

Université Mohamed Cherif Messaâdia Souk Ahras
Faculté des sciences et technologie
Département de mathématiques et informatique

Concours de formation doctorale de 3^{ème} cycle (Filière: Mathématiques)
Durée: 2 h 00 mn

Epreuve d'Analyse fonctionnelle

Exercice#1 (10 points)

1) Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

a) On suppose que $N = 1$. Montrer que

$$\|u\|_{\infty} \leq \|u'\|_1.$$

b) Par récurrence sur N , montrer que

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_1^{\frac{1}{N}} \cdots \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_1^{\frac{1}{N}}.$$

c) Montrer que

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \|\nabla u\|_1.$$

d) Soit $1 \leq p < N$. Montrer qu'il existe $C_{N,p}$ ne dépendant que N et p tel que

$$\|u\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u\|_p,$$

avec $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

2) Soit $1 \leq p < N$. Montrer que

$$\|u\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u\|_p,$$

pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($C_{N,p}$ et p^* sont donnés à la question précédente).

En déduire que l'injection de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [p, p^*]$.

Exercice#2 (10 points)

Soit

$$H_0^2([0, 1]) = \{v \in H^2([0, 1]), v(0) = v(1) = v'(1) = v'(0) = 0\}$$

l'espace de Hilbert pour la norme

$$|v|_{H_0^2} = \sqrt{\int_0^1 (v''(x))^2 dx}$$

qui est équivalente à la norme habituelle sur $H^2([0, 1])$.

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$ et $c \in C([0, 1])$. On considère le problème suivant :

$$(P) : \begin{cases} u''''(x) + c(x)u(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0, \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases}$$

- 1) En supposant que $u \in H^4(]0, 1[)$, donner la formulation variationnelle du problème (P) .
- 2) Montrer que cette formulation admet une unique solution sous de bonnes hypothèses sur c que l'on précisera.
- 3) Montrer que cette solution est solution du problème (P) .
- 4) Exprimer le problème (P) comme un problème de minimisation.

BONNE CHANCE

Corrigé

Exercice#1 (10 points)

1) a) Comme $u \in C_c^1(\mathbb{R})$ on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \int_{-\infty}^x u'(t) dt$ et donc

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^x |u'(t)| dt \leq \|u'\|_1.$$

On en déduit bien $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$. **(1 point)**

b) La question précédente permet d'initialiser la récurrence, on a pour toute fonction u appartenant à $C_c^1(\mathbb{R})$, $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$. **(0.5 point)**

Soit maintenant $N \geq 1$. On suppose que pour toute fonction u appartenant à $C_c^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_1^{\frac{1}{N}} \dots \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_1^{\frac{1}{N}}.$$

Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^{N+1})$. Pour $x \in \mathbb{R}^{N+1}$ on note $x = (x_1, y)^t$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^N$. Pour $x_1 \in \mathbb{R}$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)|^{\frac{N+1}{N}} dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)| |u(x_1, y)|^{\frac{1}{N}} dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)|^{\frac{N}{N-1}} dy \right)^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)| dy \right)^{\frac{1}{N}}. \end{aligned} \quad (*)$$

On applique l'hypothèse de récurrence à la fonction $y \rightarrow (x_1, y)$ (qui est bien dans $C_c^1(\mathbb{R}^N)$), on obtient

$$\|u(x_1, \cdot)\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \dots \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}(x_1, \cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}.$$

D'autre part, en appliquant le cas $N = 1$ (démontré à la question (a)) à la fonction $z \rightarrow u(z, y)$ (qui est bien dans $C_c^1(\mathbb{R})$), on a pour tout $y \in \mathbb{R}^N$

$$|u(x_1, y)| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2}(\cdot, y) \right\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

et donc, en intégrant par rapport à y ,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)| dy \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})}.$$

En reportant ces majorations dans (*) on obtient pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x_1, y)|^{\frac{N+1}{N}} dy \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} u(x_1, \cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \dots \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}(x_1, \cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{N+1}}(x_1, \cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})}^{\frac{1}{N}}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à x_1 et en utilisant une nouvelle fois l'inégalité de Hölder (avec le produit de N fonctions dans L^N , on obtient bien l'inégalité désirée, c'est à dire

$$\|u\|_{\frac{N}{N+1}} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_1^{\frac{1}{N}} \cdots \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{N+1}} \right\|_1^{\frac{1}{N}},$$

ou encore

$$\|u\|_{\frac{N+1}{N}} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_1^{\frac{1}{N+1}} \cdots \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{N+1}} \right\|_1^{\frac{1}{N+1}}.$$

Ce qui termine la récurrence. **(2 points)**

c) La moyenne géométrique de N nombres positifs est plus petite que la moyenne arithmétique de ces mêmes nombres. (Ceci peut se démontrer en utilisant, par exemple, la convexité de la fonction exponentielle). On en déduit que

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_1^{\frac{1}{N}} \cdots \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{N+1}} \right\|_1^{\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_1.$$

Comme $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_1 \leq \|\nabla u\|_1$ pour tout i , on a bien

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \|\nabla u\|_1. \quad \textbf{(2 points)}$$

d) Pour $p = 1$, on a vu que $C_{N,p} = 1$ convient. On suppose maintenant $1 < p < N$. On pose $\alpha = \frac{p(N-1)}{N-p}$ (de sorte que $\alpha \frac{N}{N-1} = p^*$) et $v = |u|^{\alpha-1} u$. Comme $\alpha > 1$ et $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, on a aussi $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. On peut donc appliquer le résultat de la question (c) à la fonction v . On obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\alpha \frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \|\nabla v\|_1.$$

