

Edición
digital:



ondas

TALLERES
ESTUDIANTILES
CIENCIAS
UNAM

Edición impresa:
Editorial Reverte

berkeley physics course - volumen

3



Educación para todos no es un proyecto lucrativo, sino un esfuerzo colectivo de estudiantes y profesores de la UNAM para facilitar el acceso a los materiales necesarios para la educación de la mayor cantidad de gente posible. Pensamos editar en formato digital libros que por su alto costo, o bien porque ya no se consiguen en bibliotecas y librerías, no son accesibles para todos.

Invitamos a todos los interesados en participar en este proyecto a sugerir títulos, a prestarnos los textos para su digitalización y a ayudarnos en toda la labor técnica que implica su reproducción. El nuestro, es un proyecto colectivo *abierto* a la participación de cualquier persona y todas las colaboraciones son bienvenidas.

Nos encuentras en los Talleres Estudiantiles de la Facultad de Ciencias y puedes ponerte en contacto con nosotros a la siguiente dirección de correo electrónico:

eduktodos@gmail.com
<http://eduktodos.dyndns.org>

Constantes numéricas

Velocidad de la luz en el vacío *	$c = 2,997925 \times 10^{10}$ cm/seg = 3×10^{10} cm/seg
Carga fundamental	$l = 4,8 \times 10^{-10}$ statcoulomb = $1,6 \times 10^{-19}$ coulomb
Constante de Planck	$h = 6,6 \times 10^{-27}$ erg-seg
Constante de Planck "reducida"	$\hbar = h/2\pi = 1,0 \times 10^{-27}$ erg-seg
Masa en reposo del electrón	$m_e = 0,9 \times 10^{-27}$ gm
Masa en reposo del protón	$m_p = 1,7 \times 10^{-24}$ gm
Constante gravitacional	$G = 6,7 \times 10^{-8}$ CGS
Aceleración de la gravedad a nivel del mar	$g \approx 980$ cm/seg ²
Radio de Bohr	$a_0 = 0,5 \times 10^{-8}$ cm
Número de Avogadro	$N_0 = 6,0 \times 10^{23}$ mol ⁻¹
Constante de Boltzmann	$k = 1,4 \times 10^{-16}$ erg/°K
Temperatura normal	$T_0 = 273^\circ\text{K}$
Presión normal	$p_0 = 1$ atm = $1,01 \times 10^6$ dinas/cm ²
Volumen molar a P.T.N.	$V_0 = 22,4 \times 10^3$ cm ³ /mol
Energía térmica kT a P.T.N.	$kT_0 = 3,8 \times 10^{-14}$ erg $\approx \frac{1}{40}$ eV
Densidad del aire a P.T.N.	$\rho_0 = 1,3 \times 10^{-3}$ gm/cm ³
Velocidad del sonido en aire a P.T.N.	$v_0 = 3,32 \times 10^4$ cm/seg
Impedancia sónica del aire a P.T.N.	$Z_0 = 42,8$ (dina/cm ²)/(cm/seg)
Intensidad sónica normal	$I_0 = 1$ μ vatio/cm ²
Factor de 10 en intensidad	= 1 bel = 10 db
Un fermi (F)	= 10^{-13} cm
Una unidad angstrom (Å)	= 10^{-8} cm
Un micrón (μ)	= 10^{-4} cm
Un hertz (Hz)	= 1 ciclo por segundo (cps)
Longitud de onda de un fotón de un electrón-volt	= $1,24 \times 10^{-4}$ cm ≈ 12345 Å
Un electrón-volt (eV)	= $1,6 \times 10^{-12}$ erg/seg
Un vatio (W)	= 1 joule/seg = 10^7 erg/seg
Un coulomb (coul)	= 3×10^9 statcoul = $c/10$ statcoul *
Un volt (V)	= $\frac{1}{300}$ statvolt = $10^8/c$ statvolt *
Un ohm (Ω)	= statohm = $10^9/c^2$ statohm *
Treinta ohms	= $1/c$ statohm
Impedancia por unidad del área del vacío para ondas electromagnéticas	= $4\pi/c$ statohm = 377 ohm
Un faradio (F)	= 9×10^{11} statfarad = $c^2/10^9$ statfarad *
Un henry (H)	= $1/(9 \times 10^{11})$ stathenry = $10^9/c^2$ stathenry *

* Al convertir unidades prácticas a unidades electrostáticas hemos aproximado la velocidad de la luz como $3,00 \times 10^{10}$ cm/seg. Dondequiera aparezca un 3, se podrá obtener un factor de conversión más exacto usando el valor exacto de c . Análogamente, dondequiera aparezca un 9, el valor más exacto es $(2,998)^2$.

Prefijos de las unidades recomendadas

<i>Múltiplos y submúltiplos</i>	<i>Prefijos</i>	<i>Símbolos</i>
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

Identidades usadas corrientemente

$$\cos x + \cos y = [2 \cos \tfrac{1}{2}(x - y)] \cos \tfrac{1}{2}(x + y)$$

$$\cos x - \cos y = [-2 \sin \tfrac{1}{2}(x - y)] \sin \tfrac{1}{2}(x + y)$$

$$\sin x + \sin y = [2 \cos \tfrac{1}{2}(x - y)] \sin \tfrac{1}{2}(x + y)$$

$$\sin x - \sin y = [2 \sin \tfrac{1}{2}(x - y)] \cos \tfrac{1}{2}(x + y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \dots$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \tfrac{1}{2}n(n-1)x^2 + \dots; \quad x^2 < 1.$$

$$\cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \gamma) + \cos(\theta_1 + 2\gamma) + \dots + \cos[\theta_1 + (N-1)\gamma] = \cos[\theta_1 + \tfrac{1}{2}(N-1)\gamma] \frac{\sin \tfrac{1}{2}N\gamma}{\sin \tfrac{1}{2}\gamma}$$

ondas

ondas

berkeley physics course — volumen 3

La preparación de este curso fue apoyada con una donación de la National Science Foundation al Educational Development Center

Frank S. Crawford, Jr.

*Profesor de Física
Universidad de California, Berkeley*

Título de la obra original:

WAVES

Edición original en lengua inglesa publicada por:

McGraw-Hill, Inc. Nueva York

Copyright © by McGraw-Hill, Inc., 1968

Versión española por:

Dr. Juan T. D'alessio

Profesor de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de Buenos Aires

Profesor de Termodinámica y de Fisicoquímica de la Escuela Superior Técnica

Jefe del Servicio de Producción de la Comisión Nacional de Energía Atómica

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

Loreto, 13-15, Local B

08029 Barcelona

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

© **EDITORIAL REVERTÉ, S.A., 1994**

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4020 - 4 Obra Completa

ISBN - 84 - 291 - 4023 - 9 Tomo 3

Depósito Legal: B - 35540 - 1994

Impreso por LIBERGRAF, S.A.

Constitución 19, interior (Can Batlló)

08014 BARCELONA

Prólogo al Berkeley Physics Course

Éste es un curso de física básica de dos años de duración para estudiantes de la licenciatura de ciencias e ingeniería. La intención de los autores ha sido presentar la física básica en cuanto sea posible en la línea que siguen los físicos que trabajan en primera fila de su campo respectivo. Hemos intentado desarrollar un curso que subraye vigorosamente los fundamentos de la física. Nuestro objetivo específico fue presentar coherentemente en un programa elemental las ideas de la relatividad especial, la física cuántica y la física estadística.

Este curso puede seguirse por cualquier alumno que haya dado un curso de física de grado medio. Debe estudiarse simultáneamente con otro curso de matemática que incluya el cálculo diferencial e integral.

En el momento presente se están desarrollando diversos nuevos cursos de física a este nivel en las universidades de los Estados Unidos. La idea de preparar un nuevo curso surgió en un grupo numeroso de físicos, que se veían influidos por las necesidades derivadas del avance de la ciencia y la ingeniería y por la importancia creciente de las ciencias en los colegios de grado elemental y medio. Nuestro propio curso se concibió en una conversación entablada entre Philip Morrison de la Cornell University y C. Kittel años atrás, en 1961. Nos vimos animados por John Mays y sus colegas de la National Science Foundation y por Walter C. Michels, entonces Presidente de la Comisión sobre College Physics. Se formó un comité provisional para guiar el curso a través de sus primeras fases. Éste se componía originalmente de Luis Alvarez, William B. Fretter, Charles Kittel, Walter D. Knight, Philip Morrison, Edward M. Purcell, Malvin A. Ruderman y Jerrold R. Zacharias. El comité se reunió primeramente en mayo de 1962 en Berkeley; en esta época bosquejó un esquema provisional de un curso de física enteramente nuevo. Debido a las ineludibles obligaciones de algunos de sus miembros originales, el comité se reconstituyó parcialmente en enero de 1964 y ahora está compuesto por los abajo firmantes. Las contribuciones de otros científicos se agradecerán debidamente en los prefacios de cada volumen.

El esquema provisional y su espíritu asociado ejercieron una poderosa influencia sobre el material del curso finalmente conseguido. El esquema cubría con detalle los temas y modo de enfocarlos que creíamos debían y podían enseñarse a los alumnos principiantes de ciencia e ingeniería. Nunca fue nuestra intención desarrollar un curso limitado a estudiantes aventajados. Hemos pretendido presentar los principios de la física desde unos puntos de vista unificados y recientes y ciertas partes del curso pueden, por tanto, parecer tan nuevas a los profesores ayudantes como a los alumnos.

VI *Prólogo al Curso de Física de Berkeley*

Los cinco volúmenes en que se planeó dividir el curso incluirán:

- I. Mecánica (Kittel, Knight, Ruderman)
- II. Electricidad y magnetismo (Purcell)
- III. Ondas y oscilaciones (Crawford)
- IV. Física cuántica (Wichmann)
- V. Física estadística (Reif)

Los autores de cada volumen han escogido libremente el estilo y método de presentación que les parecía más apropiado a su tema.

La actividad inicial del curso condujo a Alan M. Portis a idear un nuevo laboratorio de física, conocido ahora como el Berkeley Physics Laboratory. Como el curso insiste en los principios de la física, muchos profesores pueden creer que no trata suficientemente de física experimental. El laboratorio está bien dotado de experimentos importantes y está proyectado para equilibrar el curso.

El apoyo económico para el desarrollo del curso fue proporcionado por la National Science Foundation, con un apoyo indirecto considerable de la Universidad de California. Los fondos fueron administrados por Educational Services Incorporated, una organización desinteresada establecida para administrar los programas de mejora de las disciplinas. Nos sentimos particularmente en deuda con Gilbert Oakley, James Aldrich y William Jones, todos de ESI, por su amable y entusiasta apoyo. ESI estableció en Berkeley una oficina bajo la muy competente dirección de Mrs. Mary R. Maloney para ayudar en el desarrollo del curso y del laboratorio. La Universidad de California no tenía conexión oficial con nuestro programa, pero nos ha ayudado de diversas e importantes maneras. Agradecemos esta ayuda en particular a dos Presidentes sucesivos del Departamento de Física, August C. Helmholtz y Burton J. Moyer; al claustro de profesores y directivos del Departamento; a Donald Coney y muchos otros de la Universidad. Abraham Olshen nos prestó gran ayuda frente a los problemas iniciales de organización.

Cualquier sugerencia o corrección será agradecida.

Eugene D. Commins
Frank S. Crawford, Jr.
Walter D. Knight
Philip Morrison
Alan M. Portis

Edward M. Purcell
Frederick Reif
Malvin A. Ruderman
Eyvind H. Wichmann
Charles Kittel, *Presidente*

Enero, 1965

Nota agregada

Los volúmenes I, II y V fueron publicados en su forma final en el período de enero de 1965 a junio de 1967. Durante la preparación de los volúmenes III y IV para su publicación final, ocurrieron algunos cambios

Prólogo al Curso de Física de Berkeley VII

de organización. El Centro de Desarrollo de la Investigación * sucedió al Servicio Educacional Incorporado **, como organización administrativa. Se produjeron algunos cambios en el comité mismo y alguna redistribución de responsabilidades. El Comité está particularmente agradecido a los colegas que ensayaron este curso en sus clases, y, basándose en sus experiencias, han realizado críticas y sugerencias para mejorarlo.

Como con los volúmenes ya publicados, sus correcciones y sugerencias serán siempre bien recibidas.

Frank S. Crawford, Jr.
Charles Kittel
Walter D. Knight
Alan M. Portis

Frederick Reif
Malvin A. Ruderman
Eyvind H. Wichmann
A. Carl Helmholz }
Edward M. Purcell } *Jefes*

Junio, 1968
Berkeley, California

* Educational Development Center, en el original. *N. del T.*

** Educational Services Incorporated. *N. del T.*

Prólogo al Volumen III

Este volumen está dedicado al estudio de las ondas. Es un tema amplio. Cualquiera conoce muchos fenómenos naturales que involucran ondas; las hay de agua, de sonido, de luz, de radio, sísmicas, de de Broglie, además de otros tipos de ondas. Más aún, una revisión cuidadosa de los estantes de cualquier biblioteca de física revela que el estudio de un solo aspecto de un fenómeno ondulatorio —por ejemplo, *ondas de sonido supersónicas en el agua*— puede ocupar libros enteros o revistas y absorber toda la atención de científicos individuales. Asombrosamente, un profesional “especialista” en uno de estos estrechos campos de estudio puede usualmente comunicarse con bastante facilidad con otros especialistas supuestamente encasillados en otros campos supuestamente no relacionados. Primero tiene que aprender su jerga, sus unidades (como qué es un parsec) y qué números son importantes. Cuando experimenta un cambio de interés puede realmente hacerse “especialista” en un campo nuevo con sorprendente rapidez. Esto es posible porque los científicos comparten un lenguaje común debido al importante hecho de que muchos fenómenos físicos totalmente diferentes y aparentemente no relacionados pueden ser descritos en términos de un conjunto común de conceptos.

Muchos de estos conceptos compartidos están implícitos en la palabra *onda*.

El principal objetivo de este libro es desarrollar la comprensión de conceptos ondulatorios básicos y sus íntimas relaciones.

Con ese propósito, el libro está organizado en términos de estos conceptos en lugar de estarlo según fenómenos naturales observables, tales como sonido, luz y otros.

Una meta complementaria es proporcionar familiaridad con muchos ejemplos de ondas importantes e interesantes y así arribar a una comprensión concreta de la gran aplicabilidad y generalidad de los conceptos. En consecuencia, después de ser introducido cada tema, éste es ilustrado por inmediata aplicación a muchos sistemas físicos diferentes: resortes, “slinkies”, * líneas de transmisión, tubos de cartón, haces de luz y así sucesivamente. Esto puede contrastarse con la aproximación distinta consistente en desarrollar primero los conceptos útiles usando un ejemplo simple (el resorte estirado) y considerar después otros sistemas físicos interesantes.

Eligiendo ejemplos ilustrativos con “similitud” geométrica entre sí,

* “Slinky”. — Juego muy común en Estados Unidos, consistente en un resorte en espiral muy largo, fácilmente estirable (véase ej. 3, pág. 87). Puede reemplazárselo por un resorte que se mande hacer en cualquier taller mecánico.

espero alentar al estudiante a buscar semejanzas y analogías entre diferentes fenómenos ondulatorios. Espero también estimularlo a desarrollar la audacia de *usar* tales analogías al “arriesgar una conjetura” cuando se vea frente a nuevos problemas. El uso de analogías tiene peligros y tropiezos bien conocidos, pero cualquier cosa los tiene. (La conjetura de que las ondas de luz podían ser “como” ondas mecánicas en un cierto “éter” gelatinoso fue muy fructífera; le ayudó a Maxwell en sus intentos de establecer sus famosas ecuaciones. Rindió interesantes predicciones. Cuando los experimentos —especialmente los de Michelson y Morley— indicaron que este modelo mecánico podía no ser enteramente correcto, Einstein mostró cómo descartar el modelo manteniendo las ecuaciones de Maxwell. Prefirió conjeturar las ecuaciones directamente —lo que podría llamarse trabajo de imaginación “pura”—. En la actualidad, a pesar de que la mayoría de los físicos usan analogías y modelos como ayuda para imaginar nuevas ecuaciones, usualmente publican sólo las ecuaciones.)

Los experimentos caseros forman una parte importante de este volumen. Pueden proporcionar una clase de satisfacción —y de conocimiento— imposible de adquirir a través de las demostraciones de clase comunes y de los experimentos de laboratorio con toda su importancia.

Todos los experimentos caseros son de “física de cocina”, requiriendo un pequeño equipo no especializado. (Se prevé un equipo de óptica; los diapasones, “slinkies” y tubos de cartón no se prevén, pero son baratos y, por lo tanto, no son “especiales”.) Estos experimentos han sido realmente concebidos para ser realizados en la cocina y no el laboratorio. Muchos podrían considerarse *demonstraciones* en lugar de experimentos.

Todo concepto importante discutido en el texto es demostrado en por lo menos un experimento casero. Aparte de ilustrar conceptos, los experimentos caseros dan al estudiante la posibilidad de ponerse en estrecho contacto con los fenómenos. Debido al carácter “casero” de los experimentos, el contacto es íntimo y pensado. Esto es importante. No hay un compañero de laboratorio que pueda recoger la pelota y correr con ella mientras uno está leyendo aún las reglas del juego (o sentarse sobre la pelota cuando se quiere cogerla); no hay un instructor explicando el significado de *su* demostración, cuando lo que uno necesita realmente es realizar *su propia* demostración, con sus propias manos, con su propia rapidez y tantas veces como lo desee.

Una característica muy valiosa del experimento casero es que al descubrir a las diez de la noche que no se ha comprendido un experimento realizado la semana anterior, puede, a las diez y cuarto, haberlo preparado nuevamente y repetirlo. Esto es importante. En primer lugar, en el trabajo experimental nunca “sale bien” la primera vez.

Las ideas tardías son un secreto del éxito. (Hay otros.) Nada causa mayor frustración, o nos inhibe para aprender, que la imposibilidad de

poner en práctica una idea tardía experimental debido a que “el equipo está apagado”, o “son más de las cinco de la tarde” o alguna otra estúpida razón.

Por último, mediante los experimentos caseros espero promover lo que llamo “una apreciación de los fenómenos”. Me gustaría que el estudioso se viera seducido por la creación, con sus propias manos de una escena que simultáneamente sorprenda y deleite sus ojos, sus oídos y su cerebro...

Brillantes piedras de colores
que palpitan en el fondo del arroyo...
donde pasa el agua.

—SOSEKI *

* Reproducido de “The Four Seasons” (tr. Peter Beilenson), copyright © 1958, por The Peter Pauper Press, Mount Vernon, N. Y., y usado con permiso del editor.

Agradecimientos

El volumen III, en sus versiones preliminares, fue usado en varias clases en Berkeley. Estas ediciones preliminares recibieron valiosas críticas y comentarios provenientes de los estudiantes de Berkeley; de los profesores de Berkeley L. Alvarez, S. Parker, A. Portis y, especialmente, de C. Kittel; de J. D. Gavenda y sus estudiantes de la Universidad de Texas; y de W. Walker y sus estudiantes de la Universidad de California en Santa Bárbara. S. Pasternack, con su atenta lectura de la edición preliminar, hizo críticas específicas extremadamente útiles. De particular ayuda e influencia fueron las detalladas críticas de W. Walker, quien leyó la versión casi definitiva.

Luis Alvarez contribuyó también con su primer experimento publicado, "A Simplified Method for Determination of the Wavelength of Light", *School Science and Mathematics* 32, 89 (1932), que es la base del Exp. Casero 9.10.

Debo especial gratitud a Joseph Doyle, quien leyó el manuscrito final completo. Sus atinadas críticas y sugerencias condujeron a importantes cambios. También me proporcionó la traducción del verso japonés con que finaliza el prefacio. Él y otro "graduate student", Robert Fisher, contribuyeron con muchas y bellas ideas para los experimentos caseros.

Mi hija Sarah (cuatro años y medio) y mi hijo Matthew (dos y medio) no sólo contribuyeron con sus "slinkies", sino que también demostraron que los sistemas pueden tener grados de libertad en los cuales nadie pensaría jamás. Mi esposa Bevalyn contribuyó con su cocina y mucho más.

La publicación de las primeras versiones preliminares fue supervisada por Mrs. Mary R. Maloney. Mrs. Lila Lowell supervisó la última edición preliminar y pasó a máquina la mayor parte del manuscrito final. Las ilustraciones deben su forma final a Felix Cooper.

Reconozco, agradecido, las contribuciones realizadas por otras personas, pero la responsabilidad final por el manuscrito queda conmigo. Será bienvenida toda corrección, queja, felicitación, sugerencias de revisión e ideas para nuevos experimentos caseros, que pueden serme enviadas a Physics Department, University of California, Berkeley, California, 94720. Todo experimento casero utilizado en la próxima edición llevará el nombre del remitente a pesar de que pueda haber sido realizado antes por Lord Rayleigh u otro.

F. S. Crawford, Jr.

Notas didácticas

Las ondas de propagación tienen un gran interés estético y sería tentador comenzar por ellas. Sin embargo, a pesar de su belleza estética y matemática, las ondas son algo complicadas físicamente, debido a que implican interacciones entre gran número de partículas.

Puesto que deseo insistir más sobre los sistemas físicos que sobre las matemáticas, he de comenzar por el *sistema* físico más simple y no por la *onda* más simple.

Capítulo 1 Oscilaciones libres de sistemas simples: Revisamos en primer término las oscilaciones libres de un oscilador armónico unidimensional, acentuando en los aspectos físicos de inercia y fuerza restauradora el significado físico de ω^2 , y el hecho de que para un sistema real la amplitud de oscilación no debe ser demasiado grande si queremos conseguir un movimiento armónico simple. Luego consideramos las oscilaciones libres de dos osciladores acoplados e introducimos el concepto de modo normal.

Ponemos interés en señalar que el modo es como un oscilador armónico “extendido”, con todas sus partes vibrando en fase y a la misma frecuencia, y que, para un modo dado, ω^2 tiene el mismo significado físico que para un oscilador armónico unidimensional.

Qué omitir: Varios sistemas físicos aparecen repetidamente a lo largo del libro. Ni el docente debe discutirlos todos ni el estudiante debe estudiarlos todos. Los ejemplos 2 y 8 son oscilaciones longitudinales de masas y resortes para uno (ej. 2) y dos (ej. 8) grados de libertad, a sistemas continuos (soga de goma y “slinky” que experimentan oscilaciones longitudinales) y es usado como modelo para ayudar a la comprensión de ondas sónicas. Un docente que desee omitir sonido puede también omitir todas las oscilaciones longitudinales desde el principio. Análogamente, los ejemplos 4 y 10 son circuitos *LC* para uno y dos grados de libertad. En capítulos posteriores se extienden a redes *LC* y luego a líneas de transmisión continuas. En consecuencia, un docente que desee excluir el estudio de ondas electromagnéticas en líneas de transmisión, puede omitir todos los ejemplos con circuitos *LC* también desde el comienzo. (Puede hacerlo y todavía dar una discusión completa sobre ondas electromagnéticas comenzando en el Capítulo 7 con las ecuaciones de Maxwell.) No omitir oscilaciones transversales (Ejemplos 3 y 9).

Experimentos caseros: Abogamos enérgicamente en favor del Experimento casero 1.24 (Modo bamboleante en una batea de agua) y el problema relacionado 1.25 (seiches) para que el estudiante se inicie haciendo las cosas por sí mismo. El Experimento casero 1.8 (latas de conserva acopladas) constituye una buena demostración de clase. Por supuesto, puede tenerse ya preparada esa demostración (péndulos acoplados).

No obstante, soy partidario del “slinky” y las latas aun como demostración en clase, puesto que puede estimular al estudiante a conseguir su propio “slinky” y lata.

