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

b) p(h) $\qquad \sum_{i=1}^{h} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + ... + \frac{h}{2^h} = 2 - \frac{h+2}{2^h}$

c) p(h+1) $\qquad \sum_{i=1}^{h+1} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + ... + \frac{h}{2^h} + \frac{h+1}{2^{h+1}} = 2 - \frac{h+3}{2^{h+1}}$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + ... + \frac{h}{2^h} + \frac{h+1}{2^{h+1}} =$$

$$2 - \frac{h+2}{2^h} + \frac{h+1}{2^{h-1}} = 2 - \frac{2(h+2)-(h+1)}{2.2^h} = 2 - \frac{h+3}{2^{h+1}}$$

3) Demostrar que $\quad \forall n \in N$: $3^{2n+1} + 2^{n+2} = \dot{7}$

a) p(1) $\qquad 3^{2.1+1} + 2^{1+2} = 27 + 8 = 35 = \dot{7}$

b) p(h) $\qquad 3^{2h+1} + 2^{h+2} = \dot{7} \Rightarrow 2^h = \frac{\dot{7} - 3^{2h+1}}{4} \qquad$ 1)

c) p(h+1) $\qquad 3^{2(h+1)+1} + 2^{h+1+2} = 3^{2h+3} + 2^{h+3} = \dot{7}$

Demostración

$3^{2h+3} + 2^{h+3} = 3^{2h}.27 + 2^h.8 =$, reemplazando 2^h por 1)

$$27.3^{2h} + \frac{7k - 3^{2h+1}}{4}.8 = 27.3^{2h} + 14k - 6.3^{2h} = 21.3^{2h} + 14k = 7.(3.3^{2h} + 2k) = 7k_1$$

4) Demostrar que $2+6+18+\ldots+2.3^{n-1} = 3^n - 1$ es válido $\forall n \in N$.

a) p(1) $2=2$
b) p(h) $2+6+18+\ldots+2.3^{h-1} = 3^h - 1$
c) p(h+1) $2+6+18+\ldots+2.3^{h-1} + 2.3^h = 3^{h+1} - 1$

Demostración

$$2+6+18+\ldots+2.3^{h-1} + 2.3^h = 3^h - 1 + 2.3^h = 3.3^h - 1 = 3^{h+1} - 1$$

5) Demostrar que $2+7+12+\ldots+(5n-3) = \frac{n}{2}.(5n-1)$ es válido $\forall n \in N$.

a) p(1) $2=2$
b) p(h) $2+7+12+\ldots+(5h-3) = \frac{h}{2}.(5h-1)$
c) p(h+1) $2+7+12+\ldots+(5h-3)+(5h+2) = \frac{h+1}{2}.(5h+4)$

Demostración

$$2+7+12+\ldots+(5h-3)+(5h+2) = \frac{h}{2}.(5h-1) + 5h+2 =$$

$$\frac{h.(5h-1)+2.(5h+2)}{2} = \frac{5h^2+9h+4}{2} = \frac{(h+1).(5h+4)}{2}$$

FUNCIÓN FACTORIAL

Factorial de un número

Se llama factorial de un número natural mayor que 1 al producto de los números naturales desde n hasta 1.

$$n! = n.(n-1).(n-2)\ldots3.2.1$$

Por definición: $0! = 1$
$1! = 1$

Ejemplos: $5! = 5.4.3.2.1 = 120$
$4! = 4.3.2.1 = 24$

Propiedad: $n! = n.(n-1)! = n.(n-1).(n-2)!$

Es decir que los factoriales se pueden desarrollar hasta un determinado término. Esto permite simplificar: $\frac{7!}{5!} = \frac{7.6.5!}{5!} = 7.6 = 42$

Siempre se comienza a desarrollar el mayor.

Aplicación: hallar x si $\frac{(x+1)!}{x!} = 4$

Comenzamos a desarrollar el mayor de los factoriales, en este caso $(x+1)!$.

$$\frac{(x+1).x!}{x!} = 4 \Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x=3$$

ALGEBRA VECTORIAL

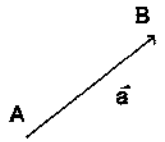
VECTORES

Primero veremos a los vectores como entes geométricos y luego como entes algebraicos.