Comme $|\nabla v| = \alpha |u|^{\alpha-1} |\nabla u|$, l'inégalité de Hölder (avec p et $q = \frac{p}{p-1}$) donne

$$\|\nabla v\|_1 = \alpha \| |u|^{\alpha-1} |\nabla u| \|_1 \leq \alpha \| |u|^{\alpha-1} \|_q \|\nabla u\|_p.$$

Comme $(\alpha - 1)q = \frac{(\alpha-1)p}{p-1} = p^*$, on a donc

$$\|u\|_{p^*}^{\frac{p^*(N-1)}{N}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \alpha \|u\|_{p^*}^{\frac{p^*(p-1)}{p}} \|\nabla u\|_{p^*}.$$

Ce qui donne, avec $C_{N,p} = \alpha = \frac{p(N-1)}{N-p}$

$$\|u\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u\|_p. \quad \textbf{(2 points)}$$

2) Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $u_n \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \rightarrow \infty$. Par la question précédente, cette suite est de Cauchy

dans L^{p^*} . Par unicité de la limite (par exemple dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$) cette limite est nécessairement égale à u . On peut alors passer à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans l'inégalité

$$\|u_n\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u_n\|_p$$

et on obtient ainsi $\|u\|_{p^*} \leq C_{N,p} \|\nabla u\|_p$ pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Ceci donne l'injection continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. **(1 point)** L'injection continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ est immédiate car $\|u\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}}$ pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. **(0.5 point)** Soit maintenant $q \in]p, p^*[$. Pour montrer que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ il suffit d'utiliser l'inégalité classique suivante (qui se démontre avec l'inégalité de Hölder) avec $p < q < r = p^*$,

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\theta \|u\|_r^{1-\theta},$$

avec $\theta = \frac{p(r-q)}{q(r-p)} \in]0, 1[$. **(1 point)**

Exercice 2 (10 points)

1) On sait que $u \in H^4([0, 1])$. Soit $v \in H_0^2([0, 1])$, en multipliant (P) par v et en intégrant entre 0 et 1, on obtient

$$\int_0^1 u'''' v dx + \int_0^1 c u v dx = \int_0^1 f v dx.$$

En intégrant une fois par partie et en utilisant le fait que $v(0) = v(1) = 0$, on obtient

$$-\int_0^1 u''' v' dx + \int_0^1 c u v dx = \int_0^1 f v dx. \quad \textbf{(1 point)}$$

En intégrant une nouvelle fois par partie et en utilisant le fait que $v'(0) = v'(1) = 0$, on obtient

$$\int_0^1 u'' v'' dx + \int_0^1 c u v dx = \int_0^1 f v dx. \quad \textbf{(1 point)}$$

La formulation variationnel du système (P) est donc, trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V,$$

avec $V = H_0^2([0, 1])$, $a(u, v) = \int_0^1 u'' v'' dx + \int_0^1 c u v dx$ et $l(v) = \int_0^1 f v dx$. **(1 point)**

2) On vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, $V = H_0^2([0, 1])$ est un espace de Hilbert pour la norme

$$|v|_{H_0^2}^2 = \int_0^1 (v''(x))^2 dx.$$

Soit α la constante de l'inégalité de Poincaré. l est une forme bilinéaire et continue car

$$|l(v)| \leq \int_0^1 |f v| dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^2} \leq \alpha \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^2}. \quad \textbf{(1 point)}$$

a est une forme bilinéaire et continue car

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_0^1 |u''| |v''| dx + \int_0^1 |c| |u| |v| dx \\ &\leq \|u''\|_{L^2} \|v''\|_{L^2} + \|c\|_\infty \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq (1 + \|c\|_\infty) \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2} \\ &\leq \alpha^2 (1 + \|c\|_\infty) |u|_{H_0^2} |v|_{H_0^2}, \end{aligned}$$

et $\|\cdot\|_{H^2}$ est équivalente à $|\cdot|_{H_0^2}$ sur $H_0^2(]0, 1[)$. **(1 point)** De plus, si on suppose que $c \geq 0$, alors

$$a(u, u) \geq \int_0^1 (u'')^2 dx = |u|_{H_0^2}^2,$$

d'où la coercivité de a . Sous l'hypothèse $c \geq 0$, la formulation variationnelle du problème (P) admet donc une unique solution. **(1 point)**

3) Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^2(]0, 1[)$, alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_0^1 u'' \varphi'' dx + \int_0^1 cu \varphi dx = \int_0^1 f \varphi dx,$$

où encore, par intégration par partie

$$\int_0^1 u'''' \varphi dx + \int_0^1 cu \varphi dx = \int_0^1 f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

c'est-à-dire, $u'''' + cu = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. **(1 point)** Comme $f \in L^2(]0, 1[)$, $c \in \mathcal{C}([0, 1])$ et $u \in H_0^2(]0, 1[)$, alors $u'''' \in L^2(]0, 1[)$. Donc, $u \in H^4(]0, 1[)$ et $u'''' + cu = f$ p.p. dans $]0, 1[$.

(1 point) Puisque $u \in H_0^2(]0, 1[)$, alors

$$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0. \quad \textbf{(1 point)}$$

Par conséquent, la solution du problème variationnel est solution du problème (P) .

4) La forme bilinéaire étant symétrique, et d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (P) équivaut à minimiser sur $H_0^2(]0, 1[)$ la fonctionnelle

$$\phi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v). \quad \textbf{(1 point)}$$