Capítulo 2 Oscilaciones libres de sistemas con muchos grados de libertad: Extendemos el número de grados de libertad de dos a un número muy grande y en-

Organización del curso

XVI Notas didácticas

contramos los modos transversales —ondas estacionarias— de una cuerda continua. Definimos k e introducimos el concepto de relación de dispersión, dando ω como función de k . Usamos los modos de la cuerda para introducir el análisis de Fourier de funciones periódicas en la Sección 2.3. La relación de dispersión exacta para cuerdas con cuentas se da en la Sección 2.4.

Qué omitir: La Sección 2.3 es opcional, especialmente si los estudiantes ya conocen algo de análisis de Fourier. El ejemplo 5 es un arreglo lineal de péndulos acoplados, el más simple de los sistemas que tienen corte de baja frecuencia. Se usan más adelante para ayudar a la explicación del comportamiento de otros sistemas que tienen un corte de baja frecuencia. El docente que no se proponga discutir con posterioridad sistemas impulsados por debajo del corte (guías de ondas, ionosfera, reflexión total de luz en vidrio, penetración de ondas de de Broglie a través de barreras, filtros pasaaltos, etc.), no necesita considerar el ejemplo 5.

Capítulo 3 Oscilaciones forzadas: Los Capítulos 1 y 2 comenzaron con oscilaciones libres de un oscilador armónico y terminaron con ondas estacionarias libres de sistemas cerrados. En los Capítulos 3 y 4 consideramos oscilaciones forzadas, primero de sistemas *cerrados* (Cap. 3), donde encontramos las “resonancias”, y luego en sistemas *abiertos* (Cap. 4), donde encontramos ondas de propagación. En la Sección 3.2 revisamos el oscilador armónico unidimensional amortiguado, considerando su comportamiento transitorio y en estado estacionario. Luego pasamos a dos o más grados de libertad, y descubrimos que a cada modo de oscilación le corresponde una resonancia. También consideramos sistemas impulsados por debajo de la frecuencia del modo más bajo (o por encima del más alto) y descubrimos las ondas exponenciales y la acción de “filtrado”.

Qué omitir: Los transitorios (en la Sec. 3.2) pueden ser omitidos. Algunos docentes pueden desear omitir también todo lo concerniente a sistemas impulsados por encima del corte.

Experimentos caseros: Los Experimentos caseros 3.8 (oscilaciones forzadas en un sistema de dos latas acopladas) y 3.16 (filtro pasabandas mecánico) requieren tocadiscos. Constituyen excelentes demostraciones en clase, especialmente en el caso de ondas exponenciales para sistemas impulsados por encima del corte.

Capítulo 4 Ondas de propagación: Aquí introducimos las ondas *de propagación* resultantes de oscilaciones forzadas de un sistema *abierto* (en contraste con las ondas *estacionarias* resultantes de las oscilaciones forzadas de un sistema *cerrado* que encontramos en el Cap. 3). El resto del Capítulo 4 está dedicado al estudio de la velocidad de fase (incluyendo dispersión) y la impedancia en ondas de propagación. Comparamos los dos “conceptos de onda de propagación”, *velocidad de fase* e *impedancia*, con los “conceptos de onda estacionaria”, *inercia* y *fuerza restauradora*, y también comparamos la diferencia fundamental en relaciones de fase en ondas estacionarias y de propagación.

Experimentos caseros: Recomendamos el Experimento casero 4.12 (prisma de agua). Es el primer experimento con el equipo de óptica; use el filtro púrpura que deja pasar el rojo y el azul, pero que corta el verde. Recomendamos especialmente el 4.18 (medición de la constante solar en la superficie terrestre) con su cara como detector.

Capítulo 5 Reflexión: Hacia el final del Capítulo 4 teníamos a nuestra disposición tanto ondas estacionarias como de propagación (en una dimensión). En el

Capítulo 5 consideramos la superposición general de ondas estacionarias y de propagación. Al deducir los coeficientes de reflexión hacemos un uso muy "físico" del principio de superposición en lugar de poner énfasis en las condiciones de contorno. (El uso de las condiciones de contorno se recalca en los problemas.)

Qué omitir: Hay muchos ejemplos que implican sonido, líneas de transmisión y luz; ¡no los haga todos! El Capítulo 5 es esencialmente la "aplicación" de los conocimientos adquiridos en los Capítulos 1 al 4. Puede ser omitido parcial o totalmente.

Experimentos caseros: Todo el mundo deberá realizar el Experimento 5.3 (ondas estacionarias transitorias en un "slinky". Los Experimentos caseros 5.17 y 5.18 son especialmente interesantes.

Capítulo 6 Modulaciones, pulsaciones y paquetes de ondas: En los Capítulos 1 al 5 trabajamos principalmente con una frecuencia única (exceptuando en la Sec. 2.3 sobre análisis de Fourier). En el Capítulo 6 consideramos superposiciones que comprenden diferentes frecuencias, para formar pulsaciones y paquetes de ondas y para extender los conceptos de análisis de Fourier (desarrollados en el Cap. 2 para funciones periódicas) para incluir funciones no periódicas.

Qué omitir: La mayoría de lo físico está en las primeras tres secciones. El docente que haya omitido el análisis de Fourier en la Sección 2.3 querrá, indudablemente, omitir las Secciones 6.4 y 6.5, en donde se introducen y aplican las integrales de Fourier.

Experimentos caseros: Nadie cree en la velocidad de grupo hasta que ha observado paquetes de ondas de agua (vea Exp. casero 6.11). Todo el mundo deberá también hacer los Experimentos caseros 6.12 y 6.13.

Problemas: La modulación de frecuencia y fase son discutidas en los problemas con preferencia al texto. Así sucede con recientes e interesantes desarrollos como el *Mode-locking* de laser (Prob. 6.23), multiflexión de frecuencia (Prob. 6.32) y espectroscopia de Fourier interferométrica múltiple (Prob. 6.33).

Capítulo 7 Ondas en dos y tres dimensiones: En los Capítulos 1 al 6 todas las ondas son unidimensionales. En el Capítulo 7 pasamos a tres dimensiones. Se introduce el vector de propagación \mathbf{k} . Se estudian ondas electromagnéticas usando las ecuaciones de Maxwell como punto de partida. (En capítulos anteriores hay muchos ejemplos de ondas electromagnéticas en líneas de transmisión que surgen del ejemplo del circuito *LC*.) También se estudian las ondas de agua.

Qué omitir: La Sección 7.3 (ondas de agua) puede ser omitida, pero recomendamos los experimentos caseros con ondas de agua. Se estudie o no la Sección 7.3. El docente que está interesado principalmente en óptica puede realmente comenzar su curso en la Sección 7.4 (ondas electromagnéticas, y proseguir a lo largo de los Caps. 7, 8 y 9).

Capítulo 8 Polarización: Este Capítulo se dedica al estudio de la polarización de ondas electromagnéticas y de ondas en "slinkies", poniendo atención en la relación física entre polarización parcial y coherencia.

Experimentos caseros: Todos deberán hacer por lo menos los Experimentos caseros 8.12, 8.14, 8.16 y 8.18 (el Exp. 8.14 requiere el "slinky"; los demás, el equipo de óptica).

Capítulo 9 Interferencia y difracción: Aquí consideramos la superposición de ondas que han recorrido diferentes caminos entre la fuente y el detector. Insistimos en el significado físico de la coherencia. La óptica geométrica se trata

XVIII Notas didácticas

como un fenómeno ondulatorio. Comportamiento de un haz de difracción limitada que incide sobre diversas superficies reflectoras y refractoras.

Experimentos caseros: Todos deberían hacer por lo menos uno de los experimentos de cada tema: interferencia, difracción, coherencia y óptica geométrica. También recomendamos enérgicamente el 9.50 (radiación cuádrupolar de un diapasón).

Problemas: Algunos tópicos son desarrollados en los problemas: Interferómetros estelares incluyendo la "interferometría de línea base larga" recientemente desarrollada (Prob. 9.57); en el Problema 9.59 se discute la analogía entre el microscopio de contraste de fase y la conversión de ondas de radio AM en FM.

Experimentos caseros

Consideraciones generales: Se deberá asignar por lo menos un experimento casero por semana. Para su conveniencia, damos a continuación una lista de todos los experimentos que comprenden ondas de agua, ondas de "slinkies" y ondas de sonido. Luego describimos también el equipo de óptica.

Ondas de agua: Discutidas en el Capítulo 7, forman también un tema recurrente desarrollado en la siguiente serie de sencillos Experimentos caseros:

- 1.24 Modo salpicante en una cacerola de agua.
- 1.25 Seiches *.
- 2.31 Ondas estacionarias, diente de sierra en aguas bajas.
- 2.33 Modos de tensión superficial.
- 3.33 Ondas estacionarias diente de sierra en agua poco profunda.
- 3.34 Ondas superficiales estacionarias rectangulares bidimensionales.
- 3.35 Ondas estacionarias en agua.
- 6.11 Paquetes de ondas de agua.
- 6.12 Paquetes de ondas superficiales de angua-ondas marea.
- 6.19 Velocidad de fase y de grupo para ondas de aguas profundas.
- 6.25 Resonancia en grandes olas.
- 7.11 Leyes de dispersión para ondas de agua.
- 9.29 Difracción de ondas de agua.

Slinkies: Todo estudiante deberá tener un slinky (alrededor de US \$ 1 en cualquier juguetería). Cuatro de los siguientes experimentos requieren un tocadiscos y están, en consecuencia, fuera del rango de costos de la "física de cocina". Sin embargo, muchos estudiantes tienen ya tocadiscos. (Los experimentos con tocadiscos constituyen buenas demostraciones de clase.)

- 1.8 Latas de sopa acopladas.
- 2.1 "Slinky" — dependencia entre la frecuencia y la longitud.
- 2.2 El "slinky" como sistema continuo.
- 2.4 Calidad de tono de un "slinky".
- 3.7 Resonancia en un "slinky" amortiguado.
- 3.8 Oscilaciones forzadas en un sistema de dos latas acopladas.
- 3.16 Filtro pasabandas mecánico.
- 3.23 Penetración exponencial en una región reactiva.
- 4.4 Velocidad de fase para ondas en un resorte muy extensible.
- 5.3 Ondas estacionarias transitorias en un resorte muy extensible ("slinky").
- 8.14 Polarización en resorte.

* "Seiche". — Oleaje.

Sonido: Muchos experimentos sobre sonido implican el uso de dos diapasones idénticos, preferiblemente C523.3 ó A440. Los más baratos (alrededor de US \$ 1,25 c/u), que son perfectamente adecuados, están disponibles en cualquier comercio de artículos musicales. Se pueden adquirir tubos de cartón a alrededor de 25 cents. en cualquier papelería o comercio de artículos de arte. Los siguientes Experimentos caseros involucran sonido :

- 1.4 Medición de frecuencia de vibraciones.
- 1.7 Hojas de sierra acopladas.
- 1.12 Pulsos de dos diapasones.
- 1.13 Falta de linealidad en el oído tonos de combinación.
- 1.18 Pulsaciones entre cuerdas de guitarra no idénticas débilmente acopladas.
- 2.4 Calidad de tono de un "slinky".
- 2.5 El piano como máquina analizadora de Fourier — insensibilidad del oído a la fase.
- 2.6 Armónicos de piano — escala de equitemperancia.
- 3.27 Ancho de frecuencia resonante para un tubo de cartón.
- 4.6 Medición de la velocidad del sonido con paquetes de onda.
- 4.15 Botella de whisky como resonador (resonador de Helmholtz).
- 4.16 Velocidad del sonido en aire, helio y gas natural.
- 4.26 Impedancia del sonido.
- 5.15 Longitud efectiva de un tubo de extremo abierto para ondas estacionarias.
- 5.16 Resonancia en tubos de cartón.
- 5.17 Su sistema detector del sonido (tímpanos, nervios, cerebro), ¿es un detector de fase?
- 5.18 Midiendo la fase relativa en los dos extremos de un tubo abierto.
- 5.19 Sobretonos en diapasones.
- 5.31 Resonancia en globos de juguete.
- 6.13 Trinos musicales y ancho de banda.
- 9.50 Configuración de radiación del diapason — radiación cuadrupolar.

Componentes: Cuatro polarizadores lineales, un polarizador circular, una placa de cuarto de onda, una de media onda, una red de difracción y cuatro filtros de color (rojo, verde, azul y púrpura). Los componentes están descritos en el texto (polarizador lineal en la pág. 438; polarizador circular, pág. 462; placas retardatorias de un cuarto y media onda, pág. 463; red de difracción, pág. 528). Algunos experimentos también requieren portaobjetos, una fuente lineal tipo lámpara de proyectar o una fuente puntual tal como la de flash descrita en el Experimento casero 4.12, pág. 235. Excepto el Experimento 4.12, todos los que requieren el equipo de óptica están en los Capítulos 8 y 9. Son demasiados para enumerarlos aquí.

Equipo de óptica

El primer experimento con el equipo de óptica deberá consistir en la identificación de todos los componentes por el estudiante. (Los componentes se enumeran en una lista que figura en la tapa interna posterior.)

Marque de alguna manera los componentes para futuras referencias. Por ejemplo, use tijeras para redondear levemente las cuatro esquinas del polarizador circular, y luego escriba "EN" cerca de un borde de la cara de entrada o pegue un pequeño trozo de cinta en esa cara. Corte un vértice del retardador de un cuarto de onda, dos vértices del de media (dos cuartos de) onda. Trace una línea según el eje de máxima transmisión de los polarizadores lineales. (Este eje es paralelo a uno de los bordes del polarizador.)

Experimento casero

XX Nota sobre el sistema MKS de unidades eléctricas

Debemos hacer notar que la "placa de un cuarto de onda" da un retardo espacial de $1400 \pm 200 \text{ \AA}$, casi independientemente de la longitud de onda (para luz visible). Por lo tanto, la longitud de onda para la cual un retardador de un cuarto de onda es $5600 \pm 800 \text{ \AA}$. La tolerancia del fabricante es $\pm 200 \text{ \AA}$. Una partida manufacturada que da un retardo de 1400 \AA son retardadores de $1/4$ de onda, para el verde (5600 \AA), pero retardan menos de $1/4$ de onda para longitudes de onda mayores (rojo) y más para menores (azul). Otra partida que retarda $1400 + 200 = 1600 \text{ \AA}$ son retardadores de un cuarto de onda sólo para el rojo (6400 \AA). Uno que retarde $1400 - 200 \text{ \AA}$ es un retardador de $1/4$ de onda sólo para azul (4800 \AA). Consideraciones similares se aplican al polarizador circular, puesto que consiste en un emparedado de placa de cuarto de onda y polarizador lineal a 45° , y la placa de cuarto de onda es un retardador de $1400 \pm 200 \text{ \AA}$. En consecuencia, puede haber efectos de color que distraigan levemente al usar luz blanca. El estudiante debe estar advertido acerca de que en cualquier experimento en el cual se suponga que tiene que obtener "negro", o sea, extinción, siempre tendrá cierta luz "no extinguida" del color "erróneo" que se filtra. Por ejemplo, yo fui ingenuo cuando escribí el Experimento casero 8.12. Tal vez hayamos desechado todo lo que sigue después de la palabra "banda" en la oración: "¿Ve la banda oscura en el verde? ¡Ése es el color de 5600 \AA !"

Uso de los números complejos

Los números complejos simplifican el álgebra cuando hay que superponer oscilaciones sinusoidales u ondas. También pueden complicar la física. Por tal razón he evitado su uso, especialmente en la primera parte del libro. Todas las identidades trigonométricas necesarias se encontrarán en la contratapa de la portada. En el Capítulo 6 utilizo la representación compleja $i\omega t$, para usar el bien conocido método gráfico de superponer vibraciones o "diagramas planos". En el Capítulo 8 (polarización) utilizo números complejos extensivamente. En el 9 (interferencia y difracción), no hago mucho uso de complejos a pesar de que en ciertas ocasiones simplificarían el álgebra. Muchos docentes pueden desear utilizar más extensivamente que yo los números complejos, especialmente en el Capítulo 9. En las secciones sobre series de Fourier (2.3) e integral de Fourier (6.4 y 6.5), no uso números complejos. (¡Quería evitar especialmente las integrales de Fourier que involucraren "frecuencias negativas"!)

Nota sobre el sistema MKS de unidades eléctricas[†]

La mayoría de textos de ingeniería eléctrica y la mayoría de libros de física elemental, utilizan un sistema de unidades eléctricas llamado *sistema MKS racionalizado*. Este sistema emplea las unidades mecánicas MKS basadas en el *metro*, el *kilogramo*, y el *segundo*. La unidad MKS de fuerza es el *newton*, que se define como la fuerza que actuando sobre la masa de 1-kilogramo la acelera en 1 metro/seg². Así que un newton equivale a 10^5 dinas. La correspondiente unidad de energía, el newton-metro, o *joule*, equivale a 10^7 erg.

Las unidades eléctricas en el sistema MKS incluyen nuestras unidades familiares "prácticas" —coulomb, volt, ampere y ohm— entre otras. Se advierte que fue posible asimilar las unidades prácticas, muy

[†] Reproducido de Curso de Física de Berkeley, Vol. II, *Electricidad y magnetismo*, por Edward M. Purcell, © 1963, 1964, 1965, por Education Development Center, Inc. sucesor by merger to Educational Services Incorporated.

utilizadas, en un sistema ideado de la manera siguiente. Se escribe la ley de Coulomb como se hizo en la Ec. 1.1:

$$F_2 = k \frac{q_1 q_2 \hat{r}_{21}}{r_{21}^2} \quad (1)$$

En vez de hacer k igual a 1, démosle un valor tal que F_2 venga dada en newton si q_1 y q_2 se expresan en coulomb y r_{21} en metros. Conociendo la relación entre el newton y la dina, entre el coulomb y la ues, y entre el metro y el centímetro, puede calcularse fácilmente que k debe tener el valor $0,8988 \times 10^{10}$. (Dos cargas de 1 coulomb separadas un metro dan lugar a una fuerza de un millón de toneladas.) No hay diferencia si escribimos $1/(4\pi\epsilon_0)$ en lugar de k , en donde la constante ϵ_0 es un número tal que $1/(4\pi\epsilon_0) = k = 0,8988 \times 10^{10}$. La ley de Coulomb se escribe ahora:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2)$$

la constante ϵ_0 con el valor

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ coulomb}^2/\text{newton-m}^2 \quad (3)$$

El que actúe el factor $1/4\pi$ fue un paso arbitrario, que tenía el efecto de eliminar el 4π que aparecería en algunas fórmulas a costa de introducirlo en algunas otras, como aquí en la ley de Coulomb. Esto es todo lo que significa "racionalizado". La constante ϵ_0 se llama constante dieléctrica (o "permitividad") del vacío.

El potencial eléctrico se mide en volt y la intensidad del campo eléctrico en volt/metro. La fuerza sobre una carga q en un campo E , vale:

$$F \text{ (newtons)} = qE \text{ (coulombs} \times \text{volts} \times \text{metros)} \quad (4)$$

Un ampere es un coulomb/seg. La fuerza por metro de longitud entre dos hilos paralelos, separados r metros, recorridos por la corriente I medida en ampere, es:

$$f \text{ (newtons/metro)} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{2I^2}{r} \frac{(\text{amp}^2)}{(\text{metros})} \quad (5)$$

Recordando nuestra fórmula CGS del mismo caso,

$$f \text{ (dinas/cm)} = \frac{2I^2}{rc^2} \frac{(\text{ues/seg})^2}{(\text{cm}^3/\text{seg}^2)} \quad (6)$$

XXII Nota sobre el sistema MKS de unidades eléctricas

calculamos que $(\mu_0/4\pi)$ debe tener el valor 10^{-7} . Así que la constante μ_0 , llamada permeabilidad del vacío, debe ser

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ newtons/amp}^2 \text{ (exactamente)} \quad (7)$$

El campo magnético **B** se define escribiendo la fuerza de Lorentz como sigue:

$$\mathbf{F} \text{ (newtons)} = q\mathbf{E} \times q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (8)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de la partícula en metros/seg, q su carga en coulomb. Esto requiere una nueva unidad para **B**. La unidad se llama *tesla*, o *weber/m²*. Un tesla equivale precisamente a 10^4 gauss. En este sistema, el campo auxiliar **H** se expresa en distintas unidades, y se relaciona a **B**, en el vacío, de esta manera:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \text{ (en el espacio libre)} \quad (9)$$

La relación de **H** a la corriente libre es

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{libre}} \quad (10)$$

I_{libre} indica la corriente libre, en ampere, limitada por la línea cerrada a lo largo de la cual se toma la integral curvilínea. Ya que $d\mathbf{s}$ se mide en metros, la unidad para \mathbf{H} se llama sencillamente, *ampere/metro*.

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío, en el sistema MKS racionalizado se escriben así:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= \rho & \text{rotor } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 & \text{rotor } \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \quad (11)$$

Si se comparan estas fórmulas con nuestra versión en unidades Gaussianas CGS, en las que aparece c , podemos ver que las Ec. 11 implican una velocidad de la onda $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ (en metros/seg). O sea:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (12)$$

En nuestro sistema CGS Gaussiano la unidad de carga, ues, se estableció por la ley de Coulomb, con $k \equiv 1$. En el sistema MKS el coulomb se define, básicamente, no por la Ec. 1 sino por la Ec. 5, es decir, por la fuerza entre corrientes, mejor que por la fuerza entre cargas. De la Ec. 5 sabemos que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$. En otras palabras, si una nueva medida experimental de la celeridad de la luz obligase a cambiar el valor aceptado de c , tendríamos que revisar el valor de ϵ_0 no el de μ_0 .

Nota sobre el sistema MKS de unidades eléctricas XXIII

A continuación damos una tabla parcial de unidades MKS, con sus equivalentes en unidades Gaussianas CGS.

Magnitud	Símbolo	Unidad en el sistema	
		MKS racionalizado	Equivalente en unidades Gaussianas CGS
Distancia	s	metro	10^2 cm
Fuerza	F	newton	10^5 dinas
Trabajo, energía	W	joule	10^7 erg
Carga	q	coulomb	$2,998 \times 10^9$ ues
Corriente	I	ampere	$2,998 \times 10^9$ ues/seg
Potencial eléctrico	φ	volt	$(1/299,8)$ statvolts
Campo eléctrico	E	volts/metros	$(1/29980)$ statvolts/cm
Resistencia	R	ohm	$1,139 \times 10^{-12}$ seg/cm
Campo magnético	B	tesla	10^4 gauss
Flujo magnético	Φ	weber	10^8 gauss-cm ²
Campo auxiliar H	H	amperes/metro	$4\pi \times 10^{-3}$ oersted

Este sistema MKS es conveniente en ingeniería. Para tratar la física fundamental de los campos y la materia tiene un defecto básico. Las ecuaciones de Maxwell para los campos en el vacío, en este sistema son simétricas en el campo eléctrico y en el magnético solamente si como campo magnético aparece H en lugar de B . (Adviértase que las ecuaciones 11 no son simétricas, incluso en ausencia de J .) Por otro lado, como demostramos en el Cap. 10, B y no H es el campo magnético fundamental en el interior de la materia. Esto no es cosa de definición de las unidades, sino un hecho de la naturaleza, que refleja la ausencia de carga magnética. Así que el sistema MKS, tal como se ha construido, tiende a oscurecer tanto la simetría electromagnética fundamental del vacío como la asimetría esencial de las fuentes. Esta es una de las razones para que hayamos preferido el sistema Gaussiano CGS en este libro. Otra razón es que las unidades Gaussianas CGS, aumentadas por las unidades prácticas en ocasiones, son aún las unidades usadas por la mayoría de los físicos.