Definición: definimos a un vector como ***un segmento orientado***. El punto A es el ***origen*** y el punto B es el ***extremo***.

Se puede expresar como $\vec{AB}$ o como $\vec{a}$. Podemos distinguir los siguientes elementos:

$$\begin{cases} \textit{dirección}: \textit{recta de acción que lo contiene} \\ \textit{sentido}: \textit{lo determina la flecha} \\ \textit{módulo}: \textit{es la longitud del segmento}: |\vec{a}| \end{cases}$$

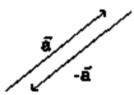


Vectores equipolentes: son los que tienen la misma dirección, sentido y módulo.

Vector nulo: es aquel en el cual A=B, tiene módulo 0, se representa como $\bar{0}$.

Versor: es un vector de módulo 1. Se representa como $\check{v}$.

Vector opuesto: de un vector $\vec{a}$ se denomina $-\vec{a}$ y es el que tiene igual dirección y módulo que $\vec{a}$, pero sentido opuesto.



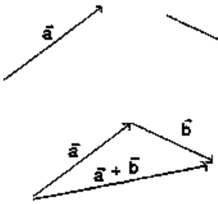
Vectores paralelos: son todos aquellos vectores incluídos en una misma recta o en rectas paralelas.

OPERACIONES

Suma

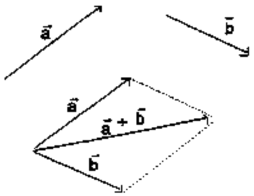
Para sumar dos vectores se procede de la siguiente manera: la suma de $\vec{a}+\vec{b}$ (coincidiendo el origen de $\vec{b}$ con el extremo de $\vec{a}$) es otro vector que tiene como origen el origen del 1° y como extremo el extremo de 2°.

Nota: si el extremo del 2° vector no coincide con el origen del 1° vector se trabaja con vectores equipolentes.



La ley del paralelogramo

Otro procedimiento es la ley del paralelogramo. El vector suma es la diagonal del paralelogramo que tiene por lados a los dos vectores. En este caso, para formar el paralelogramo, deben coincidir los orígenes de los vectores.



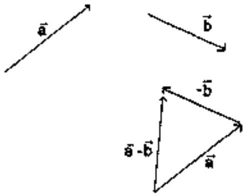
Propiedades:

a) Conmutativa: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
b) Asociativa: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
c) Existencia de elemento neutro: $\vec{0}$: $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
d) Existencia de elemento simétrico: $-\vec{a}$: $(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

Resta

Definimos la resta de dos vectores como la suma del 1° más el opuesto del 2°.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

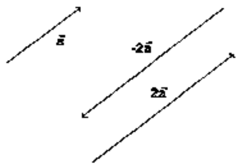


Producto de un escalar por un vector

El producto de un escalar por un vector, $\alpha . \vec{a}$,es igual a otro vector $\vec{b}$ tal que:

$$\vec{b}=\begin{cases} \textit{dirección}: \textit{igual al de } \vec{a} \\ \textit{sentido}: \textit{igual al de } \vec{b} \textit{ si } \alpha>0, \textit{ opuesto si } \alpha<0 \\ \textit{módulo}: |\vec{b}|=|\alpha|.|\vec{a}| \end{cases}$$

Ejemplo:



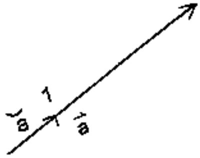
Propiedades

a) Asociatividad mixta: $(\alpha . \beta) . \vec{a}=\alpha .(\beta . \vec{a})$
b) Distributiva respecto de la suma de vectores:
$\alpha .(\vec{a}+\vec{b})=\alpha . \vec{a}+\alpha . \vec{b}$
c) Distributiva respecto de la suma de escalares:
$(\alpha+\beta) . \vec{a}=\alpha . \vec{a}+\beta . \vec{a}$
d) $1 . \vec{a}=\vec{a}$, el 1 es el neutro en $(\mathbb{R};.)$
e) $0 . \vec{a}=\vec{0}$, todo vector por 0 da el vector nulo.
f) $\alpha . \vec{0}=\vec{0}$, todo escalar por el vector nulo da el vector nulo.