Índice analítico

<i>Prólogo al Curso de Física de Berkeley</i>	V
<i>Nota agregada</i>	VI
<i>Prólogo al Volumen III</i>	IX
<i>Agradecimientos</i>	XIII
<i>Notas didácticas</i>	XV
<i>Nota sobre el sistema MKS de unidades eléctricas</i>	XX
 Capítulo 1 <i>Oscilaciones libres de sistemas simples</i>	1
1.1 Introducción	2
1.2 Oscilaciones libres de sistemas con un grado de libertad	3
1.3 Linealidad y el principio de superposición	13
1.4 Oscilaciones libres de sistemas con dos grados de libertad	17
1.5 Pulsaciones	31
Problemas y Experimentos caseros	40
 Capítulo 2 <i>Oscilaciones libres de sistemas con muchos grados de libertad</i>	51
2.1 Introducción	52
2.2 Modos transversales de una cuerda continua	54
2.3 Movimiento general de una cuerda continua y análisis de Fourier	64
2.4 Modos de un sistema no continuo con N grados de libertad	77
Problemas y Experimentos caseros	97
 Capítulo 3 <i>Oscilaciones forzadas</i>	109
3.1 Introducción	110
3.2 Oscilador armónico unidimensional amortiguado	110
3.3 Resonancias en un sistema con dos grados de libertad	126
3.4 Filtros	131
3.5 Oscilaciones forzadas de sistemas cerrados con muchos grados de libertad	141
Problemas y Experimentos caseros	158
 Capítulo 4 <i>Ondas de propagación</i>	167
4.1 Introducción	168
4.2 Ondas de propagación armónicas en una dimensión y velocidad de fase	169
4.3 Índice de refracción y difracción	190
4.4 Impedancia y flujo de energía	207
Problemas y Experimentos caseros	232
 Capítulo 5 <i>Reflexión</i>	243
5.1 Introducción	244

XXVI Índice analítico

5.2	Terminación perfecta	244
5.3	Reflexión y transmisión	251
5.4	Puente de impedancia entre dos medios transparentes	265
5.5	Reflexión en películas delgadas	269
	Problemas y Experimentos caseros	272

Capítulo 6 Modulaciones, pulsaciones y paquetes de ondas 287

6.1	Introducción	288
6.2	Velocidad de grupo	288
6.3	Pulsaciones	300
6.4	Análisis de Fourier de pulsaciones	317
6.5	Análisis de Fourier de un paquete de ondas de propagación	330
	Problemas y Experimentos caseros	335

Capítulo 7 Ondas en dos y tres dimensiones 353

7.1	Introducción	354
7.2	Ondas armónicas planas y el vector propagación	355
7.3	Ondas de agua	369
7.4	Ondas electromagnéticas	379
7.5	Radiación de una carga puntual	391
	Problemas y Experimentos caseros	407

Capítulo 8 Polarización 419

8.1	Introducción	420
8.2	Descripción de estados de polarización	421
8.3	Producción de ondas transversales polarizadas	434
8.4	Doble refracción	447
8.5	Ancho de banda, tiempo de coherencia y polarización	455
	Problemas y Experimentos caseros	466

Capítulo 9 Interferencia y difracción 479

9.1	Introducción	481
9.2	Interferencia entre dos fuentes puntuales coherentes	482
9.3	Interferencia entre dos fuentes independientes	496
9.4	Cuán grande puede ser una fuente "puntual" de luz	500
9.5	Ancho angular de un "haz" de ondas de propagación	503
9.6	Difracción y principio de Huygens	508
9.7	Optica geométrica	531
	Problemas y Experimentos caseros	552

Temas suplementarios 575

1	Ejemplos "microscópicos" de osciladores idénticos débilmente acoplados	576
---	--	-----

Índice analítico XXVII

- 2 Relación de dispersión para ondas de de Broglie 578
- 3 Penetración de una "partícula" dentro de una región del espacio "clásicamente prohibida" 582
- 4 Velocidades de fase y de grupo para ondas de de Broglie 584
- 5 Ecuaciones de onda para las ondas de de Broglie 586
- 6 Radiación electromagnética de un "átomo" unidimensional 588
- 7 Coherencia temporal y pulsaciones ópticas 589
- 8 Por qué es brillante el cielo 590
- 9 Ondas electromagnéticas en medios materiales 594

Apéndices 619

Lectura suplementaria 627

Índice 629

*Equipos de óptica, Tablas de unidades, Valores y constantes
e identidades útiles Contratapas*

Espectros ópticos a continuación de la pág. 552

Capítulo 1

Oscilaciones libres de sistemas simples

1.1 Introducción 2

1.2 Oscilaciones libres de sistemas con un grado de libertad 3

Nomenclatura 3
Fuerza de retorno e inercia 4
Comportamiento oscilatorio 4
Significado físico de ω^2 4
Oscilaciones amortiguadas 5
Ejemplo 1: Péndulo 5

Ejemplo 2: Masa y resortes-oscilaciones longitudinales 7
Ejemplo 3: Masa y resortes-oscilantes transversales 8
Aproximación de resorte muy estirable 9
Aproximación de pequeñas oscilaciones 10
Ejemplo 4: Circuito LC 12

1.3 Linealidad y el principio de superposición 13

Ecuaciones lineales homogéneas 14
Superposición de condiciones iniciales 15

Ecuaciones lineales inhomogéneas 16
Ejemplo 5: Péndulo esférico 16

1.4 Oscilaciones libres de sistemas con dos grados de libertad 17

Propiedades de un modo 18
Ejemplo 6: Péndulo esférico simple 19
Ejemplo 7: Oscilador armónico bidimensional 19
Coordenadas normales 20

Solución sistemática para modos 22
Ejemplo 8: Oscilaciones longitudinales de dos masas acopladas 24
Ejemplo 9: Oscilaciones transversales de dos masas acopladas 27
Ejemplo 10: Dos circuitos LC acoplados 29

1.5 Pulsaciones 31

Modulación 32
Oscilación casi armónica 33
Ejemplo 11: Pulsaciones producidas por dos diapasones 33
Detector de ley cuadrática 33

Ejemplo 12: Pulsaciones entre dos fuentes de luz visible 34
Ejemplo 13: Pulsaciones entre dos modos normales de dos osciladores idénticos débilmente acoplados 36
Ejemplos esotéricos 39

Problemas y experimentos caseros 40

Capítulo 1 *Oscilaciones libres de sistemas simples*

1.1 *Introducción*

El mundo está lleno de cosas que se mueven; sus movimientos pueden ser divididos —*grosso modo*— en dos clases, según que el objeto que se mueve permanezca cerca de un lugar o se traslade de un lugar a otro. Un péndulo oscilando, las cuerdas de un violín, electrones vibrando en átomos, luz rebotando de un lado a otro entre espejos de un laser, son ejemplos de la primera clase. Ejemplos paralelos de movimientos de traslación son el desplazamiento de un disco de goma en el hockey sobre hielo, una vibración viajando por una larga cuerda estirada al pulsarla en uno de sus extremos, las olas agitadas del océano, el haz de electrones de un tubo de TV, el rayo de luz emitido por una estrella y captado por el ojo. A veces el mismo fenómeno puede presentar una y otra clase de movimiento, dependiendo esto de nuestro punto de vista: las olas del mar viajan hacia la playa, pero el agua (y el pato que está en la superficie) se mueven hacia arriba y abajo, adelante y atrás, sin trasladarse. La pulsación se desplaza por la cuerda, pero el material de la cuerda vibra sin trasladarse.

Comenzamos con el estudio de objetos que permanecen en una zona y oscilan o vibran alrededor de una posición promedio. En los Capítulos 1 y 2 estudiaremos numerosos ejemplos de movimiento de un sistema cerrado que ha recibido alguna excitación inicial (por una perturbación externa), y al que luego se le permite oscilar libremente sin más influencia. Dichas oscilaciones se denominan oscilaciones *libres* o *naturales*. En el Capítulo 1 el estudio de estos sistemas simples que tienen una o dos partes móviles será la base para la comprensión de las oscilaciones libres de sistemas con numerosas partes móviles; en el Capítulo 2 encontraremos que el movimiento de un complicado sistema con varias partes móviles, siempre puede considerarse como compuesto por movimientos más simples, llamados *modos*, que ocurren simultáneamente. Independiente de la complejidad del sistema hallaremos que cada uno de sus modos tiene propiedades muy similares a las de un oscilador armónico simple. Así veremos que en el movimiento de un sistema en uno solo de sus modos, cada parte móvil experimenta la misma fuerza de retorno por unidad de masas que por unidad de desplazamiento y que todas las partes móviles oscilan con la misma dependencia del tiempo $\cos(\omega t + \varphi)$, con la misma frecuencia ω y la misma constante de fase φ .

Cada uno de los sistemas que estudiaremos es descrito por alguna magnitud física cuyo desplazamiento del valor equilibrio varía con la posición en el sistema y en el tiempo. En los ejemplos mecánicos (con

partes móviles que son masas puntuales sujetas a fuerzas de retorno), la magnitud física es el desplazamiento de la masa en el punto x, y, z y de su posición de equilibrio. El desplazamiento es descrito por un vector $\psi(x, y, z, t)$. A veces llamamos a esta función vectorial de x, y, z, t , *función de onda*. (Sólo es una función continua de x, y, z , cuando podemos utilizar la aproximación continua, p. ej., cuando vecinos cercanos tienen esencialmente el mismo movimiento.) En algunos de los ejemplos de electricidad, la magnitud física puede ser la corriente en una espiral o la carga de un condensador. En otros, puede ser el campo eléctrico $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ o el campo magnético $\mathbf{B}(x, y, z, t)$. En estos últimos casos, las ondas se denominan ondas electromagnéticas.

1.2 Oscilaciones libres de sistemas con un grado de libertad

Comenzaremos con objetos que permanezcan en una zona, oscilando o vibrando alrededor de una posición promedio. Estos sistemas simples, como un péndulo que oscila en un plano, una masa en un resorte y un circuito LC , cuya configuración puede especificarse completamente, en todo momento, a través de una sola magnitud, se dice que tienen un solo grado de libertad, o también una sola parte móvil (véase Fig. 1.1). Por ejemplo, el péndulo oscilando puede ser descrito por el ángulo que la cuerda forma con la vertical, y el circuito LC por la carga del capacitor. (Un péndulo que oscila en cualquier dirección, como una plomada en una cuerda, tiene dos grados de libertad; se necesitan dos coordenadas para determinar la posición de la plomada. El péndulo de un reloj de pared oscila sólo en un plano, y tiene sólo un grado de libertad.)

En todos estos sistemas con un grado de libertad, encontraremos que el desplazamiento de la "parte móvil" de su valor de equilibrio tiene la misma dependencia temporal simple (llamada *oscilación armónica*),

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Para la masa oscilando, ψ puede representar el desplazamiento de la masa de su posición de equilibrio; para el circuito LC , puede representar la corriente en el inductor o la carga del capacitor. En forma más precisa encontraremos que la ecuación (1) da la dependencia con el tiempo, siempre que las partes móviles no se alejen demasiado de su posición de equilibrio. [Para ángulos de oscilación grandes en el péndulo, la ecuación (1) es una aproximación pobre de la ecuación del movimiento; para grandes desplazamientos de un resorte real, la fuerza de retorno no es proporcional al desplazamiento y el movimiento no está descrito por la ecuación (1); una carga suficientemente grande en un capacitor causa la "ruptura" de éste por chispa entre las placas, y la carga entonces no satisface la ecuación (1).]

Nomenclatura. Nosotros usamos la siguiente nomenclatura en la ecuación (1): A es una constante positiva denominada *amplitud*; ω es la

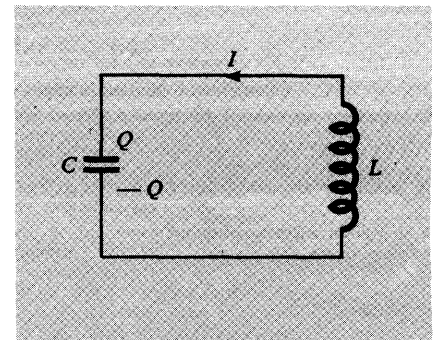
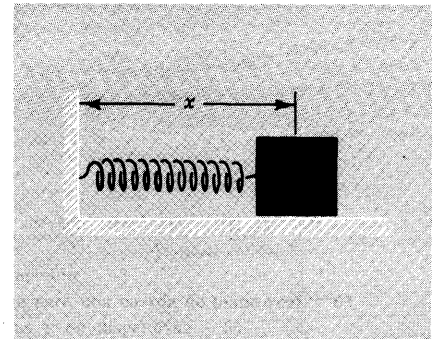
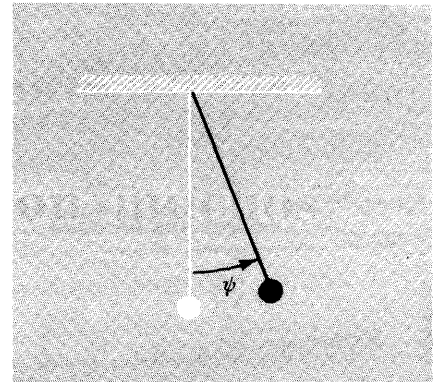


Fig. 1-1 Sistemas de un grado de libertad. (El péndulo está obligado a moverse en un plano.)

4 Oscilaciones libres de sistemas simples

frecuencia angular medida en segundos inversos; $\nu = \omega/2\pi$ es la frecuencia medida en ciclos por segundo, o hertz (que se abrevia cps, o Hz). La inversa de ν se denomina período T , que está dado en segundos por ciclo:

$$T = \frac{1}{\nu}. \quad (2)$$

La *constante de fase* φ corresponde a la elección del cero de tiempo. A menudo no interesa, en particular, el valor de la constante de fase. En esos casos siempre es posible elegir el origen, de tal manera que φ tome el valor cero y entonces es posible escribir $\psi = A \cos \omega t$ o $\psi = A \sin \omega t$ en lugar de la expresión más general ecuación (1).

Fuerza de retorno e inercia. El comportamiento oscilatorio representado por la ecuación (1) resulta siempre del entrelaje de dos propiedades intrínsecas del sistema físico que tienen tendencias opuestas: la *fuerza de retorno* y la *inercia*. La “fuerza de retorno” trata de volver ψ a cero impartiendo una “velocidad” $d\psi/dt$ apropiada a la parte móvil. Cuanto mayor es ψ , mayor es la fuerza de retorno. Para el circuito oscilante LC , la fuerza de retorno se debe a la fuerza repulsiva entre los electrones, que determina una distribución de éstos igual en cada placa, dando carga cero, en lugar de una acumulación de los mismos en una de las placas del capacitor. La segunda propiedad, “inercia”, se “opone” a cualquier cambio en $d\psi/dt$. Para el circuito oscilante LC , la inercia se debe a la inductancia L , que se opone a cualquier cambio en la corriente $d\psi/dt$ (representando como φ la carga del condensador.

Comportamiento oscilatorio. Si comenzamos con ψ positiva y $d\psi/dt$ cero, la fuerza de retorno da una aceleración que induce una velocidad negativa. En el momento en que ψ vuelve a cero, la velocidad negativa es máxima. La fuerza de retorno es cero en $\psi = 0$, pero la velocidad negativa induce ahora un desplazamiento negativo. La fuerza de retorno se hace entonces positiva, pero ahora debe sobrepasar la inercia de la velocidad negativa. Finalmente, la velocidad $d\psi/dt$ es cero, pero en el momento en que el desplazamiento es grande y negativo el proceso entonces se invierte. Este ciclo ocurre indefinidamente: la fuerza de retorno trata de llevar ψ a cero; en este proceso induce una velocidad; la inercia conserva esta velocidad y provoca un “sobredesplazamiento” de ψ . El sistema oscila.

Significado físico de ω^2 . La frecuencia angular de oscilación ω está relacionada a las propiedades físicas del sistema en todos los casos (como mostraremos) por la relación

$\omega^2 = \text{fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa.}$

 (3)

Algunas veces, como en el caso de los ejemplos eléctricos (circuito LC), la “masa inerte” puede no ser realmente masa.

Oscilaciones amortiguadas. Si a un sistema oscilante no se le perturba, continuará oscilando indefinidamente de acuerdo con la ecuación (1). Sin embargo, en cualquier situación física real hay procesos de “fricción” o “resistivos” que amortiguan el movimiento. Así, una descripción más realista de cualquier sistema oscilante está dada por una “oscilación amortiguada”. Si al sistema se le coloca en oscilación en $t = 0$ (imprimiéndole un golpe, cerrando una llave o de cualquier otra forma), encontramos que (véase Vol. I, Cap. 7, pág. 209)

$$\psi(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

para $t \geq 0$, en el entendimiento que ψ es cero para $t < 0$. Para simplificar más utilizaremos la ecuación (1) en lugar de la ecuación (4), más realista, en los ejemplos siguientes. Estamos despreciando la fricción, o la resistencia en el caso de un circuito LC , tomando el tiempo de decaimiento τ como infinito.

Ejemplo 1: Péndulo

Un péndulo simple consiste en una cuerda o en una varilla sin masa, de longitud l , unida en su extremo superior a un soporte rígido y en el inferior a una masa puntual M (véase Fig. 1.2). Sea ψ el ángulo (en el sistema natural) que la cuerda tiende con la vertical. (El péndulo oscila en un plano; su configuración está dada por ψ solamente.) El desplazamiento de la masa, tal como se mide a lo largo del perímetro del arco circular de su trayectoria, es $l\psi$. La velocidad tangencial instantánea correspondiente es $l d\psi/dt$. La aceleración tangencial correspondiente es $l d^2\psi/dt^2$. La fuerza de retorno es la componente tangencial de la fuerza. La cuerda no contribuye a esta componente de fuerza. El peso Mg contribuye a la componente tangencial en $-Mg \sin \psi$. Esto es, de acuerdo a la segunda ley de Newton (masa por aceleración igual a fuerza) tenemos

$$\frac{Ml d^2\psi}{dt^2} = -Mg \sin \psi(t). \quad (5)$$

Usamos ahora el desarrollo en serie de Taylor [Apéndice, Ec. (4)]

$$\sin \psi = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \dots, \quad (6)$$

donde los puntos suspensivos indican el resto de la serie. Vemos que para ψ suficientemente pequeño (recuérdese que en el sistema natural) podemos despreciar todos los términos en la ecuación (6), excepto el

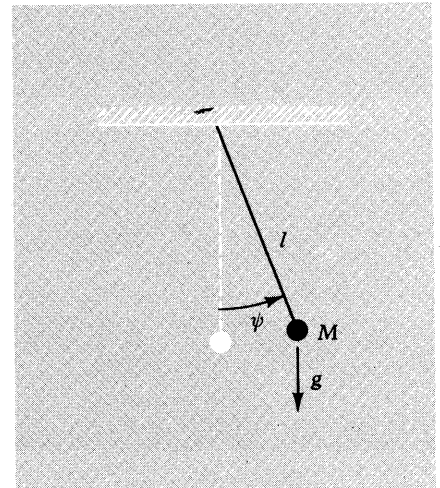


Fig. 1-2 Péndulo simple.

6 Oscilaciones libres de sistemas simples

primero, ψ . Podríamos preguntar, ¿qué es lo que se considera como “suficientemente pequeño”? Esta pregunta no tiene una respuesta universal, depende de la exactitud con que se pueda determinar la función $\psi(t)$ en el experimento que se va a realizar (recordemos que esto es física; nada hay perfectamente medible) y del interés puesto en dicha exactitud. Así, por ejemplo, para $\psi = 0,10$ rad ($5,7^\circ$), $\sin \psi$ es 0,0998; en determinados problemas “0,0998 = 0,1000” es una aproximación pobre. Para $\psi = 1,0$ rad ($57,3^\circ$), $\sin \psi$ es 0,841; en algunos problemas “0,8 = 1,0” es una aproximación adecuada.

Si tenemos sólo el primer término en la ecuación (6), entonces la ecuación (5) toma la forma

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi, \quad (7)$$

donde

$$\omega^2 = \frac{g}{l}. \quad (8)$$

La solución general de la ecuación (7) es la oscilación armónica dada por

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Nótese que la frecuencia angular de oscilación está dada por la ecuación (8) y que puede escribirse como

$\omega^2 =$ fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa:

$$\omega^2 = \frac{Mg\psi}{(l\psi)M} = \frac{g}{l},$$

usando la aproximación $\sin \psi = \psi$.

Las dos constantes A y φ están determinadas por las condiciones iniciales, por ejemplo, por el desplazamiento y la velocidad al tiempo $t = 0$. (Dado que ψ es un desplazamiento angular, la “velocidad” correspondiente es la velocidad angular $d\psi/dt$.) Así tenemos

$$\begin{aligned} \psi(t) &= A \cos(\omega t + \varphi), \\ \dot{\psi}(t) &\equiv \frac{d\psi(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} \psi(0) &= A \cos \varphi, \\ \dot{\psi}(0) &= -\omega A \sin \varphi. \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones pueden ser resueltas para A , que es una constante positiva, y para $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$ (lo que determina a φ).

Ejemplo 2: Masa y resortes - oscilaciones longitudinales

Una masa M se desliza sobre una superficie sin fricción. Está conectada a dos paredes rígidas mediante dos resortes idénticos, cada uno de los cuales tiene una masa cero, constante elástica K y longitud relajada a_0 . En la posición de equilibrio cada resorte está estirado a una longitud a , y cada resorte soporta una tensión $K(a - a_0)$ en el equilibrio (véase Fig. 1.3a y b). Sea z la distancia de M a la pared izquierda. Entonces la distancia de M a la pared derecha es $2a - z$ (véase Fig. 1.3c). El resorte izquierdo ejerce una fuerza $K(z - a_0)$ en la dirección $-z$. El resorte derecho ejerce una fuerza $K(2a - z - a_0)$ en la dirección $+z$. La fuerza total F_z en la dirección $+z$ es la superposición (suma) de estas dos fuerzas:

$$\begin{aligned} F_z &= -K(z - a_0) + K(2a - z - a_0) \\ &= -2K(z - a). \end{aligned}$$

La segunda ley de Newton da entonces

$$\frac{M d^2 z}{dt^2} = F_z = -2K(z - a). \quad (9)$$

El desplazamiento del equilibrio es $z - a$. Designamos esto por $\psi(t)$:

$$\psi(t) \equiv z(t) - a.$$

entonces

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Podemos escribir ahora la ecuación (9) en la forma

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\omega^2 \psi, \quad (10)$$

con

$$\omega^2 = \frac{2K}{M}. \quad (11)$$

La solución general de la ecuación (10) es otra vez la oscilación armónica $\psi = A \cos(\omega t + \varphi)$. Nótese que la ecuación (11) tiene la forma

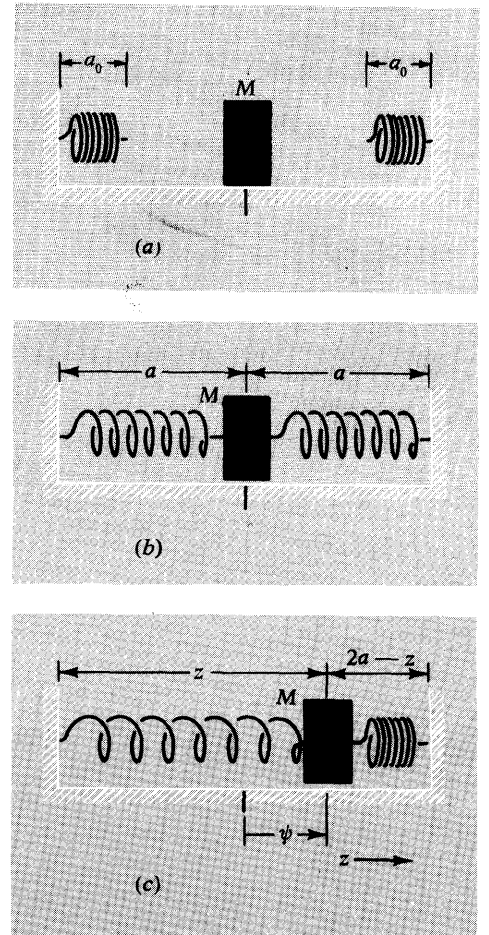


Fig. 1-3 Oscilaciones longitudinales. (a) Resortes relajados y sin unir. (b) Resorte unido, M en posición de equilibrio. (c) Configuración general.