VERSOR ASOCIADO A UN VECTOR

A cada vector $\vec{a}$ se le puede hace corresponder un versor llamado ***versor asociado*** denominado $\breve{a}$ que es el vector de módulo 1 que tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{a}$.
De esta manera, por lo visto anteriormente, todo vector se puede expresar como producto de su módulo por su versor asociado.

$$\vec{a}=|\vec{a}|.\breve{a} \Rightarrow \breve{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$



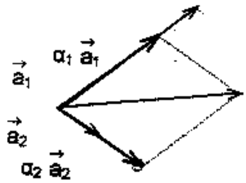
El versor asociado a un vector se obtiene dividiendo el vector por su módulo.

COMBINACION LINEAL

Si elegimos 2 vectores no paralelos (y no nulos) pertenecientes a un mismo plano $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ y trazamos por un punto O cualquiera del plano los vectores equipolentes a ellos, todo vector $\vec{a}$ del plano puede expresarse en función de los 2 vectores dados.

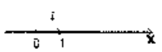
$$\vec{a}=\alpha_1.\vec{a}_1+\alpha_2.\vec{a}_2$$

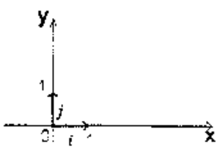
Se dice que el vector $\vec{a}$ es combinación lineal de $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$

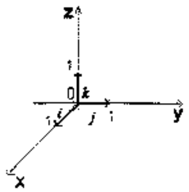


VERSORES FUNDAMENTALES

Vimos ya el concepto de versor asociado a una dirección. Se llaman versores fundamentales a los versores asociados a los ejes coordenados. Se los designa respectivamente como: $\breve{i},\breve{j},\breve{k}$







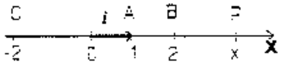
Veremos ahora a los vectores como entes algebraicos.

EXPRESION DE UN VECTOR POR SUS COORDENADAS

A cada punto P del espacio (1, 2 o 3 dimensiones) se le puede hacer corresponder un vector $\vec{OP}$ llamado ***vector posición del punto*** que tiene como origen al punto O (centro de coordenadas) y como extremo al punto P. Se establece así una correspondencia entre los vectores con origen en O y los puntos del espacio considerado. Pero como a la vez existe una correspondencia entre los puntos y los números reales, podemos establecer una relación entre los vectores y los números reales (coordenadas del punto), ya sea uno, un par o una terna de números reales según la dimensión del espacio considerado.

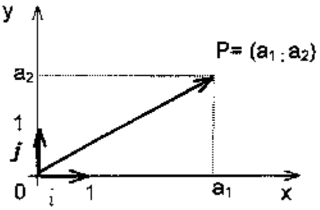
EN UNA DIMENSION

A todo punto P sobre el eje x le corresponde un vector posición con origen en O y extremo en P que se puede expresar como el producto de su coordenada (x) por el versor $\breve{i}$.



$$A = (1) = \vec{OA} = \breve{i}$$
$$B = (2) = \vec{OB} = 2\breve{i}$$
$$C = (-2) = \vec{OC} = -2\breve{i}$$
$$P = (x) = \vec{OP} = x\breve{i}$$

EN DOS DIMENSIONES

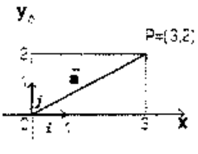


A todo punto del plano (xy), $P = (a_1;a_2)$, le corresponde un vector posición que se puede expresar como combinación lineal de los versores fundamentales $\breve{i}$ y $\breve{j}$.

$$(a_1;a_2) = \vec{OP} = \vec{a} = a_1\breve{i} + a_2\breve{j}$$

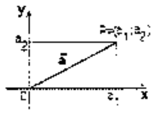
$a_1\breve{i}$ y $a_2\breve{j}$ son las componentes del vector (vectores que sumados dan $\vec{a}$)

a_1 y a_2 son las coordenadas del vector.