8 Oscilaciones libres de sistemas simples

ω^2 = fuerza por unidad de desplazamiento por unidad de masa, dado que la fuerza de retorno es $2K\psi$ para un desplazamiento ψ .

Ejemplo 3: Masa y resortes - oscilaciones transversales

El sistema se observa en la Fig. 1.4. La masa M está suspendida entre dos soportes rígidos mediante dos resortes idénticos. Los resortes tienen, cada uno de ellos, masa cero, constante K y una longitud, sin tensiones, a_0 . Cada uno de ellos tiene una longitud a en la posición de equilibrio de M . Despreciamos el efecto de la gravedad. (La gravedad no produce ninguna fuerza de retorno en este problema. Obliga al sistema a “combarse”, pero esto no afecta los resultados en el orden de aproximación en que estamos interesados.) La masa M tiene ahora tres grados de libertad: Se puede mover en la dirección de z (a lo largo del eje de los resortes) para dar una oscilación “longitudinal”. Éste es el movimiento que hemos considerado anteriormente y no necesitamos repetir aquellas consideraciones. Se puede mover también en la dirección x o en la dirección y para dar oscilaciones transversales. Por simplicidad consideremos sólo el movimiento a lo largo de x . Podemos imaginar que existe algún vínculo que no permite el movimiento a lo largo de y y z , pero posibilita la completa libertad de movimiento, sin fricción en la dirección transversal x . (Por ejemplo, podríamos perforar un agujero a través de M y ubicar una varilla que no provoque fricción, que atravesase dicho agujero, rígidamente unida a las paredes y orientada a lo largo de x . Sin embargo, podemos convencernos fácilmente de que este

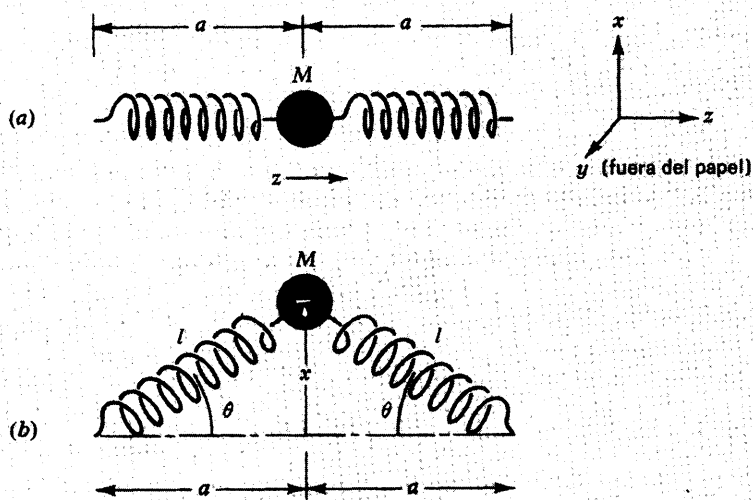


Fig. 1-4 Oscilaciones transversales. (a) Configuración de equilibrio. (b) Configuración general (para el movimiento a lo largo de x).

vínculo es innecesario. A partir de la simetría de la Fig. 1.4 se puede ver que si a un tiempo dado, el sistema está oscilando a lo largo de x , no tiene ninguna tendencia de adquirir algún movimiento a lo largo de y o z . La misma circunstancia es cierta para cada uno de los otros dos grados de libertad: no se desarrollan fuerzas no balanceadas a lo largo de x o y debido a la oscilación a lo largo de z , tampoco a lo largo de x o z debido a la oscilación a lo largo de y .)

En el equilibrio (Fig. 1.4a), cada uno de los resortes tiene longitud a y ejerce una tensión T_0 , dada por

$$T_0 = K(a - a_0). \quad (12)$$

En la configuración general (Fig. 1.4b), cada resorte tiene longitud l y tensión

$$T = K(l - a_0). \quad (13)$$

Esta tensión se ejerce a lo largo del eje del resorte. Tomando la componente x de esta fuerza, vemos que cada resorte contribuye con una fuerza de retorno $T \sin \theta$ en la dirección $-x$. Usando la segunda ley de Newton y el hecho de que $\sin \theta$ es x/l , encontramos

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x = -2T \sin \theta \\ &= -2K(l - a_0) \frac{x}{l} = -2Kx \left(1 - \frac{a_0}{l}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

La ecuación (14) es exacta, bajo nuestras suposiciones (incluyendo la suposición expresada por la Ec. (13), que el resorte es "lineal", o sea, la "ley de Hooke"). Obsérvese que la longitud del resorte l que aparece a la derecha de la ecuación (14) es una función de x . Luego la ecuación (14) no es exactamente de la forma que da lugar a oscilaciones armónicas, porque la fuerza de retorno sobre M no es con exactitud linealmente proporcional al desplazamiento desde el equilibrio, x .

Aproximación de resorte muy estirable. Hay dos caminos interesantes mediante los cuales podemos obtener una ecuación aproximada con una fuerza restitutiva lineal. En el primer camino despreciamos a_0/a comparado con la unidad. Luego dado que l es siempre mayor que a , despreciamos a_0/l en la ecuación (14). [Existen resortes helicoidales de longitud relajada a_0 de alrededor de tres pulgadas y que pueden ser estirados hasta una longitud a de alrededor de quince pies sin exceder el límite elástico. Esto daría $a_0/a < 1/60$ en la ecuación (14).] Usando esta aproximación podemos escribir la ecuación (14) en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad (15)$$

con

$$\omega^2 = \frac{2K}{M} = \frac{2T_0}{Ma} \quad (\text{para } a_0 = 0). \quad (16)$$

Ésta tiene la solución $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, por ejemplo, oscilación armónica. Adviértase que no hay ninguna restricción en la amplitud A . Podemos tener oscilaciones “grandes” y tener aún linealidad perfecta de la fuerza de retorno. Adviértase también que la frecuencia de las oscilaciones transversales, tal como está dada por la ecuación (16), es la misma que para las oscilaciones longitudinales, tal como está dada por la ecuación (11). Esto no es cierto en general. Es válido solamente en la aproximación del resorte muy estirable, donde efectivamente tomamos $a_0 = 0$.

Aproximación de pequeñas oscilaciones. Si a_0 no puede ser despreciado con respecto a a (es el caso, por ejemplo, de una cuerda de goma, en las condiciones que comúnmente se encuentran en las demostraciones en clase), la aproximación de resorte muy estirable no se aplica. Entonces F_x en la ecuación (14) no es lineal en x . Sin embargo, mostraremos que si los desplazamientos x son pequeños comparados con la longitud a , entonces l difiere de a sólo en una cantidad del orden de $a(x/a)^2$. En la aproximación de *pequeñas oscilaciones*, despreciamos los términos en F_x que no son lineales en x/a . Realicemos ahora la parte algebraica: Deseamos expresar l en la ecuación (14) como $l = a + \text{“algo”}$, donde “algo” se hace nulo cuando $x = 0$. Mientras l es mayor que a , siendo x positivo o negativo, “algo” debe ser una función par de x . De hecho, tenemos de la Fig. 1.4

$$\begin{aligned} l^2 &= a^2 + x^2 \\ &= a^2(1 + \epsilon), \quad \epsilon \equiv \frac{x^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} &= \frac{1}{a}(1 + \epsilon)^{-(1/2)} \\ &= \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\epsilon\right) + \left(\frac{3}{8}\epsilon^2\right) - \dots \right], \end{aligned} \quad (17)$$

donde hemos utilizado la serie de expansión de Taylor [Apéndice, Ec. (20)] para $(1 + x)^n$ con $n = -\frac{1}{2}$ y $x = \epsilon$. En el próximo paso utilizaremos la aproximación de pequeñas oscilaciones. Suponemos que $\epsilon \ll 1$

y descartamos los términos de orden superior en la serie de la Ecuación (17). (Eventualmente, descartaremos todos los términos excepto el primero, $1/a$.) Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{l} &\approx \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \epsilon \right) \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} \right) \right].\end{aligned}\quad (18)$$

Insertando la ecuación (18) en la ecuación (14), encontramos

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{2Kx}{M} \left(1 - \frac{a_0}{l} \right) \\ &= -\frac{2Kx}{M} \left\{ 1 - \frac{a_0}{a} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} \right) + \dots \right] \right\} \\ &= -\frac{2K}{Ma} (a - a_0)x + \frac{K}{M} a_0 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \dots.\end{aligned}\quad (19)$$

Descartando los términos cúbicos y de orden superior, obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\frac{2K}{Ma} (a - a_0)x = -\frac{2T_0x}{Ma}.\quad (20)$$

[En la segunda igualdad de la ecuación (20), utilizamos T_0 tal como está dado por la ecuación (12).] La ecuación (20) es de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

con

$$\omega^2 = \frac{2T_0}{Ma}.\quad (21)$$

En consecuencia, $x(t)$ está dado por la oscilación armónica

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi).$$

Advierta que ω^2 dada por la ecuación (21) es la fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa; para pequeñas oscilaciones, la fuerza de retorno es la tensión T_0 por $\sin \theta$, el cual es x/a , por dos (dos resortes). El desplazamiento es x ; la masa es M . Entonces, la fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa es $2T_0(x/a)/xM$.

Advierta que la frecuencia para oscilaciones transversales está dada por $\omega^2 = 2T_0/Ma$, tanto para el caso de la aproximación de resorte muy

12 Oscilaciones libres de sistemas simples

estirable ($a_0 = 0$) como para la aproximación de pequeñas oscilaciones ($x/a \ll 1$), como vemos por comparación de las ecuaciones (16) y (21). En la aproximación de resorte muy estirable, la oscilación longitudinal tiene también la misma frecuencia, tal como vemos en las ecuaciones (11) y (16). Si la aproximación de resorte muy estirable no es válida (por ejemplo, si a_0/a no puede ser despreciado), entonces las oscilaciones longitudinales y las oscilaciones transversales (pequeñas) no tienen la misma frecuencia, tal como vemos de las ecuaciones (11), (12) y (21). En este caso,

$$(\omega^2)_{\text{long}} = \frac{2Ka}{Ma}, \quad (22)$$

$$(\omega^2)_{\text{tr}} = \frac{2T_0}{Ma}, \quad T_0 = K(a - a_0). \quad (23)$$

Esto es, para pequeñas oscilaciones de una cuerda de goma (donde a_0/a no puede ser despreciado), las oscilaciones longitudinales son más rápidas que las oscilaciones transversales:

$$\frac{\omega_{\text{long}}}{\omega_{\text{tr}}} = \frac{1}{\left[1 - \frac{a_0}{a}\right]^{1/2}}.$$

Ejemplo 4: Circuito LC

(Para una discusión más completa de los circuitos LC, véase Vol. 2, Cap. 8.) Consideremos el circuito en serie LC de la Fig. 1.5. La carga desplazada desde la placa inferior a la superior del capacitor de la izquierda es Q_1 . Aquella desplazada desde la placa inferior a la superior del capacitor de la derecha es Q_2 . La fuerza electromotriz (fem) a través de la inductancia es igual a la "fem contraelectromotriz", $L di/dt$. La carga Q_1 da una fuerza electromotriz igual a $C^{-1}Q_1$, tal que Q_1 positiva da $L di/dt$ positiva. De la misma manera, a partir de la Fig. 1.5, Q_2 positiva da $L di/dt$ negativa. Entonces tenemos

$$L \frac{di}{dt} = C^{-1}Q_1 - C^{-1}Q_2. \quad (24)$$

En el equilibrio no hay carga en ningún capacitor. La carga Q_2 es formada por la corriente I a expensas de la carga Q_1 . Así, usando conservación de carga y la convención de signos de la Fig. 1.5, tenemos

$$Q_1 = -Q_2, \quad (25)$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = I. \quad (26)$$

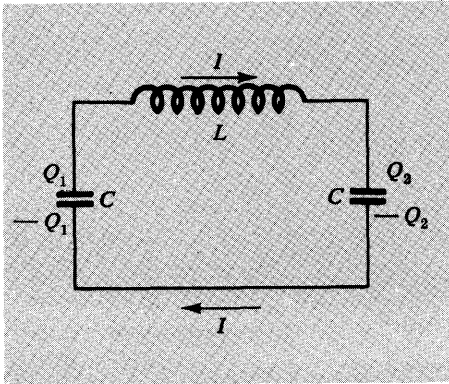


Fig. 1-5 Circuito LC serie. Se indican convenciones de signos para Q e I . Q_1 (o Q_2) es positiva si la placa superior es positiva con respecto a la placa inferior; I es positiva si la carga positiva fluye en la dirección de las flechas.

En razón de las ecuaciones (25) y (26) existe un solo grado de libertad. Podemos describir la configuración instantánea del sistema dando Q_1 , Q_2 o I . La corriente I será más útil en nuestro trabajo posterior (cuando trabajemos con sistemas con más de un grado de libertad), y la usaremos aquí. Usaremos primero la ecuación (25) para eliminar Q_1 de la ecuación (24), luego diferenciaremos con respecto a t y usaremos la ecuación (26) para eliminar Q_2 :

$$L \frac{dI}{dt} = C^{-1}Q_1 - C^{-1}Q_2 = -2C^{-1}Q_2;$$

$$L \frac{d^2I}{dt^2} = -2C^{-1} \frac{dQ_2}{dt} = -2C^{-1}I.$$

Así, la corriente $I(t)$ obedece a la ecuación

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -\omega^2 I,$$

con

$$\omega^2 = \frac{2C^{-1}}{L}, \quad (27)$$

$I(t)$ desarrolla una oscilación armónica:

$$I(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Podemos pensar en la ecuación (27) como una ilustración del hecho que ω^2 es siempre la “fuerza de retorno”, por unidad de “desplazamiento” por unidad de “inercia”. Podemos tomar la “fuerza de retorno” como la fuerza electromotriz $2C^{-1}Q$, donde Q es el “desplazamiento de carga” Q_2 . Tomamos entonces la autoinductancia L como la “inercia de la carga”. Luego la fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de inercia es $(2C^{-1}Q)/QL$.

Se puede haber notado un paralelismo matemático entre los ejemplos 2, 3 y 4. A estos ejemplos les dimos intencionalmente la misma simetría espacial (inercia en el centro, fuerzas impulsoras localizadas simétricamente a ambos lados) de tal modo que se produzca el paralelismo. Estos paralelismos son útiles a menudo como procedimientos nemotécnicos.

1.3 Linealidad y el principio de superposición

En la Sec. 1.2 hallamos soluciones para las oscilaciones del péndulo y de masas y resortes, sólo para los casos donde podíamos suponer que la fuerza de retorno era proporcional a $-\psi$, como (por ejemplo) sin dependencia en ψ^2 , ψ^3 , etc. Una ecuación diferencial que no contiene términos

de potencias mayores que la primera potencia de ψ , de $d\psi/dt$, de $d^2\psi/dt^2$, etcétera, se dice que es *lineal* en ψ y en sus derivadas respecto del tiempo. Si, además, no hay términos independientes de ψ , se dice que la ecuación es *homogénea*. Si poseen potencias superiores de ψ sus derivadas, la ecuación se dice que es *no lineal*. Por ejemplo, la ecuación (5) es no lineal, como podemos ver a partir del desarrollo del $\sin \psi$ dado por la ecuación (6). Solamente cuando despreciamos las potencias superiores de ψ obtenemos una ecuación lineal.

Las ecuaciones no lineales son generalmente difíciles de resolver. (La ecuación no lineal del péndulo está resuelta exactamente en el Volumen I, pág 225.) Afortunadamente, hay muchas situaciones físicas interesantes para las cuales las ecuaciones lineales dan una muy buena aproximación. Trataremos casi enteramente con ecuaciones lineales.

Ecuaciones lineales homogéneas. Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas tienen la siguiente importante e interesante propiedad: *La suma de dos cualesquiera de sus soluciones es ella misma una solución.* Las ecuaciones no lineales no tienen esta propiedad. La suma de dos soluciones de una ecuación no lineal no es una solución de la ecuación.

Probaremos estas afirmaciones para ambos casos (lineal y no lineal). Supongamos que hemos encontrado que la ecuación diferencial del movimiento de un sistema con un grado de libertad es de la forma

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi + \alpha\psi^2 + \beta\psi^3 + \gamma\psi^4 + \dots, \quad (28)$$

como encontramos, por ejemplo, para el péndulo [ecs. (5) y (6)] o para las oscilaciones transversales de una masa sostenida por resortes [ecuación (19)]. Si las constantes α , β y γ , etc., son todas cero, o realizando una buena aproximación pueden ser tomadas como cero, la ecuación (28) es lineal y homogénea. En caso contrario es no lineal. Ahora supongamos que $\psi_1(t)$ es una solución de la ecuación (28) y que $\psi_2(t)$ es una solución diferente. Por ejemplo ψ_1 puede ser la solución correspondiente a un desplazamiento inicial particular y a una velocidad inicial del péndulo, y ψ_2 puede corresponder a un desplazamiento inicial diferente. Por hipótesis, ψ_1 y ψ_2 satisfacen cada una de ellas la ecuación (28). Así tenemos

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -C\psi_1 + \alpha\psi_1^2 + \beta\psi_1^3 + \gamma\psi_1^4 + \dots, \quad (29)$$

y

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -C\psi_2 + \alpha\psi_2^2 + \beta\psi_2^3 + \gamma\psi_2^4 + \dots. \quad (30)$$

El problema que nos interesa a nosotros es si la superposición de ψ_1 y ψ_2 definida como la suma $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$, satisface o no la misma ecuación del movimiento, ecuación (28). Reemplazando tenemos:

$$\frac{d^2(\psi_1 + \psi_2)}{dt^2} = -C(\psi_1 + \psi_2) + \alpha(\psi_1 + \psi_2)^2 + \beta(\psi_1 + \psi_2)^3 + \dots? \quad (31)$$

El interrogante (31) tiene la respuesta “afirmativa” si, y sólo si, las constantes α , β , etc., son cero. Esto se demuestra fácilmente de la siguiente forma. Sumemos las ecuaciones (29) y (30). La suma será la ecuación (31) si, y sólo si, satisface la totalidad de las siguientes condiciones:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \frac{d^2\psi_2}{dt^2} = \frac{d^2(\psi_1 + \psi_2)}{dt^2}, \quad (32)$$

$$-C\psi_1 - C\psi_2 = -C(\psi_1 + \psi_2), \quad (33)$$

$$\alpha\psi_1^2 + \alpha\psi_2^2 = \alpha(\psi_1 + \psi_2)^2, \quad (34)$$

$$\beta\psi_1^3 + \beta\psi_2^3 = \beta(\psi_1 + \psi_2)^3, \text{ etc.} \quad (35)$$

Las ecuaciones (32) y (33) son ambas verdaderas. Las ecuaciones (34) y (35) no son ciertas a menos que α y β sean cero. Entonces vemos que la superposición de dos soluciones es una solución si y sólo si la ecuación es lineal.

La propiedad de que la superposición de soluciones sea ella misma una solución, está limitada exclusivamente a ecuaciones lineales homogéneas. Las oscilaciones que obedecen a este tipo de ecuaciones se dice que obedecen al *principio de superposición*. Nosotros no estudiaremos ningún otro tipo.

Superposición de condiciones iniciales. Como un ejemplo de aplicación del concepto de superposición, consideramos el movimiento de un péndulo simple bajo pequeñas oscilaciones. Supongamos que se ha encontrado una solución ψ_1 correspondiente a un cierto conjunto de condiciones iniciales (desplazamiento y velocidad) y otra solución ψ_2 correspondiente a un conjunto diferente de condiciones iniciales. Supongamos ahora que prescribimos un tercer conjunto de condiciones iniciales de la siguiente forma: *Superponemos las condiciones iniciales* correspondientes a ψ_1 y ψ_2 . Esto significa que damos a la masa un desplazamiento inicial que es la suma algebraica del desplazamiento inicial correspondiente al movimiento $\psi_1(t)$ y al correspondiente a $\psi_2(t)$, y damos a la masa una velocidad inicial que es la suma algebraica de las velocidades iniciales correspondientes a ψ_1 y ψ_2 . Entonces no hay necesidad de realizar más trabajo para encontrar el nuevo movimiento, descrito por $\psi_3(t)$. La solución ψ_3 es precisamente la superposición $\psi_1 + \psi_2$. Queda para el lector completar la prueba de esta afirmación. Este resultado es válido solamente si las oscilaciones del péndulo son suficientemente pe-

16 Oscilaciones libres de sistemas simples

queñas, de tal forma que podemos despreciar los términos no lineales en la fuerza de retorno.

Ecuaciones lineales inhomogéneas. Las ecuaciones lineales inhomogéneas (es decir, ecuaciones que contienen términos independientes de ψ) también dan lugar a un principio de superposición, aunque de una forma ligeramente diferente. Hay muchas situaciones físicas análogas a las de un oscilador armónico sobre el que actúa una fuerza impulsora, que satisfacen la ecuación

$$\frac{M d^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi(t) + F(t), \quad (36)$$

donde $F(t)$ es una fuerza impulsora “externa” independiente de $\psi(t)$. El principio de superposición correspondiente es: Supongamos que una fuerza impulsora $F_1(t)$ produce una oscilación $\psi_1(t)$ (cuando F_1 es la única fuerza impulsora), y supongamos otra fuerza impulsora $F_2(t)$ que produce una oscilación $\psi_2(t)$ [cuando $F_2(t)$ está presente sola]. Entonces, si ambas fuerzas impulsoras están presentes en forma simultánea [de tal manera que la fuerza total impulsora es la superposición $F_1(t) + F_2(t)$], la oscilación correspondiente [esto es, la solución correspondiente a la ec. (36)], está dada por la superposición $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$. Dejamos al lector que demuestre que esto es válido para ecuaciones lineales inhomogéneas, ecuación (36), y no es válida para una ecuación no lineal en $\psi(t)$. (Véase prob. 1.16.)

Los sistemas con los que tratamos en la Sección 1.2 y las ilustraciones del principio de superposición en esta sección, han sido todos para sistemas de un solo grado de libertad. Sin embargo, el principio de superposición es aplicable a sistemas de cualquier número de grados de libertad (cuando las ecuaciones son lineales) y lo usaremos a menudo, generalmente sin mencionarlo por su nombre.

Ejemplo 5: Péndulo esférico

Para ilustrar la aplicación del principio de superposición cuando tenemos dos grados de libertad, consideramos el movimiento de un péndulo que consiste en una masa M suspendida de una cuerda de longitud l . El péndulo oscila libremente en cualquier dirección y se le denomina *péndulo esférico*. En el equilibrio, la cuerda está en posición vertical, a lo largo de z , y la masa en $x = y = 0$. Para desplazamientos x e y suficientemente pequeños se puede demostrar fácilmente que $x(t)$ e $y(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales.

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Mg}{l} x \quad (37)$$

$$M \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Mg}{l} y. \quad (38)$$

Estas dos ecuaciones “no están acopladas”. Esto significa que la componente x de fuerza depende solamente de x , no de y , y viceversa. Así, la ecuación (37) no contiene y , y la ecuación (38) no contiene x . Las ecuaciones (37) y (38) se pueden resolver independientemente para dar

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (39)$$

$$y(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (40)$$

con

$$\omega^2 = \frac{g}{l},$$

donde las constantes A_1 , A_2 y φ_1 , φ_2 están determinadas por las condiciones iniciales de desplazamiento y de velocidad en las direcciones de x e y . El movimiento completo se puede ahora imaginar como la superposición del movimiento $\hat{x}x(t)$ y el movimiento $\hat{y}y(t)$, donde \hat{x} e \hat{y} son vectores unitarios. El valor del principio de superposición radica en el hecho que podemos resolver los movimientos a lo largo de x e y separadamente y luego superponer los dos movimientos para obtener la ecuación completa del movimiento que involucra ambos grados de libertad.

1.4 Oscilaciones libres de sistemas con dos grados de libertad

En la naturaleza hay muchos ejemplos fascinantes de sistemas que tienen dos grados de libertad. Los ejemplos más admirables implican las moléculas y las partículas elementales (especialmente mesones neutros K); su estudio requiere la mecánica cuántica. Algunos ejemplos más simples son el péndulo doble (un péndulo unido al cielo raso, el segundo unido a la masa del primero); dos péndulos acoplados por un resorte; una cuerda con dos cuentas y dos circuitos LC acoplados (véase Fig. 1.6). Para describir la configuración de un sistema son necesarias dos variables de este tipo, digamos ψ_a y ψ_b . Por ejemplo, en el caso de un péndulo simple, que tiene libertad para oscilar en cualquier dirección, las “partes móviles” ψ_a y ψ_b podrían ser las posiciones del péndulo en las dos direcciones horizontales perpendiculares; en el caso de los péndulos acoplados, las partes móviles ψ_a y ψ_b podrían ser las posiciones del péndulo; en el caso de dos circuitos LC acoplados, las “partes móviles” ψ_a y ψ_b podrían ser las cargas en los dos capacitores o las corrientes en los circuitos.

El movimiento general de un sistema con dos grados de libertad puede tener una apariencia muy complicada; ninguna parte se mueve con un movimiento armónico simple. Sin embargo, mostraremos que para dos grados de libertad y para ecuaciones lineales de movimiento, el movimiento más general es la *superposición* de dos movimientos armónicos simples, ambos ocurriendo simultáneamente. Estos dos movi-

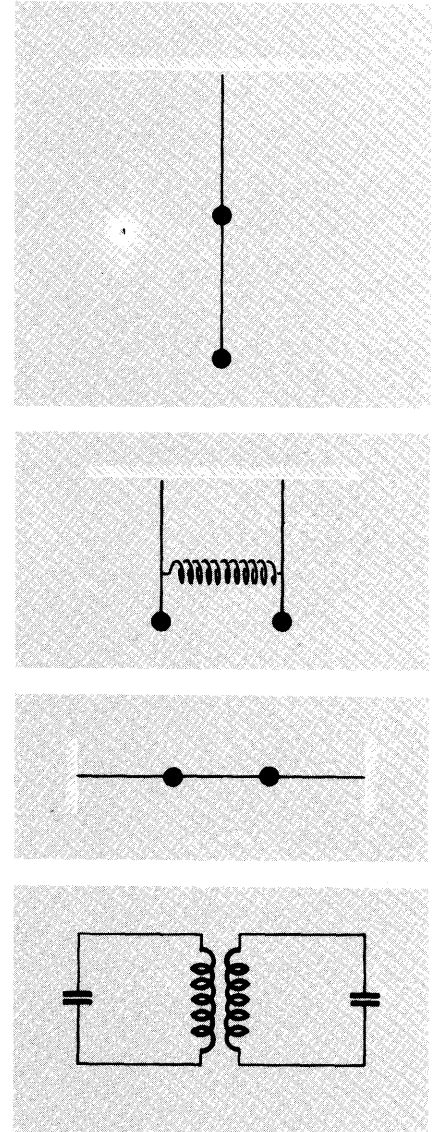


Fig. 1-6 Sistemas con dos grados de libertad. (Las masas están obligadas a mantenerse en el plano de la figura.)

18 Oscilaciones libres de sistemas simples

mientos armónicos simples (descritos más abajo), se denominan modos normales, o simplemente *modos*. Mediante una elección apropiada de las condiciones iniciales (valores iniciales apropiados de ψ_a , ψ_b , $d\psi_a/dt$ y $d\psi_b/dt$), podemos poner el sistema a oscilar en un solo modo o el otro. Esto es, los modos están “desacoplados”, aun cuando las partes móviles no lo estén.

Propiedades de un modo. Cuando solamente está presente un modo, cada parte móvil desarrolla un movimiento armónico simple. Todas las partes oscilan con la misma frecuencia. Todas las partes pasan a través de su posición de equilibrio (donde ψ es cero) simultáneamente. Esto es, por ejemplo, uno nunca tiene en un solo modo $\psi_a(t) = A \cos \omega(t)$ y $\psi_b(t) = B \sin \omega t$ (diferentes constantes de fases) o $\psi_a(t) = A \cos \omega_1 t$ y $\psi_b(t) = B \cos \omega_2 t$ (diferentes frecuencias). En lugar de esto tenemos, para un modo (al que llamaremos modo 1),

$$\begin{aligned}\psi_a(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\ \psi_b(t) &= B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = \frac{B_1}{A_1} \psi_a(t),\end{aligned}\tag{41}$$

con la *misma frecuencia y constante de fase* para ambos grados de libertad (partes móviles). De la misma manera, para el modo 2, los dos grados de libertad a y b se mueven de acuerdo a

$$\begin{aligned}\psi_a(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \psi_b(t) &= B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \frac{B_2}{A_2} \psi_a(t).\end{aligned}\tag{42}$$

Cada modo tiene su propia frecuencia característica: ω_1 , para el modo 1, ω_2 para el modo 2. En cada modo el sistema tiene también una “configuración” característica o “forma”, dada por la relación de amplitudes del movimiento de las partes móviles: A_1/B_1 , para el modo 1 y A_2/B_2 para el modo 2. Adviértase que en un modo la relación $\psi_a(t)/\psi_b(t)$ es constante, independiente del tiempo. Está dada por la relación apropiada A_1/B_1 o A_2/B_2 , que puede ser positiva o negativa.

El movimiento más general del sistema es (como mostraremos) simplemente una superposición con ambos modos oscilando simultáneamente

$$\begin{aligned}\psi_a(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \psi_b(t) &= B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).\end{aligned}\tag{43}$$

Consideremos algunos ejemplos específicos.

Ejemplo 6: Péndulo esférico simple

Este ejemplo es casi demasiado simple, porque no revela toda la riqueza de complejidad del movimiento general que corresponde a las ecuaciones (43), porque los dos modos, correspondientes respectivamente a oscilaciones en las direcciones x e y , tienen la misma frecuencia, dada por $\omega^2 = g/l$. Más que las superposiciones de la ecuación (43), correspondiente a dos frecuencias diferentes, tenemos el resultado simple ya obtenido en las ecuaciones (39) y (40).

$$\begin{aligned} x(t) \equiv \psi_a(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), & \omega_1 &= \omega, \\ y(t) \equiv \psi_b(t) &= B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), & \omega_2 &= \omega_1 = \omega, \end{aligned} \quad (44)$$

donde hemos forzado las ecuaciones (44) para que aparezca semejante a las ecuaciones (43). Que dos modos tengan la misma frecuencia es poco usual; se dice entonces que los dos modos están “degenerados”.

Ejemplo 7: Oscilador armónico bidimensional

En la Fig. 1.7 mostramos una masa M que tiene libertad para moverse en el plano xy . Está unido a las paredes por dos resortes idénticos, sin masa, de constante K_1 , orientados a lo largo de x ; y por dos vectores idénticos sin masa, de constante K_2 orientados a lo largo de y . En la aproximación de pequeñas oscilaciones, donde despreciamos x^2/a^2 , y^2/a^2 y xy/a^2 , mostraremos que la componente x de la fuerza de retorno se debe enteramente a los dos resortes K_1 . En forma semejante, la componente y de la fuerza de retorno se debe enteramente a los resortes K_2 . El lector puede probar esto escribiendo la forma exacta de F_x y F_y y luego descartando los términos no lineales. He aquí un camino más simple para verlo: Comencemos en la posición de equilibrio de la Fig. 1.7a. Mentalmente supondremos un pequeño desplazamiento de M en la dirección $+x$. La fuerza de retorno a esta altura de la argumentación se puede encontrar observando la Fig. 1.7.

$$F_x = -2K_1x, \quad F_y = 0.$$

Realizaremos luego otro pequeño desplazamiento y (comenzando al final del primer desplazamiento), esta vez en la dirección $+y$. Lo que interesa conocer es si F_x cambia. El resorte K_1 se alarga en una pequeña cantidad proporcional a y^2 . Despreciamos ese alargamiento. El resorte K_2 cambia su longitud en una cantidad proporcional a y (uno se hace corto, el otro más largo), pero la proyección de su fuerza en la dirección $+x$ es también proporcional a x . Despreciamos el producto yx . Así, F_x no cambia. Un argumento similar se aplica a F_y , obtenemos así dos ecuaciones lineales

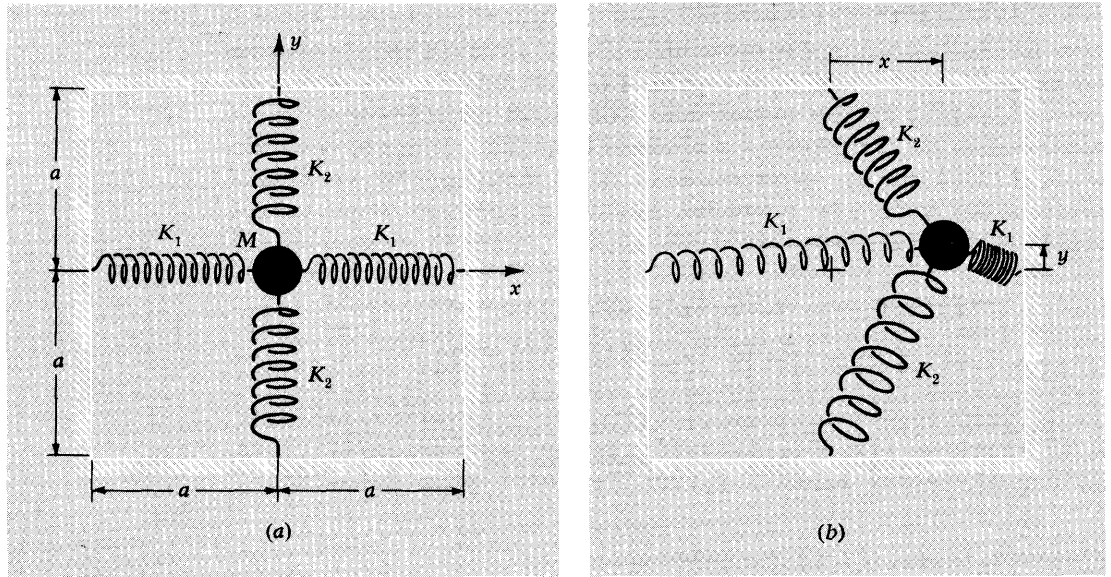


Fig. 1-7 Oscilador armónico bidimensional. (a) Equilibrio. (b) Configuración general.

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -2K_1x, \quad y \quad M \frac{d^2y}{dt^2} = -2K_2y, \quad (45)$$

que tiene la solución

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), & \omega_1^2 &= \frac{2K_1}{M}, \\ y &= B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), & \omega_2^2 &= \frac{2K_2}{M}. \end{aligned} \quad (46)$$

Vemos que el movimiento x y el movimiento y están no acoplados, y que cada uno es una oscilación armónica con su propia frecuencia. Esto es, el movimiento x corresponde a un modo normal de oscilación, el movimiento y al otro. El modo x tiene amplitud A_1 y constante de fase φ_1 que depende sólo de los valores iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$, esto es: el desplazamiento x y velocidad según x en $t = 0$. En forma semejante, el modo y tiene amplitud B_2 y constante de fase φ_2 que depende sólo de los valores miscibles $y(0)$ e $\dot{y}(0)$.

Coordenadas normales. Nótese que nuestra solución (46), que es completamente general, no es todavía tan general en apariencia como las ecuaciones (43). Esto es así porque fuimos afortunados; nuestra elección natural para x e y a lo largo de los resortes nos dio las ecuaciones desacopladas (45), cada una de las cuales corresponde a uno de los modos. En función de la ecuación (43) ψ_a quedó afortunadamente ele-

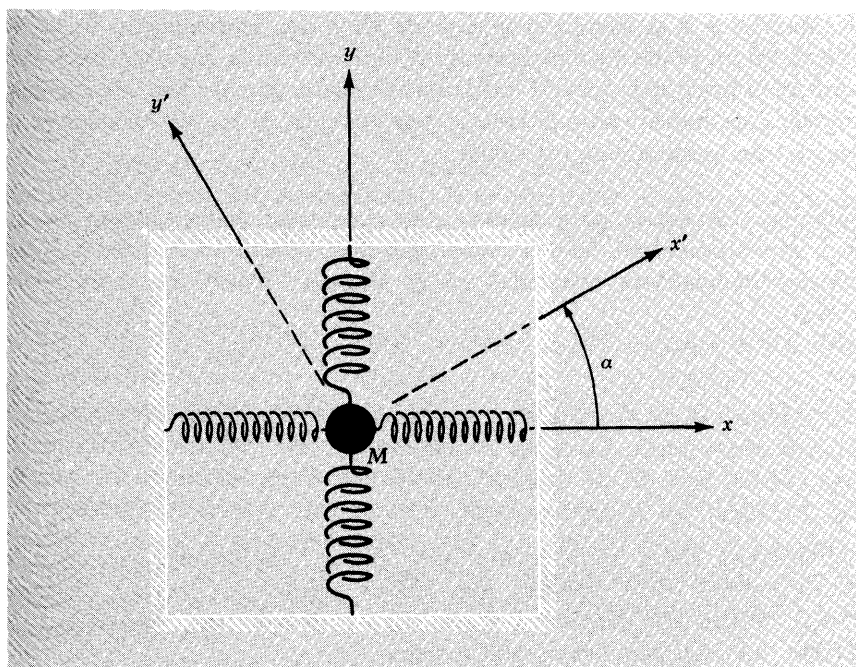


Fig. 1-8 Rotación de coordenadas.

gida de tal forma que A_2 resultó idéntica a cero, y ψ_0 se eligió de tal forma que B_1 resultó idéntica a cero. Nuestra buena elección de coordenadas nos dio lo que se denominan *coordenadas normales*; en este ejemplo, las coordenadas normales son x e y . Supongamos que no hubiéramos utilizado el sistema x' e y' vinculado a x e y por una rotación de ángulo α como indica la Fig. 1.8. Observando la figura vemos que la coordenada normal x es una combinación lineal de las coordenadas x' e y' , ocurriendo lo mismo con la coordenada y . Si hubiéramos utilizado el sistema “malo” en lugar del “astuto”, x e y , hubiéramos obtenido un par de ecuaciones diferenciales “acopladas”, apareciendo x' e y' en cada ecuación, en lugar de las ecuaciones no acopladas.

En la mayoría de los problemas que implican dos grados de libertad no es fácil encontrar coordenadas normales “por inspección” como hicimos en este ejemplo. Esto es, las ecuaciones de movimiento de los diferentes grados de libertad son en general ecuaciones acopladas. Un método para resolver estas dos ecuaciones diferenciales acopladas es buscar nuevas variables que sean combinaciones lineales del sistema de coordenadas original (“el malo”) tal que las nuevas variables satisfagan las ecuaciones de movimientos desacopladas. Las nuevas variables se denominan “coordenadas normales”. En el presente ejemplo sabemos cómo encontrar las coordenadas normales, dado el sistema de coordenadas “malo” x' e y' . Debe rotarse el sistema de coordenadas de tal forma

22 Oscilaciones libres de sistemas simples

de obtener x e y , siendo cada una de ellas una combinación lineal de x' e y' . En un problema más general hubiéramos tenido que usar una transformación lineal más general que la que se puede obtener por una rotación simple. Éste hubiera sido el caso si, por ejemplo, el par de resortes de la Fig. 1.7 no hubiera sido ortogonal.

Solución sistemática para modos. Sin considerar algún sistema específico, supongamos que hemos encontrado dos ecuaciones de primer orden lineales homogéneas acopladas en el sistema “malo” de coordenadas x e y :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a_{11}x - a_{12}y \quad (47)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a_{21}x - a_{22}y. \quad (48)$$

Supongamos ahora simplemente que tenemos oscilaciones en un solo modo normal. Esto significa que ambos grados de libertad, digamos x e y , oscilan con movimiento armónico con la *misma frecuencia y la misma fase*. Así suponemos que tenemos

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad y = B \cos(\omega t + \varphi), \quad (49)$$

con ω y B/A desconocidas por el momento. Luego tenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y. \quad (50)$$

Sustituyendo la ecuación (50) en las ecuaciones (47) y (48) y reordenando obtenemos dos ecuaciones homogéneas en x e y :

$$(a_{11} - \omega^2)x + a_{12}y = 0, \quad (51)$$

$$a_{21}x + (a_{22} - \omega^2)y = 0. \quad (52)$$

Cada una de las ecuaciones (51) y (52) da la relación y/x :

$$\frac{y}{x} = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}}, \quad (53)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}}. \quad (54)$$

Por consistencia de las ecuaciones (53) y (54) deben dar el mismo resultado. Esto es, necesitamos la condición

$$\frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}},$$

esto es

$$(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{21}a_{12} = 0. \quad (55)$$

Otra forma de escribir la ecuación (55) es decir que el determinante de los coeficientes de las ecuaciones lineales homogéneas (51) y (52) deben anularse.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = (a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{21}a_{12} = 0. \quad (56)$$

Las ecuaciones (55) o (56) son ecuaciones cuadráticas en la variable ω^2 . Tienen dos soluciones, que denominamos ω_1^2 y ω_2^2 . Hemos encontrado así que si suponemos que tenemos oscilaciones en un solo modo, hay exactamente dos formas en que esta suposición puede ser realizada. La frecuencia ω_1 es la frecuencia del modo 1, ω_2 la del modo 2. La forma o configuración de x e y en el modo 1 se obtiene sustituyendo $\omega^2 = \omega_1^2$ nuevamente en las ecuaciones (53) o (54) [son equivalentes debido a la ecuación (56)]. Así

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\text{modo 1}} = \left(\frac{B}{A}\right)_{\text{modo 1}} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}}. \quad (57a)$$

En forma semejante

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\text{modo 2}} = \left(\frac{B}{A}\right)_{\text{modo 2}} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}}. \quad (57b)$$

Una vez que hemos encontrado las frecuencias de los modos ω_1 y ω_2 y las relaciones de amplitudes B_1/A_1 y B_2/A_2 , podemos escribir la superposición más general de los modos de la siguiente forma:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (58)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{B_1}{A_1} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{B_2}{A_2} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ &= B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (59)$$

Advierta que mientras podemos elegir A_1 , φ_1 , A_2 y φ_2 con completa libertad en la ecuación (58), no tenemos ninguna libertad para hacerlo cuando escribimos las constantes de la ecuación (59), porque φ_1 y φ_2 estaban fijas y porque teníamos que satisfacer la ecuación (57).

La solución más general de las ecuaciones (47) y (48) consiste en una superposición de cualesquiera de dos soluciones independientes que satisfagan las cuatro condiciones iniciales dadas por $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $y(0)$ e $\dot{y}(0)$. Una superposición de los dos modos normales, con las cuatro cons-

tantes A_1 , φ_1 , A_2 y φ_2 determinadas por las cuatro condiciones iniciales es una solución tal. Así la solución general puede ser escrita como una superposición de los modos.

Ejemplo 8: Oscilaciones longitudinales de dos masas acopladas

El sistema se muestra en la Fig. 1.9. Las dos masas M deslizan sin fricción sobre una mesa. Los tres resortes carecen de masa y son idénticos, cada uno con constante K . Dejamos para el lector la solución sistemática (Prob. 1.23), pero trataremos aquí de “adivinar” cuáles son los modos normales. Sabemos que deben existir dos modos, dado que hay dos grados de libertad. En un modo, cada parte móvil (cada masa) oscila con movimiento armónico. Esto significa que cada parte móvil oscila con la misma frecuencia y entonces la fuerza de retorno, por unidad de desplazamiento por unidad de masa es la misma para ambas masas. (Aprendimos en la Sec. 1.2 que ω^2 es la fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa. Esto vale para cada parte móvil, sea ésta un sistema aislado con un solo grado de libertad o parte de un sistema más grande. El único requerimiento es que el movimiento sea armónico con una única frecuencia.)

En el ejemplo presente las masas son iguales. Necesitamos luego buscar sólo configuraciones que tengan la misma fuerza de retorno por unidad de desplazamiento para ambas masas. Probemos a suponer que los desplazamientos puedan ser los mismos y veamos si esto es apropiado. Supongamos que comenzamos en la posición de equilibrio y luego desplazamos ambas masas en la misma cantidad a la derecha. ¿Es la fuerza de retorno la misma cantidad para cada masa? Nótese que el resor-

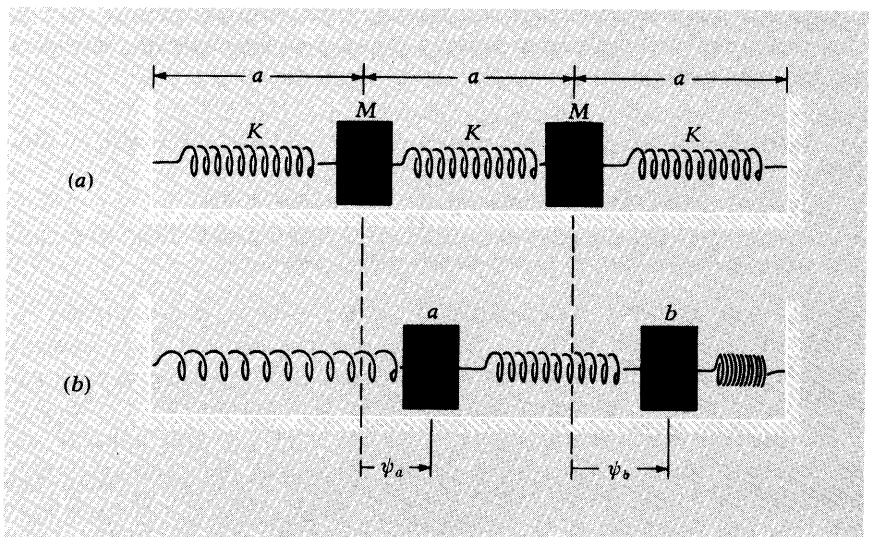


Fig. 1-9 Oscilaciones longitudinales
(a) Equilibrio. (b) Configuración general.

te central tiene la misma longitud que tiene en el equilibrio, de manera que no ejerce fuerzas sobre ninguna masa. La masa de la izquierda es atraída hacia la izquierda porque el resorte izquierdo está extendido. La masa de la derecha es empujada hacia la izquierda con la *misma* fuerza porque el resorte de la derecha está comprimido en la misma cantidad. ¡Hemos descubierto un modo!

$$\text{Modo 1:} \quad \psi_a(t) = \psi_b(t), \quad \omega_1^2 = \frac{K}{M}. \quad (60)$$

La frecuencia $\omega_1^2 = K/M$ en la ecuación (60) es consecuencia del hecho de que cada masa oscila como si el resorte central no existiese.

Tratemos ahora de adivinar el segundo modo. Por simetría, intuimos que si a y b se mueven en sentido contrario, podríamos tener un modo. Si a se mueve una distancia ψ_a a la derecha y b se mueve una distancia igual hacia la izquierda, cada una tiene la misma fuerza de retorno. Así, el segundo modo tiene $\psi_b = -\psi_a$. La frecuencia ω_2 se puede encontrar considerando una masa única y encontrando su fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa. Consideremos la masa de la izquierda a . Es llevada hacia la izquierda por el resorte de la izquierda con una fuerza $F_z = -K\psi_a$. Es empujada hacia la izquierda por el resorte central con una fuerza $F_z = -2K\psi_a$. (El factor desaparece porque el resorte central es comprimido $2\psi_a$.) Así, la fuerza neta para un desplazamiento ψ_a es $-3K\psi_a$, y la fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa es $3K/M$:

$$\text{Modo 2:} \quad \psi_a = -\psi_b, \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{M}. \quad (61)$$

Los modos se muestran en la Fig. 1.10.