Ejemplo: $\vec{a} = (3;2) = 3\breve{i} + 2\breve{j}$

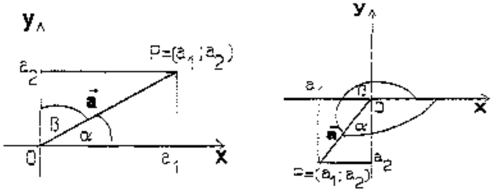
Módulo: $|\vec{a}| = a = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$



Aplicando el teorema de Pitágoras se puede obtener la expresión del módulo de un vector en función de sus coordenadas.

Angulos directores

Un vector forma con los semiejes positivos de los ejes coordenados x e y ángulos α y β llamados ***ángulos directores*** porque indican la dirección del vector. Los ángulos directores son mayores o iguales que 0° y menores o iguales que 180°.



Cosenos directores

Los cosenos directores son los cosenos de los ángulos directores.

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{a} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{a}$$

Propiedad

La suma de los cuadrados de los cosenos directores es igual a 1

$$\cos^2\alpha = \frac{a_1^2}{a^2}$$

$$\cos^2\beta = \frac{a_2^2}{a^2}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Operaciones en función de las coordenadas

Si $\bar{a} = (a_1; a_2)$ y $\bar{b} = (b_1; b_2)$

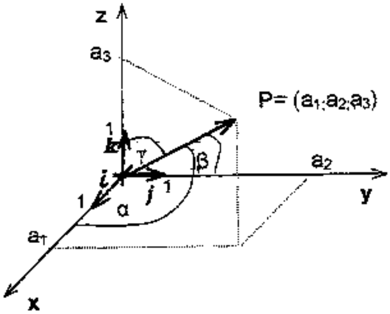
Igualdad: $\bar{a} = \bar{b} \leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$

Suma: $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$

Producto de un vector por un escalar: $\alpha . \bar{a} = (\alpha . a_1; \alpha . a_2)$

GENERALIZACION A 3 DIMENSIONES

A todo punto del espacio $P=(a_1;a_2;a_3)$ le corresponde un vector posición que se puede expresar como combinación lineal de los versores fundamentales $\breve{i}$, $\breve{j}$ y $\breve{k}$.



$$(a_1;a_2;a_3) = \vec{OP} = \vec{a} = a_1\breve{i} + a_2\breve{j} + a_3\breve{k}$$

$a_1\breve{i}$, $a_2\breve{j}$ y $a_3\breve{k}$ son las componentes del vector (vectores que sumados dan $\vec{a}$), a_1, a_2 y a_3 son las coordenadas del vector.

Módulo: $|\vec{a}| = a = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Cosenos directores

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{a} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{a} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{a} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Operaciones en función de las coordenadas

Si $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ y $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$

Igualdad: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1=b_1 \wedge a_2=b_2 \wedge a_3=b_3$
Suma: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$
Producto de un escalar por un vector: $\alpha.\vec{a} = (\alpha.a_1;\alpha.a_2;\alpha.a_3)$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

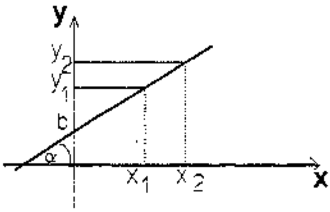
Vamos a recordar las distintas ecuaciones de la recta, en el plano y en el espacio, y luego las ecuaciones del plano.
Empezamos por las ecuaciones de la recta en el plano, es decir por la función lineal.

Función lineal f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x)=mx+b$ $Im=\mathbb{R}$

La representación gráfica de la función lineal es una recta. Observamos que si $x=0$, entonces $y=b$, es decir que b indica la intersección de la recta con el eje y, es la ***ordenada al origen***. Veremos que mide m.

Si consideramos dos puntos de la recta $P_1=(x_1;y_1)$ y $P_2=(x_2;y_2)$ tenemos que:

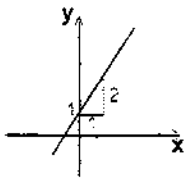
$$\begin{array}{l} y_2=mx_2+b \\ \underline{y_1=mx_1+b} \\ y_2-y_1=m(x_2-x_1) \Rightarrow m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \end{array}$$



Vemos que m mide la ***pendiente*** de la recta, es decir la tangente del ángulo que ésta forma con el semieje positivo de las x.