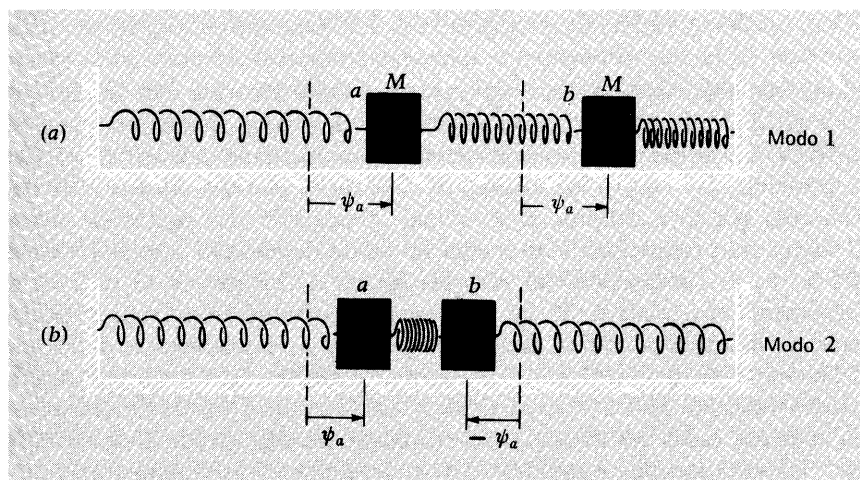


Fig. 1-10 Modos normales de oscilación longitudinal. (a) Modo con frecuencia inferior. (b) Modo con frecuencia superior.

Resolvemos este problema una vez más, utilizando el método de buscar coordenadas normales, esto es, coordenadas “astutas”, que son siempre una combinación lineal de coordenadas “malas” tal que en lugar de dos ecuaciones lineales acopladas se obtienen dos ecuaciones no acopladas. A partir de la Fig. 1.9b se ve fácilmente que las ecuaciones de movimiento para una configuración general son

$$M \frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -K\psi_a + K(\psi_b - \psi_a), \quad (62)$$

$$M \frac{d^2\psi_b}{dt^2} = -K(\psi_b - \psi_a) - K\psi_b. \quad (63)$$

Observando estas ecuaciones de movimiento vemos que sumando y restando alternadamente estas ecuaciones se obtienen las ecuaciones no acopladas buscadas. Sumando las ecuaciones (62) y (63) obtenemos

$$M \frac{d^2}{dt^2}(\psi_a + \psi_b) = -K(\psi_a + \psi_b). \quad (64)$$

Restando la ecuación (63) de la ecuación (62) obtenemos

$$M \frac{d^2(\psi_a - \psi_b)}{dt^2} = -3K(\psi_a - \psi_b). \quad (65)$$

Las ecuaciones (64) y (65) son ecuaciones no acopladas en las variables $\psi_a + \psi_b$ y $\psi_a - \psi_b$. Sus soluciones son:

$$\psi_a + \psi_b \equiv \psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \omega_1^2 = \frac{K}{M}, \quad (66)$$

$$\psi_a - \psi_b \equiv \psi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{M}, \quad (67)$$

donde A_1 y φ_1 son la amplitud y la constante de fase del modo 1 y A_2 y φ_2 la amplitud y la constante de fase del modo 2. Vemos que $\psi_1(t)$ corresponde al movimiento del centro de masa, dado que $\frac{1}{2}(\psi_a + \psi_b)$ es la posición del centro de masa. [Hubiéramos podido dividir la ecuación (64) por 2 y definido a ψ_1 , como la posición del centro de masa. El factor de proporcionalidad media no es de demasiado interés.] Vemos que ψ_2 es la compresión del resorte central o (lo que es lo mismo) el desplazamiento relativo de las dos masas. Si hubiéramos sido suficientemente listos hubiéramos podido elegir ψ_1 y ψ_2 inicialmente, dado que el movimiento del centro de masa y el “movimiento interno” (movimiento relativo de las dos partículas) son variables físicas interesantes. En muchos casos no es tan fácil encontrar un significado físico simple para las coordenadas normales. Así, generalmente insistiremos en nues-

tro sistema de coordenadas “malo” aun después de haber encontrado los modos, simplemente porque los comprendemos mejor.

En el presente problema hemos encontrado las coordenadas normales ψ_1 y ψ_2 . Volvamos a nuestro sistema de coordenadas más familiar ψ_a y ψ_b . Resolviendo las ecuaciones (66) y (67) encontramos que

$$2\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (68)$$

$$2\psi_b = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (69)$$

Advierta que si tenemos un movimiento que es modo 1 puro, A_2 es cero y de acuerdo a las ecuaciones (68) y (69) tenemos $\psi_b = \psi_a$. En forma semejante, en el modo 2 tenemos $A_1 = 0$ y $\psi_b = -\psi_a$. Esto es lo que encontraremos antes [en las ecuaciones (60) y (61)].

Ejemplo 9: Oscilaciones transversales de dos masas acopladas

El sistema se muestra en la Fig. 1.11. Se supone que las oscilaciones están limitadas al plano de papel. En consecuencia, hay dos grados de libertad. Los tres resortes idénticos sin masa tienen una longitud relajada a_0 que es menor que la separación de equilibrio a de las dos masas. Así están todos en tensión. Cuando el sistema está en su configuración de equilibrio (Fig. 1.11a), los resortes tienen una tensión T_0 .

Debido a la simetría del sistema es fácil intuir los modos. Se indican en la Fig. 1.11. El modo inferior (el de menor frecuencia, esto es, el que tiene la menor fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa para cada una de las masas), tiene una forma (Fig. 1.11c) tal que el resorte del centro no se comprime ni se extiende nunca. La frecuencia se obtiene entonces considerando una o la otra masa separadamente y la fuerza de retorno debida sólo al resorte que la une a la pared. Tanto para la aproximación de resorte muy estirable (longitud del resorte no tensionado, cero) a la aproximación de pequeñas oscilaciones (desplazamientos muy pequeños comparados con el a) mostraremos aquí que un desplazamiento ψ_a de la masa de la izquierda obliga al resorte de la izquierda a ejercer una fuerza de retorno $T_0(\psi_a/a)$. Siendo así que en este modo la fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa, ω_1^2 , está dada por

$$\text{Modo 1: } \omega_1^2 = \frac{T_0}{Ma}, \quad \frac{\psi_b}{\psi_a} = +1. \quad (70)$$

Veamos esto en la forma siguiente. Consideremos primero la aproximación de resorte muy estirable (Sec. 1.2). En esta aproximación, la tensión T es mayor que T_0 en un factor, l/a , donde l es la longitud del resorte y a es la longitud en el equilibrio (Fig. 1.11a). El resorte ejerce

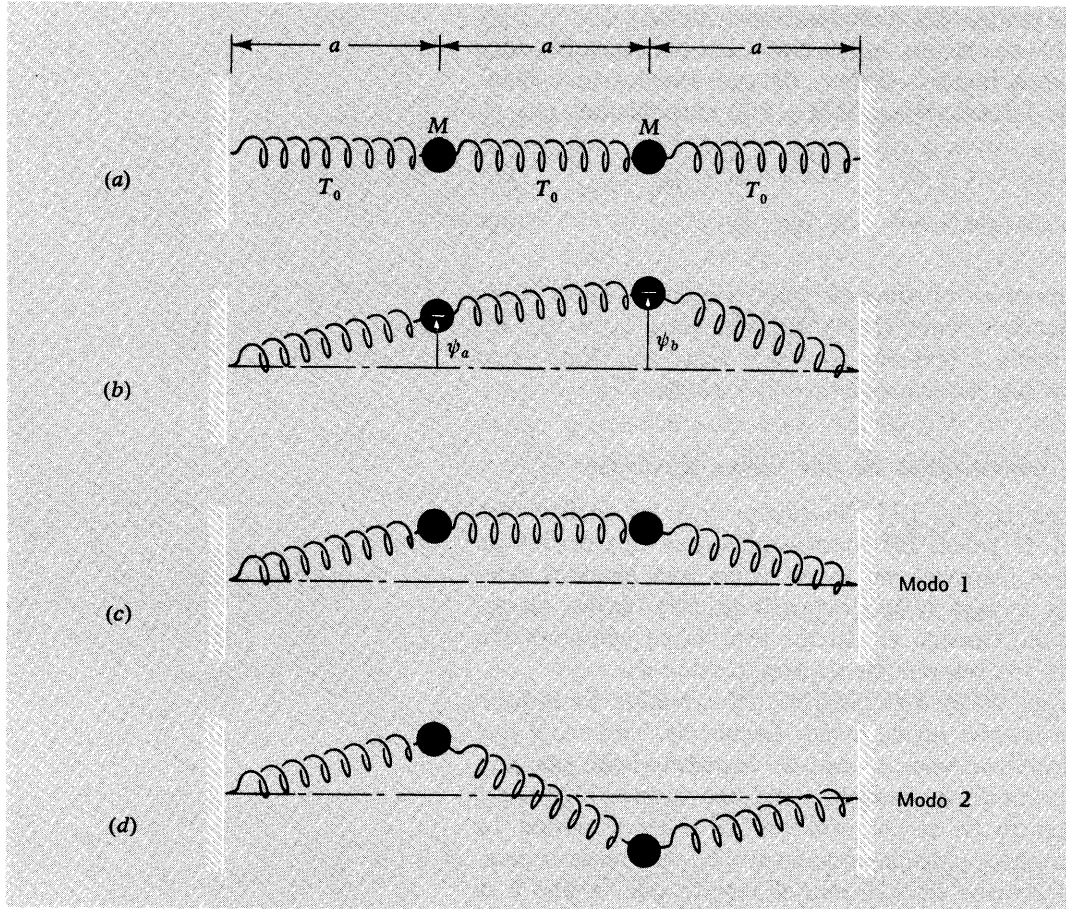


Fig. 1-11 Oscilaciones transversales. (a) Equilibrio. (b) Configuración general. (c) Modo de frecuencia más baja. (d) Modo de frecuencia más alta.

una fuerza de retorno transversal igual a la tensión T multiplicada por el seno del ángulo entre el resorte y el eje de equilibrio de los resortes; esto es: la fuerza de retorno es $T(\psi_a/l)$. Pero $T = T_0(l/a)$. Así, la fuerza de retorno es $T_0(\psi_a/a)$, y esto da la ecuación (70). Consideremos ahora la aproximación de pequeñas oscilaciones (Sec. 1.2). En tal aproximación, el incremento en longitud del resorte es despreciado porque difiere de la posición de equilibrio a solamente en una cantidad del orden de $a(\psi_a/a)^2$ y, en consecuencia, el incremento de tensión también es despreciado. La tensión es T_0 cuando el desplazamiento es ψ_a . La fuerza de retorno es igual a la tensión T_0 por el seno del ángulo entre el resorte y el eje de equilibrio. Este ángulo puede ser considerado "ángulo pequeño, pues las oscilaciones son pequeñas. Entonces, el ángulo (en radianes) y sus senos son iguales, y ambos son iguales a ψ_a/a . De esta manera la fuerza de retorno es $T_0(\psi_a/a)$. Esto da la ecuación (70).

De manera similar se obtiene la frecuencia para modo 2 (Fig. 1.11d) como sigue: Consideremos la masa de la izquierda. El resorte de la izquierda aporta una fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa de T_0/Ma , tal como se ha visto al considerar el modo 1. En el modo 2 el resorte central está “ayudando” al resorte izquierdo y, en efecto, está suministrando una fuerza de retorno dos veces más grande que el resorte izquierdo. Esto es fácilmente observable en aproximación de pequeñas oscilaciones: La tensión del resorte es T_0 para ambos resortes, pero el resorte central forma un ángulo dos veces más grande con los ejes que el resorte final, lo que da una componente de fuerza transversal doblemente mayor. La fuerza de retorno total por unidad de masa por unidad de desplazamiento, ω_2^2 , es por lo tanto

$$\text{Modo 2: } \omega_2^2 = \frac{T_0}{Ma} + \frac{2T_0}{Ma} = \frac{3T_0}{Ma}, \quad \frac{\psi_b}{\psi_a} = -1. \quad (71)$$

Obsérvese que en la aproximación previa, donde la relación $T_0 = K(a - a_0)$ se transforma en $T_0 = Ka$, las frecuencias de los modos de oscilación transversal [ecs. (70) y (71)] son las mismas que aquellas para oscilaciones longitudinales [ecs. (60) y (61)]. Así se tiene una forma de degeneración. Esta degeneración no ocurre para aproximación de pequeña oscilación, donde a_0 no es despreciable comparado con a .

Si los modos no fueran tan fáciles de adivinar, se hubiesen escrito las ecuaciones de movimiento de las dos masas a y b y luego procedido con las ecuaciones, más bien que con una figura mental del sistema físico mismo. Se permitirá hacer esto en el Problema 1.20.

Ejemplo 10: Dos circuitos LC acoplados

Consideremos el sistema indicado en la Fig. 1.12. Encontremos las ecuaciones del “movimiento” —movimiento de cargas en este caso—. La fuerza electromotriz (fem) a través de la inductancia de la izquierda es $L dI_a/dt$. Una carga positiva Q_1 en el capacitor de la izquierda da una fem $C^{-1}Q_1$ que tiende a incrementar I_a (con nuestra convención de signos). Una carga positiva Q_2 en el capacitor del medio da una fem $C^{-1}Q_2$ que tiende a disminuir I_a . Esto es, tenemos para la contribución completa a $L dI_a/dt$

$$\frac{L dI_a}{dt} = C^{-1}Q_1 - C^{-1}Q_2. \quad (72)$$

Similarmente,

$$\frac{L dI_b}{dt} = C^{-1}Q_2 - C^{-1}Q_3. \quad (73)$$

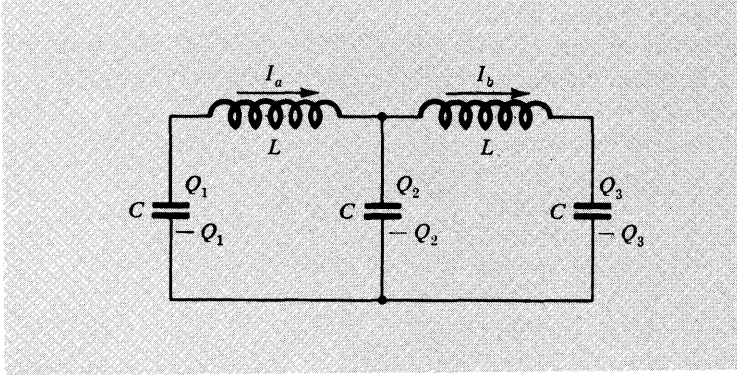


Fig. 1-12 Dos circuitos LC acoplados. Configuración general de cargas y corrientes. Las flechas dan las convenciones de signos para las corrientes positivas.

Tal como hicimos en la Sección 1.2, expresaremos la configuración del sistema en términos de corrientes, en lugar de hacerlo en términos de cargas. Para hacer esto, diferenciamos las ecuaciones (72) y (73) respecto del tiempo y usamos conservación de carga. La diferencia da

$$L \frac{d^2 I_a}{dt^2} = C^{-1} \frac{dQ_1}{dt} - C^{-1} \frac{dQ_2}{dt}, \quad (74)$$

$$L \frac{d^2 I_b}{dt^2} = C^{-1} \frac{dQ_2}{dt} - C^{-1} \frac{dQ_3}{dt}. \quad (75)$$

La conservación de carga da

$$\frac{dQ_1}{dt} = -I_a, \quad \frac{dQ_2}{dt} = I_a - I_b, \quad \frac{dQ_3}{dt} = I_b. \quad (76)$$

Sustituyendo las ecuaciones (76) en las (74) y (75) obtenemos las ecuaciones acopladas del movimiento

$$L \frac{d^2 I_a}{dt^2} = -C^{-1} I_a + C^{-1} (I_b - I_a) \quad (77)$$

$$L \frac{d^2 I_b}{dt^2} = -C^{-1} (I_b - I_a) - C^{-1} I_b. \quad (78)$$

Ahora que tenemos las dos ecuaciones de movimiento queremos encontrar los dos modos normales. Esto puede hacerse por búsqueda de coordenadas normales, por conjetura o por el método sistemático (véase Prob. 1.21). Se encuentra

$$\begin{aligned}
 \text{Modo 1:} \quad I_a &= I_b, & \omega_1^2 &= \frac{C^{-1}}{L}. \\
 \text{Modo 2:} \quad I_a &= -I_b, & \omega_2^2 &= \frac{3C^{-1}}{L}.
 \end{aligned} \tag{79}$$

Obsérvese que en el modo 1 el capacitor central nunca adquiere carga y podría ser quitada sin efectuar el movimiento de las cargas. También en el modo 1 las cargas Q_1 y Q_3 son siempre de igual magnitud y signo opuesto. En el modo 2, las cargas Q_1 y Q_3 son iguales en magnitud y signo y Q_2 tiene el doble de esa magnitud y signo opuesto.

Elegimos a propósito los tres ejemplos (8-10) de oscilaciones longitudinales (Fig. 1.9), transversales (Fig. 1.11) y circuitos LC acoplados (Fig. 1.12) para tener la misma simetría espacial y para que den ecuaciones de movimiento y modos normales con la misma forma matemática. También elegimos estos ejemplos por ser extensiones naturales (a dos grados de libertad) de los sistemas similares con un grado de libertad que consideramos en los ejemplos 2-4, en la Sección 1.2, como se muestran en las Figs. 1.3, 1.4 y 1.5. En el Capítulo 2 extenderemos estos mismos tres ejemplos a un número arbitrariamente grande de grados de libertad.

1.5 Pulsaciones

Hay muchos fenómenos físicos en los que el movimiento de una parte móvil dada es una superposición de dos oscilaciones armónicas de frecuencias angulares diferentes ω_1 y ω_2 . Por ejemplo, las dos oscilaciones armónicas pueden corresponder a los dos modos normales de un sistema con dos grados de libertad. Como ejemplo de comparación, las dos oscilaciones armónicas pueden deberse a fuerzas impulsoras producidas por dos sistemas oscilantes desacoplados. Este tipo de situación es ilustrado por dos diapasones de frecuencias diferentes. Cada uno produce su propia “nota”, produciendo variaciones armónicas de presión en el diapason que se irradian a través del aire como ondas de sonido. El movimiento inducido en su tímpano es una superposición de dos oscilaciones armónicas.

En todos estos ejemplos, la parte matemática es la misma. Para simplificar, suponemos que las dos oscilaciones tienen la misma amplitud y constante de fase. También suponemos que ésta es nula. Entonces escribimos la superposición ψ de las dos oscilaciones armónicas ψ_1 y ψ_2

$$\psi_1 = A \cos \omega_1 t, \quad \psi_2 = A \cos \omega_2 t, \tag{80}$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t. \tag{81}$$

32 Oscilaciones libres de sistemas simples

Modulación. Reescribiremos ahora la ecuación (91) en una forma interesante. Definimos una frecuencia angular “promedio” ω_{pro} y una frecuencia angular de modulación ω_{mod} :

$$\omega_{\text{pro}} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad \omega_{\text{mod}} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2). \quad (82)$$

La suma y diferencia de ellas da

$$\omega_1 = \omega_{\text{pro}} + \omega_{\text{mod}}, \quad \omega_2 = \omega_{\text{pro}} - \omega_{\text{mod}}. \quad (83)$$

Entonces podemos escribir la ecuación (81) en términos de ω_{pro} y ω_{mod} :

$$\begin{aligned} \psi &= A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \\ &= A \cos (\omega_{\text{pro}} t + \omega_{\text{mod}} t) + A \cos (\omega_{\text{pro}} t - \omega_{\text{mod}} t) \\ &= [2A \cos \omega_{\text{mod}} t] \cos \omega_{\text{pro}} t, \end{aligned}$$

es decir,

$$\psi = A_{\text{mod}}(t) \cos \omega_{\text{pro}} t, \quad (84)$$

donde

$$A_{\text{mod}}(t) = 2A \cos \omega_{\text{mod}} t. \quad (85)$$

Podemos imaginar las ecuaciones (84) y (85) como las representaciones de una oscilación a la frecuencia angular ω_{pro} con amplitud A_{mod} que no es constante y varía, entonces, con el tiempo de acuerdo con la ecuación (85). Las ecuaciones (84) y (85) son exactas. Sin embargo, es más útil escribir la superposición, ecuación (81), en forma de las ecuaciones (84) y (85) cuando ω_1 y ω_2 son de magnitudes comparables. La frecuencia de modulación resulta menor en magnitud comparada con la frecuencia promedio:

$$\omega_1 \approx \omega_2; \quad \omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{pro}}.$$

En un caso así, la amplitud de modulación, $A_{\text{mod}}(t)$, varía muy poco durante la mayor parte de lo que llamamos oscilaciones “rápidas” del $\cos \omega_{\text{pro}} t$ y, en consecuencia, la ecuación (84) corresponde a una “casi armónica” oscilación a frecuencia ω_{pro} . Por supuesto, si A_{mod} es exactamente constante, la ecuación (84) representa una oscilación armónica casi exacta a frecuencia angular ω_{pro} . Luego $\omega_{\text{pro}} = \omega_1 = \omega_2$, dado que A_{mod} es sólo constante si ω_{mod} es cero. Si ω_1 y ω_2 difieren sólo un poco, la superposición de las dos (exactamente armónicas) oscilaciones ω_1 y ω_2 se denomina una “casi armónica” o “casi monocromática” oscilación de frecuencia ω_{pro} con una pequeña variación en amplitud.

Oscilación casi armónica. Éste es nuestro primer ejemplo cuyo resultado muy importante y muy general encontraremos muchas veces: Una superposición lineal de dos o más oscilaciones exactamente armónicas que tienen diferentes frecuencias (y diferentes amplitudes y constantes de fase), con todas las frecuencias comprendidas en un rango angosto o “banda” de frecuencias da una oscilación resultante que es una “casi” oscilación armónica con frecuencia ω_{pro} que cae en algún lugar de la banda de la oscilación “componente” que forma la superposición. El movimiento resultante no es una oscilación exactamente armónica porque la amplitud y constante de fase no son exactamente constantes, sino sólo “casi constantes”. Su variación es despreciable durante un ciclo de oscilación a la frecuencia promedio “rápida” ω_{pro} siempre que el rango de frecuencias o ancho de banda de la oscilación armónica componente sea pequeño comparado con ω_{pro} . (Probaremos estos puntos en el Cap. 6.)

Algunos ejemplos de pulsaciones siguen a continuación:

Ejemplo 11: Pulsaciones producidas por dos diapasones

Cuando una onda sonora alcanza su oído, produce en el tímpano una variación en la presión de aire. Sean ψ_1 y ψ_2 las contribuciones respectivas a la presión manométrica producida fuera de su tímpano por dos diapasones numerados 1 y 2. (La presión manométrica es la presión en la superficie exterior de su oído menos la presión en la superficie interior. Esta diferencia de presión origina la fuerza que excita al tímpano.)

Si ambos diapasones se golpean con igual fuerza y al mismo tiempo, y si se mantienen a la misma distancia del oído, las amplitudes y constantes de fase para las presiones manométricas ψ_1 y ψ_2 son las mismas y la ecuación (80) representa las dos contribuciones de la presión. La presión total (que da la fuerza total en el oído) es la superposición $\psi = \psi_1 + \psi_2$ de las contribuciones de los dos diapasones. Está dada por la ecuación (81) o por las ecuaciones (84) y (85). Si las frecuencias de los dos diapasones ν_1 y ν_2 difieren en más de un 6 % de su valor promedio, entonces nuestro oído y nuestro sentido prefieren la ecuación (81). Esto es, oímos el sonido total como dos notas separadas con pequeñas diferencias de tono. Por ejemplo, si ν_2 es $5/4 \nu_1$, oiremos dos notas con un intervalo de una “tercera mayor”. Si ν_2 es $1,06 \nu_1$, oiremos ν_2 como una nota un tono y medio más alto que en ν_1 . Sin embargo, si ν_1 y ν_2 difieren en menos que 10 cps, el oído no reconoce fácilmente notas diferentes. (El oído de un músico podría reconocerlas mucho mejor.) Luego la superposición de las dos no se escucha como un “acorde” formado por dos notas ν_1 y ν_2 , sino como uno solo de frecuencia ν_{pro} con pequeñas variaciones de amplitud A_{mod} , tal como lo dan las ecuaciones (84) y (85).

Detector de ley cuadrática. La amplitud de modulación A_{mod} oscila a la frecuencia angular de modulación ω_{mod} . Cuando $\omega_{\text{mod}} t$ se ha incre-

mentado en 2π (radianes de fase), la amplitud A_{mod} ha recorrido un ciclo completo de oscilación (por ejemplo, la oscilación “lenta” a la frecuencia de modulación) y ha retornado a su valor original. Dos instantes durante un ciclo, A_{mod} es cero. En esos instantes el oído no escucha ningún sonido. Entre silencios, se escucha un sonido promedio. Dado que $\cos \omega_{\text{mod}} t$ va desde cero a $+1$, a cero, a -1 , a cero, a $+1$, etcétera, vemos que A_{mod} tiene signos opuestos en los sucesivos intervalos de sonoridad. Pese a ello, el oído no reconoce “dos clases” de tiempos sonoros, como puede probarse realizando el experimento con dos diapasones. Esto es, el oído (más el cerebro) no distingue los valores positivos de los negativos de A_{mod} . Sólo distingue si la magnitud de A_{mod} es grande o pequeña. Por esa razón, el oído decimos que actúa como un *detector de ley cuadrática*. Dado que A_{mod}^2 tiene dos máximos para cada ciclo de modulación (durante el cual $\omega_{\text{mod}} t$ se encuentra en 2π), la velocidad de repetición para la secuencia “fuerte, débil, fuerte, débil...” es dos veces la frecuencia de modulación. Esta repetición de valores grandes de A_{mod}^2 se denomina *frecuencia de pulsación*:

$$\omega_{\text{puls}} = 2\omega_{\text{mod}} = \omega_1 - \omega_2. \quad (86)$$

Algebraicamente puede verse así

$$\begin{aligned} A_{\text{mod}}(t) &= 2A \cos \omega_{\text{mod}} t. \\ [A_{\text{mod}}(t)]^2 &= 4A^2 \cos^2 \omega_{\text{mod}} t; \end{aligned}$$

pero

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}[\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta] = \frac{1}{2}[1 + \cos 2\theta].$$

Esto es

$$[A_{\text{mod}}(t)]^2 = 2A^2[1 + \cos 2\omega_{\text{mod}} t],$$

es decir,

$$(A_{\text{mod}})^2 = 2A^2[1 + \cos \omega_{\text{puls}} t]. \quad (87)$$

Esto es, A_{mod}^2 oscila alrededor de su valor promedio con una frecuencia que es el doble de la frecuencia de modulación, por ejemplo, a la frecuencia de pulsación $\omega_1 - \omega_2$.

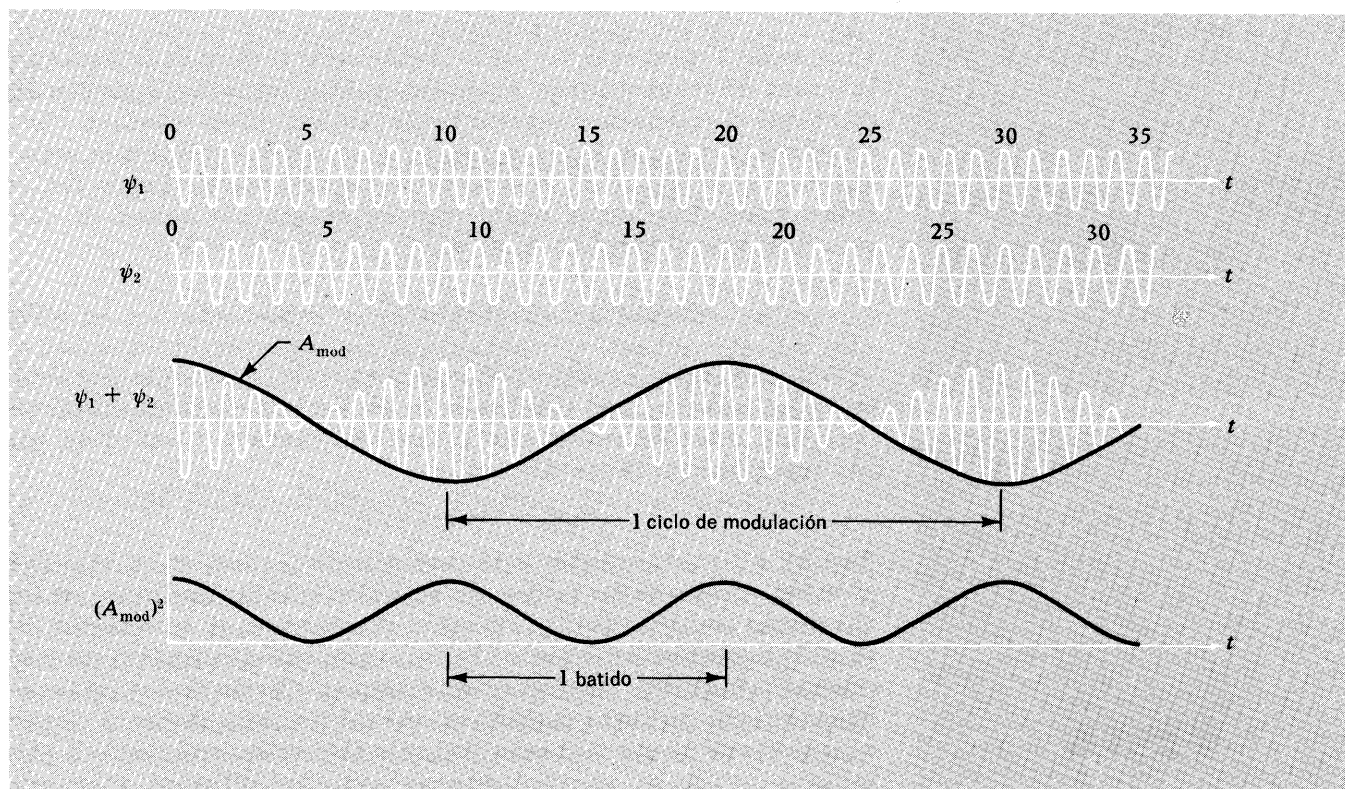
La superposición de dos oscilaciones armónicas con igual frecuencia para producir pulsaciones se ilustra en la Fig. 1.13.

Ejemplo 12: Pulsaciones entre dos fuentes de luz visible

En 1955, Forrester, Gudmundsen y Johnson realizaron un experimento mostrando pulsaciones entre dos fuentes independientes de luz visible

con, aproximadamente, la misma frecuencia.[†] Las fuentes de luz eran tubos de descarga de gas que contenían átomos de Hg de decaimiento libre con una frecuencia promedio $\nu_{\text{pro}} = 5,49 \times 10^{14}$ cps, que corresponde a la “línea verde” brillante del mercurio. Los átomos se colocaron en un campo magnético. Esto obligaba a la radiación verde a “dividirse” en dos frecuencias vecinas, con la diferencia de frecuencia proporcional al campo magnético. La frecuencia de la pulsación era $\nu_1 - \nu_2 \approx 10^{10}$ cps. Ésta es una frecuencia típica de “radar” o “microondas”. Su detector utilizaba el efecto fotoeléctrico para obtener una corriente eléctrica proporcional al cuadrado de la amplitud de modulación del campo eléctrico resultante en la onda luminosa. Esto es, el detector era un detector de ley cuadrática. La respuesta de su detector mostraba una variación con el tiempo similar a la “sonoridad” de A_{mod}^2 , en la Figura 1.13.

Fig. 1-13 Batidos. ψ_1 y ψ_2 son las variaciones de presión en su oído producidas por dos diapasones con relación de frecuencias $\nu_1/\nu_2 = 10/9$. La presión total es la superposición $\psi_1 + \psi_2$, que es una “casi armónica” oscilación a frecuencia ν_{pro} con pequeñas variaciones de amplitud $A_{\text{mod}}(t)$. El ruido es proporcional a $(A_{\text{mod}})^2$ y consiste de una constante (valor promedio) más una variación sinusoidal a la frecuencia de batido. La frecuencia de batido es de dos veces la frecuencia de modulación.



[†] A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen y P. O. Johnson. “Mezcla fotoeléctrica de luz incoherente”, *Phys. Rev.* **99**, 1691 (1955).

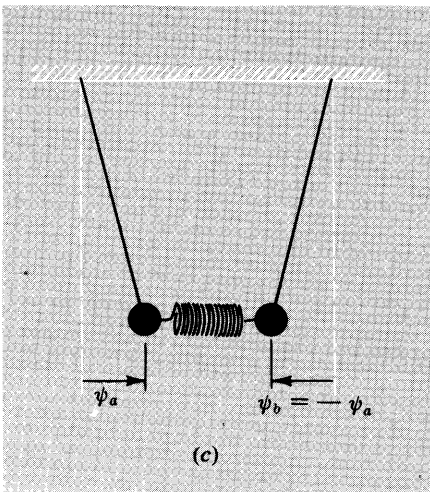
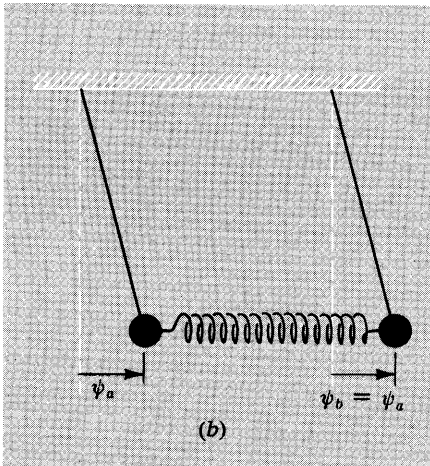
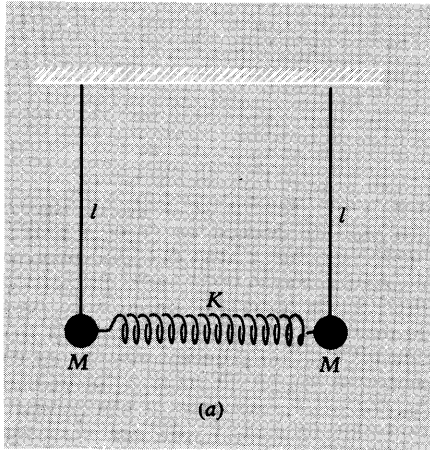


Fig. 1-14 Péndulos idénticos acoplados. (a) Configuración de equilibrio. (b) Modo con frecuencia baja. (c) Modo con frecuencia alta.

Ejemplo 13: Pulsaciones entre dos modos normales de dos osciladores idénticos débilmente acoplados

Consideremos el sistema formado por dos péndulos idénticos acoplados por un resorte indicado en la Figura 1.14. Los modos normales se intuyen fácilmente por analogía con las oscilaciones longitudinales de masas idénticas estudiadas en la Sec. 1.4. En el modo 1 tenemos $\psi_a = \psi_b$. El resorte de acoplamiento se puede eliminar; la fuerza de retorno se debe enteramente a la gravedad. La fuerza de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa (suponiendo pequeñas oscilaciones, para las cuales tenemos una fuerza restauradora lineal) es $Mg\theta/(l\theta)M = g/l$:

$$\text{Modo 1: } \omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \psi_a = \psi_b. \quad (88)$$

En el modo 2 tenemos $\psi_a = -\psi_b$. Consideremos el disco de la izquierda. La fuerza de retorno debida al resorte es $2K\psi_a$ (el factor 2 resulta del hecho que el resorte se comprime en $2\psi_a$ en este modo cuando el disco a se desplaza una cantidad ψ_a). La fuerza de retorno debida a la gravedad es $Mg\theta = Mg\psi_a/l$. El resorte y la gravedad actúan ambos con el mismo signo. Esto es, la fuerza total de retorno por unidad de desplazamiento por unidad de masa es

$$\text{Modo 2: } \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M}, \quad \psi_a = -\psi_b. \quad (89)$$

Deseamos ahora estudiar “pulsaciones entre dos modos” de este sistema. ¿Qué significa esto? Cada modo es una oscilación armónica con una frecuencia dada. El movimiento general del péndulo a está dado por una superposición de los dos modos:

$$\psi_a(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t).$$

Esto es, $\psi_a(t)$ se asemeja a la superposición $\psi_1 + \psi_2$ en la Fig. 1.13 si las frecuencias de los modos son parecidas (y si las amplitudes de los dos modos son las mismas). Entonces decimos que el movimiento del péndulo a presenta pulsaciones. (Por supuesto, que el péndulo b también exhibirá pulsaciones, como veremos.) Cualquier sistema de dos grados de libertad puede presentar pulsaciones, pero el sistema que hemos elegido es conveniente porque fácilmente podemos obtener una frecuencia de pulsación $\nu_1 - \nu_2$ menor que la frecuencia promedio utilizando un resorte suficientemente débil o haciendo la masa M grande. [Para ver esto comparemos las ecuaciones (88) y (89).]

¿A qué se parecen las pulsaciones? De acuerdo con nuestra discusión en la Sec. 1, el desplazamiento de los discos ψ_a y ψ_b se puede expresar

en términos de las coordenadas normales ψ_1 y ψ_2 para la superposición general.

$$\begin{aligned}\psi_a &= \psi_1 + \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \psi_b &= \psi_1 - \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).\end{aligned}\quad (90)$$

Por analogía con dos diapasones, obtendremos el mayor efecto de pulsación si los dos modos se presentan con amplitudes iguales. (Si A_1 y A_2 es casi cero comparada con la otra, prácticamente no hay efecto de pulsación dado que (aproximadamente) hay presente una sola oscilación armónica. Ambas oscilaciones deberían tener más o menos amplitudes iguales para producir pulsaciones fuertes.) Luego tomamos $A_1 = A_2 = A$. La elección de la constante de fase φ_1 y φ_2 corresponde a las condiciones iniciales, como veremos. Por analogía con nuestro ejemplo de los dos diapasones, tomamos $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Con esta elección para A_1 , A_2 , φ_1 y φ_2 , ecuaciones (90), dan

$$\psi_a(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t, \quad \psi_b(t) = A \cos \omega_1 t - A \cos \omega_2 t. \quad (91)$$

La velocidad de los discos está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_a(t) &\equiv \frac{d\psi_a}{dt} = -\omega_1 A \sin \omega_1 t - \omega_2 A \sin \omega_2 t, \\ \dot{\psi}_b(t) &\equiv \frac{d\psi_b}{dt} = -\omega_1 A \sin \omega_1 t + \omega_2 A \sin \omega_2 t.\end{aligned}\quad (92)$$

A fin de ver cómo excitar los dos modos de tal forma de obtener las oscilaciones correspondientes a la ecuación (91), consideremos las condiciones iniciales en $t = 0$. De acuerdo con las ecuaciones (91) y (92), los desplazamientos iniciales y las velocidades de los discos están dadas por

$$\psi_a(0) = 2A, \quad \psi_b(0) = 0; \quad \dot{\psi}_a(0) = 0, \quad \dot{\psi}_b(0) = 0.$$

Entonces mantenemos el disco a en una posición $2A$, el disco b en cero, y soltamos ambos discos al mismo tiempo, que denominaremos $t = 0$.

Después de esto observamos. (Se puede realizar el experimento; necesitamos para ello dos latas de sopa, un "slinky" y una cuerda; véase experimento casero 1.8.) Se desarrolla un proceso fascinante. Gradualmente, la amplitud de oscilación del péndulo a decrece y la del péndulo b oscila con la amplitud y energía que tenía el péndulo a al empezar. (Despreciamos las fuerzas de rozamiento.) La energía de vibración es transferida totalmente de un péndulo a otro. Por simetría del sistema vemos que el proceso continúa. La energía de vibración va lentamente de un lado a otro entre a y b . Un ciclo completo de la energía desde a hasta b y de regreso hasta a es una pulsación. El período de una pulsación es

38 Oscilaciones libres de sistemas simples

el tiempo para que se dé el ciclo de ida y vuelta y es la inversa de la frecuencia de la pulsación.

Todo esto está predicho por las ecuaciones (91) y (92). Utilizando $\omega_1 = \omega_{\text{pro}} + \omega_{\text{mod}}$ y $\omega_2 = \omega_{\text{pro}} - \omega_{\text{mod}}$ en las ecuaciones (91), obtenemos la oscilación “casi armónica”.

$$\begin{aligned}\psi_a(t) &= A \cos(\omega_{\text{pro}} + \omega_{\text{mod}})t + A \cos(\omega_{\text{pro}} - \omega_{\text{mod}})t \\ &= (2A \cos \omega_{\text{mod}} t) \cos \omega_{\text{pro}} t \\ &\equiv A_{\text{mod}}(t) \cos \omega_{\text{pro}} t\end{aligned}\quad (93)$$

y

$$\begin{aligned}\psi_b(t) &= A \cos(\omega_{\text{pro}} + \omega_{\text{mod}})t - A \cos(\omega_{\text{pro}} - \omega_{\text{mod}})t \\ &= (2A \sin \omega_{\text{mod}} t) \sin \omega_{\text{pro}} t \\ &\equiv B_{\text{mod}}(t) \sin \omega_{\text{pro}} t.\end{aligned}\quad (94)$$

Encontremos una expresión para la energía (cinética más potencial) de cada péndulo. La amplitud de oscilación $A_{\text{mod}}(t)$ es constante durante un ciclo de la oscilación “rápida” y despreciamos también la energía que se transfiere entre el resorte débilmente acoplado y el péndulo. (Si el resorte es muy débil no conserva nunca una cantidad apreciable de energía.) Esto es, durante un ciclo de oscilación rápida el péndulo *a* es un oscilador armónico de frecuencia ω_{pro} con amplitud constante A_{mod} . La energía, se ve fácilmente, está dada por dos veces el valor promedio de la energía cinética (promediada sobre un ciclo “rápido”). Esto da

$$E_a = \frac{1}{2} M \omega_{\text{pro}}^2 A_{\text{mod}}^2 = 2MA^2 \omega_{\text{pro}}^2 \cos^2 \omega_{\text{mod}} t. \quad (95)$$

Similarmente,

$$E_b = \frac{1}{2} M \omega_{\text{pro}}^2 B_{\text{mod}}^2 = 2MA^2 \omega_{\text{pro}}^2 \sin^2 \omega_{\text{mod}} t. \quad (96)$$

La energía total de ambos péndulos es constante, como se ve sumando las ecuaciones (95) y (96):

$$E_a + E_b = (2MA^2 \omega_{\text{pro}}^2) = E. \quad (97)$$

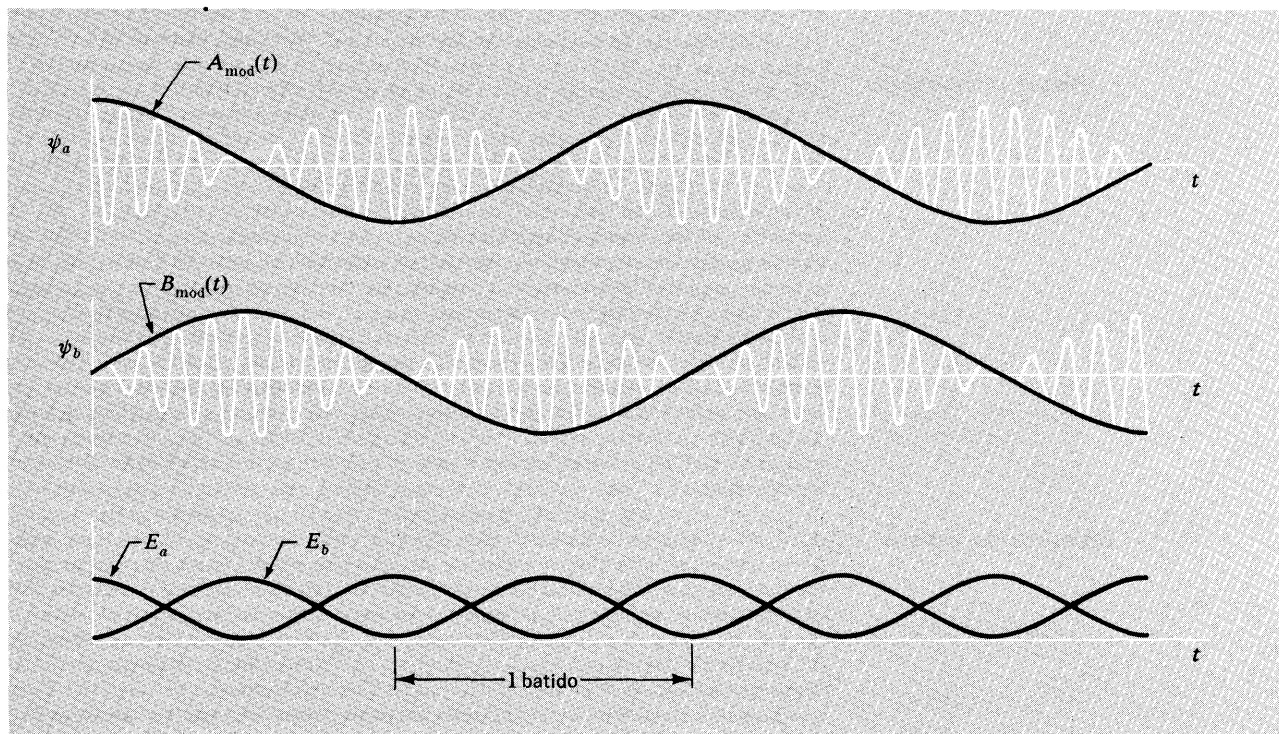
La diferencia de energía entre los dos péndulos es

$$\begin{aligned}E_a - E_b &= E(\cos^2 \omega_{\text{mod}} t - \sin^2 \omega_{\text{mod}} t) \\ &= E \cos 2\omega_{\text{mod}} t = E \cos(\omega_1 - \omega_2)t.\end{aligned}\quad (98)$$

Combinando las ecuaciones (97) y (98) da

$$E_a = \frac{1}{2} E [1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t], \quad (99a)$$

$$E_b = \frac{1}{2} E [1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)t]. \quad (99b)$$



Las ecuaciones (99) muestran que la energía total E es constante y que fluye de un lado a otro entre los dos péndulos a la frecuencia de la pulsación. En la Fig. 1.15 representamos $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$, E_a y E_b .

Fig. 1-15 Energía transferida entre dos péndulos idénticos débilmente acoplados. La energía fluye de un lado a otro desde a hasta b a la frecuencia $|\nu_1 - \nu_2|$, la frecuencia de batido de los dos modos.

Ejemplos esotéricos

En el estudio de sistemas microscópicos —moléculas, partículas elementales— se encuentran numerosos ejemplos muy bonitos de sistemas que son matemáticamente análogos a nuestros ejemplos mecánicos de dos péndulos idénticos débilmente acoplados. Se necesita la mecánica cuántica para entender estos sistemas. La “cosa” que “fluye” de un lado a otro entre dos grados de libertad, por analogía con la energía transferida entre dos péndulos débilmente acoplados no es la energía sino la probabilidad. La energía está “cuantificada”, no se puede “subdividir” para fluir. Cualquier parte móvil tiene toda la energía. Lo que “fluye” es la probabilidad de *tener* la energía de excitación. Dos ejemplos, la molécula de amoníaco (esto es, el caso del “movimiento regular” en el reloj de amoníaco) y los mesones neutros se discuten en el Tema suplementario 1.

Problemas y experimentos caseros

1.1 Hállense las frecuencias de los dos modos en cps para la red *LC* que se indica en la Fig. 1.12 con $L = 10$ H (henrios) y $C = 6 \mu\text{F}$ (microfaradios). Diseñese también la configuración de corrientes para cada modo.