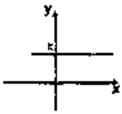
Ejemplo

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x)=2x+1$ $Im=\mathbb{R}$



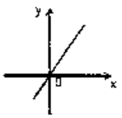
Es una función lineal cuya gráfica es una recta que corta al eje y en $y_1=1$ y tiene pendiente 2. Para representarla gráficamente partimos de la ordenada al origen ($y_1=1$) y a partir de allí tomamos 1 unidad a la derecha y 2 unidades hacia arriba (para que la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las x sea 2). *Cero:* $x_1=-0,5$. No tiene paridad.

Casos particulares



<u>**m=0**</u>: si $m=0$ la recta es horizontal y la función se denomina ***función constante***.

La función es de la forma: f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x)=k$ $Im=\{k\}$

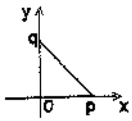


<u>**b=0**</u> si $b=0$ tenemos una recta que pasa por el origen de coordenadas. La función es de la forma: f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x)=mx$ $Im=\mathbb{R}$

Ecuación de la recta conocida m ***y un punto*** $P_0=(x_0;y_0)$: $y-y_0 = m.(x-x_0)$

Ecuación de la recta por 2 puntos $P_0=(x_0;y_0)$ ***y*** $P_1=(x_1;y_1)$: $y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$

Forma segmentaria



$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$, donde p y q representan los puntos de intersección de la recta con los ejes x e y respectivamente, ($p\neq 0$ y $q\neq 0$).

ECUACIONES DE LA RECTA EN $\mathbb{R}^3$

Recta que pasa por un punto $P_0=(x_0;y_0;z_0)$ y es paralela a un vector $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$

Ecuación vectorial: $\vec{OP}=\vec{OP}_0+\lambda.\vec{u} \rightarrow (x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda.(u_1;u_2;u_3)$

Ecuaciones cartesianas paramétricas: $\begin{cases} x=x_0+\lambda.u_1 \\ y=y_0+\lambda.u_2 \\ z=z_0+\lambda.u_3 \end{cases}$

Ecuaciones simétricas: $\dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{y-y_0}{u_2}=\dfrac{z-z_0}{u_3}$

Recta que pasa por dos puntos $P_0=(x_0;y_0;z_0)$ y $P_1=(x_1;y_1;z_1)$

Ecuación vectorial: $\vec{OP}=\vec{OP}_0+\lambda.\vec{P_0P_1} \rightarrow (x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda.(x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0)$

Ecuaciones cartesianas paramétricas: $\begin{cases} x=x_0+\lambda.(x_1-x_0) \\ y=y_0+\lambda.(y_1-y_0) \\ z=z_0+\lambda.(z_1-z_0) \end{cases}$

Ecuaciones simétricas: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$

ECUACIONES DEL PLANO

a) General

La ecuación general del plano en el espacio es: $ax+by+cz+d=0$

a,b y c son las componentes de un vector perpendicular al plano.
Si d=0, $\Rightarrow$ el plano pasa por el origen de coordenadas.

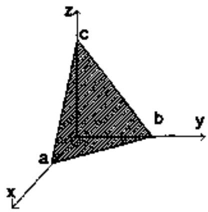
b) Plano que pasa por un punto $P_0=(x_0;y_0;z_0)$ y es perpendicular a un vector $\vec{n}=(a;b;c)$

$$a(x-x_0) + b.(y-y_0) + c.(z-z_0) = 0$$

c) Plano que pasa por 3 puntos: $P_0=(x_0;y_0;z_0)$, $P_1=(x_1;y_1;z_1)$ y $P_2=(x_2;y_2;z_2)$

Se obtiene resolviendo el siguiente determinante aparente: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$

d) Ecuación segmentaria del plano



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

donde a, b y c representan los puntos de intersección con cada uno de los ejes coordenados.

Apéndice II

Misceláneas

Las misceláneas que incluimos son algunas notas ilustrativas extraídas de Modern Algebra, Structure and Method, del Profesor Bolciani.

THE HUMAN
EQUATION

At the Court of the Caliphs

Aladdin, Sindbad, and Harun al-Rashid — these names are familiar to you from *The Arabian Nights.* Have you supposed them to be the names of mythical characters? Harun al-Rashid, at least, was real. He reigned in Bagdad from 796 to 808. He not only went about among his subjects, as recorded in *The Book of a Thousand Nights and a Night;* he also encouraged his nobles to study science and mathematics.

During his reign the Mohammedans were invading and conquering the non-Moslem lands to the west of them, including northern Africa. Thus the learning that centered at the University of Alexandria became a prize of war: books in Greek were brought to Bagdad from Alexandria. It was Harun al-Rashid who caused them to be translated into Arabic.

Soon Mohammedan scholars were engaged in the serious study of mathematics. Among these scholars was the caliph's son, Al-Mamun. By the time he succeeded his father as caliph, there was, in the words of *The Arabian Nights* (for Al-Mamun also figures in those tales), "none more accomplished in all branches of knowledge than he." It was only natural that his court should include many learned men.

One of Al-Mamun's scholarly courtiers — the greatest mathematician in all Arabia — was Al-Khowarazmi. He wrote a book with this title: *Ilm al-jabr wa'l muqabalah.* The book was called *al-jabr* for short. This shortened title has been used for many books from Al-Khowarazmi's day to the present. Of course, the spelling has changed. Now it is usually spelled *algebra.*

Arabian scholars at work. When this picture was made, Bagdad was the center of learning. Interest in astronomy made knowledge of algebra necessary, and the development of algebra made possible increased knowledge of astronomy.

THE HUMAN EQUATION

The Amateur Father of Algebra

The time was the sixteenth century. France and Spain were at war. As in every war, both sides sent their messages in code to hide their plans from the enemy. Obviously, secrecy was important.

But the Spanish secret could not be kept. Not that the Spaniards didn't try. When the French captured a Spanish messenger, they read the message as accurately as any Spaniard could have read it. How could this thing be? The Spaniards knew their codes were baffling. How could a mere Frenchman decipher them? In fact, how could any man, unless he had the key? The conclusion was obvious. Something more than man must be at work. The French must be in league with the Devil. They must be using black magic!

The Spaniards complained to the Pope. But the Pope was too wise to interfere, for it was not the Devil who was breaking the codes; it was a French lawyer named Vieta. Nor was it by magic that he did his work, but by mathematics. For Vieta was a lawyer with a hobby, and his hobby was algebra. Code-breaking was nothing to him but solving equations.

The French king owed Vieta a debt of gratitude. So do generations of algebra students. For Vieta not only broke the Spanish code; he simplified the whole subject of algebra. Before his time, there was practically no use of signs and symbols; everything was done the hard way — in words. Vieta introduced the use of letters as variables (he used vowels for unknown numbers and consonants for known numbers). He used signs of operation — to show whether to add, subtract, multiply, or divide. So great were these and other contributions that Vieta, though only an amateur, is known today as "the father of algebra."

A portrait of Vieta, the French lawyer who used algebra for code-breaking.

ÍNDICE

BIBLIOGRAFÍA

- Anton, Howard (1991). *Introducción al Algebra Lineal*, Editorial Limusa, México.
- Budnick, Frank (1990). *Matemáticas aplicadas a la administración, economía y ciencias sociales.* McGraw Hill, México.
- Chiang, alpha (1974). *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. McGraw Hill, Nueva York.
- Davis, Mckeown (1984). *Modelos cuantitativos para administración*. Grupo Editorial Iberoamericana, México.
- Grossman, Stanley I. (1991). *Algebra Lineal*, McGraw Hill, Nueva York.
- Lipschutz, Seymour (1992). *Algebra Lineal*, McGraw Hill, España.
- Rojo, Armando (1985). *Algebra II*, El Ateneo, Buenos Aires.
- Valeriú Mangu (1993). *Matemática subietce date la concursurile de admitere in invatamintul superior din Romania intre ani 1980-1990.* Editura Garamond, Bucarest, Rumania.

De los mismos autores y de la misma editorial

Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencias Económicas

Análisis Matemático I para estudiantes de Ciencias Económicas

De García Venturini y de la misma editorial

Los Matemáticos que hicieron la Historia

Los Métodos Cuantitativos en las Ciencias Sociales