Resp. $\nu_1 \approx 20$ cps. $\nu_2 \approx 35$ cps.

1.2 Si se coloca un pequeño bloque de madera (o cualquier otro objeto) sobre el plato de un tocadiscos y se observa desde un costado mientras el plato gira, utilizando un solo ojo, de manera de eliminar la profundidad de su percepción, el movimiento aparente (p. ej., la proyección del movimiento perpendicularmente a su línea de visión) es armónico, por ejemplo, de la forma $x = x_0 \cos \omega t$. (a) Demuéstrese la afirmación anterior. (b) Construid un péndulo simple suspendiendo un pequeño peso (nuez o bolita) de una cuerda que cuelgue del respaldo de una silla. Ajustad la longitud de la cuerda hasta que el péndulo oscile sincrónicamente con el movimiento proyectado del bloque que gira con el plato del tocadiscos a 45 rpm. Esto nos demuestra, de una bonita manera, que la proyección de un movimiento circular uniforme es una oscilación armónica. Es también un bonito método para medir g . Si el valor de g es el "valor del texto" standard de 980 cm/seg^2 , muestra que $l \approx 45 \text{ cm}$ para $\nu = 45 \text{ rpm}$. Esto será fácil de recordar.

Experimento casero

1.3 TV como un estroboscopio. La luz emitida por la TV es una buena luz estroboscópica. Un punto dado de la pantalla está oscuro la mayor parte del tiempo; o está iluminado sólo una pequeña fracción de tiempo a una velocidad de repetición regular. (Esto puede observarse haciendo oscilar el dedo rápidamente frente a la pantalla.) Llamemos ν_{TV} a la velocidad de repetición regular. El objeto de esta experiencia es medir ν_{TV} . Advertimos de antemano que es 30 ó 60 cps.* (Para que la frecuencia sea la que corresponde, el televisor debe estar sintonizado en alguna estación y en un cuadro estable, que no oscile o se corra.)

(a) Se puede lograr una medida aproximada haciendo oscilar el dedo de forma permanente frente a la pantalla a un ritmo de 4 cps. El dedo bloqueará la luz de la pantalla en cualquier posición en que esté cuando la pantalla produce el "flash". Mídase la amplitud de oscilación del dedo y la separación entre las sucesivas sombras de los dedos en el punto de velocidad máximo. Supongamos que el movimiento es sinusoidal. Calcúlese la velocidad máxima del dedo, dadas la amplitud y la frecuencia. Reuniendo todo esto obtendremos su ν_{TV} .

(b) Utilizando un diario o algo similar cubramos toda la pantalla salvo una faja horizontal de algunas pulgadas de ancho. Sentados de espaldas al televisor mirémoslo con un espejo en la mano. Agitemos el espejo rotándolo alrededor de un eje horizontal. ¿Qué conclusión se obtiene? Ahora cubrámoslo todo salvo una franja vertical. Agitemos el espejo sobre un eje vertical. ¿Qué conclusión se obtiene? (Una conclusión sería que la TV es un estroboscopio mejor si se cubre todo, salvo una franja horizontal.) Ahora apartemos la cubierta. Agitemos el espejo alrededor de un eje horizontal y observemos las "varias pantallas de TV". ¿Podemos ver que los televisores reflejados vistos en el espejo oscilante tienen sólo la mitad de líneas horizontales por unidad de distancia vertical respecto a la pantalla estacionaria que vemos cuando no agitamos el espejo?

(c) He aquí una manera precisa de medir ν_{TV} usando un plato de tocadiscos. Hagamos un disco estroboscópico dibujando un círculo en papel blanco. Marquemos con lápiz a intervalos angulares que produzcan superposición estroboscópica de marcas sucesivas; marquemos $1/3$ para 120 cps, $1/3$ para 60 cps y $1/3$ para 30 cps. Perforemos el centro y pongámoslo sobre el plato como un disco. Después iluminémoslo con el televisor y observemos qué sector del círculo tiene la apariencia de las marcas de lápiz originales. (Si deseamos un disco estroboscó-

* Esta frecuencia en EE. UU. En otros países 50 ó 25 cps.

pico muy preciso podemos conseguirlo en un comercio de tocadiscos de alta fidelidad) o en Audiotex Co. Los Angeles 18, Calif., o Rockford, Ill, núm. de catálogo 30-228, precio 55 cents.)

1.4 Medición de frecuencia de vibraciones. (a) *Cuerdas de piano.* Ahora que conocemos ν_{TV} (Experimentos caseros 1.3) usemos el televisor para medir la frecuencia de vibración de las cuerdas de piano. Iluminemos las cuerdas de las dos octavas más bajas con el televisor (de noche y con las otras luces apagadas). Accionemos en sordina y rasguemos todas estas cuerdas a la altura de su parte media. (Si usamos los martillos del piano como cuando se ejecuta música, las amplitudes de vibración son demasiado pequeñas.) Rápidamente puede verse qué cuerda “permanece en reposo”. Anótese la cuerda; luego rasguemos la que está una octava más abajo. Si estuvimos acertados, la cuerda más baja aparecerá en reposo, pero “doble”. (¿Por qué?) Hemos encontrado la cuerda del piano (y la nota correspondiente en el teclado) que tiene la frecuencia ν_{TV} . Puede obtenerse la frecuencia de cada octava sucesiva de esa nota multiplicando por dos. Busquemos la respuesta en el *Handbook of Chemistry and Physics* (bajo “musical scales” en el índice) para ver si su piano está afinado. (La escala de equitemperancia con A440* es el tono patrón.)

Experimento casero

(b) *Cuerdas de guitarra.* Puede hacerse un experimento análogo con una guitarra. Supongamos que la cuerda más baja, la E, está en tono. Iluminémosla con el televisor. No permanece en reposo. Aflojémosla. Después de haber bajado un intervalo de alrededor de una cuarta, es decir, a la B debajo de esa E, la cuerda quedará en reposo. Bajemos otra octava para ver si la cuerda aparece “doble”. (En esta nota más baja la cuerda está muy floja, pero todavía trabaja bastante bien para efecto estroboscópico.) Finalmente, usemos los resultados para conocer el tono de la cuerda baja E en una guitarra. ¿Es E82 ó E164?

(c) *Hoja de sierra.* Otra bonita experiencia consiste en iluminar con un televisor una hoja de sierra vibrante. Sujetemos la hoja a una mesa con una grapa en C. Variemos la longitud de la hoja para modificar el tono.

1.5 Consideremos la transferencia de energía entre dos osciladores idénticos débilmente acoplados (Sec. 1.5). $t = 0$, cuando el oscilador a tiene toda la energía de oscilación y b ninguna, es fácil ver cuál es el oscilador “impulsado” (es b) y cuál es la “fuerza impulsora” (es a). Consideremos ahora el tiempo $t = 1/4T_{puls}$, un cuarto de ciclo de pulsación después de $t = 0$. A ese tiempo el péndulo a ha perdido la mitad de su energía, y b ha ganado esa energía; los péndulos tienen la misma amplitud de oscilación. ¿Cómo “saben” cuál es el que impulsa y cuál es el impulsado? ¿Cómo “saben” en qué sentido fluirá la energía? Dicho de otro modo, supongamos que puede observarse el sistema y seguirlo durante una oscilación (una oscilación rápida, de frecuencia alrededor de ω_1 o ω_2) durante un tiempo en el cual ambos tienen la misma energía. ¿Cómo se puede predecir si la partición de energía (a) permanecerá constante; (b) cambiará de forma tal que aumente la energía de b ; (c) cambiará en el otro sentido? Procuremos no usar las fórmulas; eso es muy fácil. Observemos el sistema en sí. ¿Qué empuja a qué? ¿Cuándo, etc.? (Nota: Las relaciones de fase son cruciales.)

1.6 Diséñese un mecanismo de amortiguación (“fricción”) que amortigüe sólo el modo 1 de los péndulos acoplados de la Fig. 1.14. Diséñese otro que amortigüe sólo el modo 2. Notemos que la fricción en los goznes amortigua *ambos* modos. Así lo hace la resistencia al aire. Éstos no servirán. Véase Tema suplementario 1.

1.7 Hojas de sierra acopladas. Sujétense dos hojas de sierra a una mesa con grapas en C, dejando alrededor de 4 pulgadas libres para vibrar. Una forma de

Experimento casero

* La escala de sonidos A, B, ... G se corresponde con la más usual do, re ... sí.

42 Oscilaciones libres de sistemas simples

ajustarlas a la misma frecuencia consiste en acortar la parte que sobresale de una de las hojas hasta que vibra en un tono reconocible, y luego afinar la otra hasta que suene en el mismo tono. Otro método consiste en iluminar cada una de ellas con la luz de un televisor utilizado como estroboscopio. (Véase Experimento casero 1.3.) Cuando las dos hojas están en un tono razonablemente cercano, acóplense con una tira de goma. Golpeemos una hoja y observemos las pulsaciones entre los modos. Variemos el acoplamiento moviendo la banda de goma hacia dentro o fuera a lo largo de las hojas. Si las dos hojas no están en el mismo tono ¿se obtienen pulsaciones?

He aquí otros ejemplos de osciladores idénticos acoplados que dan buenas pulsaciones: (i) dos imanes idénticos, colgados de manera que puedan columpiarse sobre una pieza de hierro—los imanes están acoplados por medio de sus campos; (ii) dos alambres de tender la ropa atados al mismo poste flexible en un extremo y a postes diferentes en los otros; (iii) dos cuerdas de una guitarra afinadas al mismo tono.

Experimento casero

1.8 Latas de sopa acopladas. Los tamaños normales de latas de sopa tienen un diámetro exterior de aproximadamente $2\frac{5}{8}$ " y encajan perfectamente en el extremo de un resorte muy estirable. Tomemos uno de estos resortes y dos latas de sopa. Utilicemos las latas como pesas de péndulo, suspendidas por hilos de 50 cm de longitud. Acoplemos las pesas con el resorte (empléese cinta adhesiva). Midamos las frecuencias de los dos modos longitudinales y la frecuencia para la transferencia de energía. (Comencemos con un péndulo en su posición de equilibrio y el otro desplazado.) ¿Muestra el experimento que esta frecuencia es la de pulsación $\nu_1 - \nu_2$? A partir de la frecuencia del modo más bajo, de la frecuencia de pulsación y del número de vueltas del resorte que estamos usando, calculemos la inversa de la constante elástica por vuelta de resorte K^{-1}/a .

Este sistema tiene cuatro grados de libertad. Además de los dos grados longitudinales y sus modos correspondientes estudiados más arriba, hay dos modos transversales con las masas oscilando perpendicularmente al resorte. Hallemos estos dos modos y midamos sus frecuencias. Comparemos estas frecuencias con las correspondientes a modos longitudinales. Explíquese.

1.9 Supongamos un péndulo consistente en una cuerda de 1 metro con una esfera de aluminio de 2 pulgadas de diámetro como pesa. Un segundo péndulo consiste en una cuerda de 1 m y una masa esférica de bronce de 2 pulgadas de diámetro. Los dos péndulos se ponen a oscilar al mismo tiempo y con la misma amplitud A . Después de 5 minutos de oscilación no perturbada, el péndulo de aluminio está oscilando con la mitad de su amplitud inicial. ¿Cuál es la amplitud de oscilación del péndulo de bronce? Supóngase que la fricción se debe a la velocidad relativa de la pesa y el aire, y que la velocidad instantánea de pérdida de energía es proporcional al cuadrado de la velocidad de la masa. Demuéstrese que la energía decrece exponencialmente. (Demuéstrese que para toda otra dependencia con la velocidad, por ejemplo v^4 , la energía no decrece exponencialmente.) Demuéstrese que para el decaimiento exponencial supuesto, el tiempo medio de decrecimiento es proporcional a la masa de la pesa. La respuesta final para la amplitud del péndulo de bronce es $0,81 A$.

1.10 Un resorte sin masa con ninguna masa sujeta a su extremo pende del techo. Su longitud es de 20 cm. Ahora, una masa M se suspende del extremo inferior del resorte. Sostengamos la masa con la mano de modo que el resorte se mantenga relajado, luego apartemos súbitamente la mano. La masa y el resorte oscilan. La posición más baja de la masa durante las oscilaciones está 10 cm por debajo del lugar en el cual permanecía cuando la sosteníamos. (a) ¿Cuál es

la frecuencia de oscilación? (b) ¿Cuál es la velocidad cuando la masa está 5 cm debajo de su lugar original de reposo?

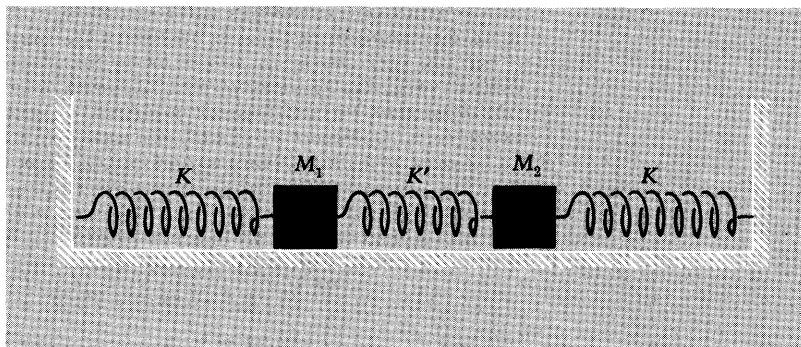
Resp. (a) 2,2 cps; (b) 70 cm/seg.

Se agrega una segunda masa de 300 g a la primera, haciendo un total de $M + 300$ g. Cuando este sistema oscila, tiene la mitad de la frecuencia del sistema con la masa M sola. (c) ¿Cuánto vale M ? (d) ¿Cuál es la nueva posición de equilibrio?

Resp. (c) 100 g; (d) 15 cm más abajo de la antigua posición.

1.11 Hállense los modos y sus frecuencias para los resortes acoplados y masas deslizando sobre una superficie sin fricción, mostrados abajo. En el equilibrio, los resortes están relajados. Tomemos $M_1 = M_2 = M$.

Problema 1.11



1.12 Pulsaciones de dos diapasones. Usemos dos diapasones de la misma frecuencia nominal. Diapasones C523,3 y A440 pueden conseguirse en muchos comercios de artículos musicales al precio aproximado de 1 dólar. [Se consiguen diapasones para C517 y A435 (tono internacional) a 85 cents. de dólar cada uno en Central Scientific Co., Irving Park Road, Chicago, III, 60613, Cenco Nos. 8455-1 y 2].

Experimento casero

Golpéese un diapasón contra otro a igual distancia de las puntas. Manténganse ambos diapasones cerca de un oído y hagamos ajustes finos en la posición de los diapasones hasta que se oigan las pulsaciones. "Carguemos" la punta de uno de los diapasones enrollándole una banda de goma. Variemos la frecuencia de pulsación empujando la goma más cerca o más lejos del extremo.

Algunos tenedores corrientes pueden funcionar como buenos diapasones, así como también algunos trinchantes (si el manipulado no apaga las vibraciones). Es fácil encontrar dos tenedores que den aproximadamente el mismo tono y produzcan pulsaciones. Algunas copas para vino también dan tonos claros (usualmente vibran en varios modos simultáneamente). Prestando atención a pulsaciones entre campanas (o copas de coñac o tapaderas de olla) oiremos pulsaciones provenientes de una campana sola. Cuando esto suceda se deberá a que la campana tiene dos modos de frecuencia levemente distintos. Cuando se golpea en un extremo, se excitan ambos modos.

1.13 Falta de linealidad en el oído — tonos de combinación. Para este experimento se necesita un diapasón A440 y otro C523 (también son buenas otras combinaciones). Asimismo necesitamos un ambiente tranquilo. Golpeemos los diapa-

sones juntos. Llévase al oído el C523 y luego el A440 (al mismo tiempo vayamos alejando el C523); luego, manteniendo el A440 cerca del oído, volvamos a acercarle el C523. Pero esta vez no dirigiremos nuestra atención sobre ninguno de los dos. Prestaremos atención a una nota alrededor de una tercera mayor por *debajo* de A440. (La técnica de atender primero la C, después la A y luego ambas, sirve de ayuda a la atención para progresar hacia abajo entonando con configuraciones sucesivas.) Después de algunos intentos podremos oír el F debajo de A440 cuando A y C están presentes: (Muchas personas no lo oyen. La mayoría de los violinistas lo oyen inmediatamente. Si no sabemos a qué atender, tratemos de identificar las notas en un piano.) En conjunto tenemos una agradable triada en F mayor, por ejemplo F, A, C. Para probar que el fenómeno ocurre en el tímpano (o quizá en la membrana basilar) y no en el cerebro (por ejemplo, para probar que no es oída meramente porque a su cerebro le gusta oír triadas mayores e invierte la parte que falta, la F), colocaremos un diapason junto a cada oído. (Esto también ayuda a convencernos de que realmente oímos el F.) Si el fenómeno fuera “psicológico” en el sentido de que al cerebro le gustara rellenar el acorde, éste todavía podría hacerlo. ¿Lo hace (experimentalmente)?

He aquí, por lo menos, parte de la explicación: Sea $p(t)$ la presión medida fuera del tímpano. Sea $q(t)$ la respuesta del tímpano (es decir, su desplazamiento), o tal vez $q(t)$ sea la respuesta de la membrana basilar en el oído interno, no estamos seguros. En todo caso, estamos buscando una explicación para *una respuesta que no satisface el principio de superposición*. Así, cuando las frecuencias ν_1 (A440) y ν_2 (C523) se superponen en el oído, la respuesta incluye no sólo ν_1 y ν_2 , sino también una tercera frecuencia ν_3 (\approx F349). Esto significa falta de linealidad. (Ya sabemos que las respuestas lineales obedecen el principio de superposición, y volveremos a ver esto más adelante.) Supongamos entonces que $q(t)$ es una función no lineal de $p(t)$.

$$q(t) = \alpha p(t) + \beta p^2(t) + \gamma p^3(t).$$

Sea ahora $p(t)$ una superposición de dos oscilaciones armónicas diferentes (producidas por los dos diapasones). Para simplificar, tomemos las amplitudes iguales y las constantes de fase nula. Usemos unidades en las cuales cada amplitud es emisaria, de modo que no tengamos que escribir mucho. Entonces tomamos

$$p(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t.$$

Por tanto la respuesta $q(t)$ del tímpano (¿o membrana basilar?) está dada por

$$q(t) = \alpha[\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t] + \beta[\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t]^2 + \gamma[\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t]^3.$$

Si β y γ son nulas, se dice que $q(t)$ es lineal en su respuesta. (Responde como lo hace un resorte que cumple la ley perfectamente lineal de Hooke respecto a una fuerza ejercida sobre él.) En este caso, $q(t)$ es una superposición de oscilaciones armónicas de frecuencia ω_1 y ω_2 . (¡Entonces no se oye la F!) El término con β es una alinealidad cuadrática; el término en γ es una alinealidad cúbica.

Queremos expresar $q(t)$ como superposición de oscilaciones armónicas. Necesitamos ciertas identidades trigonométricas; vamos a deducirlas ahora. Sea $f(x) \equiv \cos x$. Ya conocemos la identidad

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y, \text{ es decir,}$$

$$f(x)f(y) = \frac{1}{2}f(x + y) + \frac{1}{2}f(x - y).$$

Usamos este resultado para deducir la identidad (necesaria para la alinealidad cúbica)

$$\begin{aligned}[f(x)f(y)]f(z) &= [\tfrac{1}{2}f(x+y) + \tfrac{1}{2}f(x-y)]f(z) \\ &= \tfrac{1}{2}f(x+y)f(z) + \tfrac{1}{2}f(x-y)f(z) \\ &= \tfrac{1}{4}f(x+y+z) + \tfrac{1}{4}f(x+y-z) + \tfrac{1}{4}f(x-y+z) + \tfrac{1}{4}f(x-y-z).\end{aligned}$$

Encontraremos ahora el término cuadrático de la respuesta. Haciendo $\theta_1 \equiv \omega_1 t$, $\theta_2 \equiv \omega_2 t$, tenemos (para la alinealidad cuadrática)

$$\begin{aligned}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^2 &\equiv [f(\theta_1) + f(\theta_2)]^2 \\ &= [f(\theta_1)f(\theta_1)] + [2f(\theta_1)f(\theta_2)] + [f(\theta_2)f(\theta_2)] \\ &= [\tfrac{1}{2}f(\theta_1 + \theta_1) + \tfrac{1}{2}f(\theta_1 - \theta_1)] + [f(\theta_1 + \theta_2) + f(\theta_1 - \theta_2)] \\ &\quad + [\tfrac{1}{2}f(\theta_2 + \theta_2) + \tfrac{1}{2}f(\theta_2 - \theta_2)].\end{aligned}$$

Así que el término cuadrático de la respuesta incluye frecuencias $2\omega_1$, 0 , $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$, y $2\omega_2$. Éstos se llaman *tonos de combinación o frecuencia de combinación*.

El término cúbico de la respuesta alineal tiene:

$$\begin{aligned}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^3 &= [f(\theta_1) + f(\theta_2)]^3 \\ &= f^3(\theta_1) + 3f^2(\theta_1)f(\theta_2) + 3f(\theta_1)f^2(\theta_2) + f^3(\theta_2).\end{aligned}$$

Usando la identidad para $f(x)f(y)f(z)$, vemos que el término $f^3(\theta_1)$ es una superposición de oscilaciones armónicas de frecuencia $3\omega_1$ y ω_1 ; el término $f^2(\theta_1)f(\theta_2)$ es una superposición de frecuencias $2\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1 - \omega_2$ y ω_2 ; $f(\theta_1)f^2(\theta_2)$ es una superposición de $2\omega_2 + \omega_1$, $2\omega_2 - \omega_1$ y ω_1 ; $f^3(\theta_2)$ es una superposición de $3\omega_2$ y ω_2 . De modo que el término cúbico de la respuesta es una superposición de oscilaciones armónicas con tonos de combinación $3\omega_1$, ω_1 , $2\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_2 \pm \omega_1$, ω_2 y $3\omega_2$.

¡Volvamos al experimento del diapasón! Un poco de aritmética nos muestra que nuestra F no resulta de una alinealidad cuadrática. En efecto, está dada por la contribución cúbica: $2\omega_1 - \omega_2$:

$$\nu_1 = A440$$

$$\nu_2 = C523$$

$$2\nu_1 - \nu_2 = 880 - 523 = 357.$$

De acuerdo con el manual, F es 349 y $F\#$ es 370. Así, $2\nu_1 - \nu_2$ es un F un poco más “agudo”; es 8/21 del camino entre F y $F\#$. (También *suen*a algo más agudo.) (Si se usan diapasones afinados contra la escala científica o “exacta”, se obtiene un F exacto. Éste también suena exacto.)

Ahora viene la parte interesante. ¿Está en el tímpano la alinealidad cúbica? ¿O quizás está en la membrana resonante basilar? Creo que no está en el tímpano por la siguientes razones: Cuando alejo de mis oídos los dos diapasones, de modo que la intensidad percibida de cada uno decrece, aún oigo el término alineal. Si esto se debiera a una respuesta alineal en mi tímpano, debería caer en sonoridad con la distancia mucho más rápido que los términos ν_1 y ν_2 ,

pero no es así. También la contribución alineal $2\nu_2 - \nu_1 = 1046 - 440 = 606 \approx$ a medio camino entre D y D# estará presente, pero no la oigo. Nada de esto prueba que la membrana basilar es responsable, pero sí que el tímpano *no* parece ser responsable. ¿Deja esto sólo la membrana basilar o sus terminaciones nerviosas? No conozco la respuesta. (Descubrí el efecto accidentalmente mientras estaba preparando experimentos caseros. Quizá ya es conocido y entendido.)

Armónicos ópticos

Es posible producir armónicos ópticos (y sumas y diferencias de frecuencias, por ejemplo, frecuencias de combinación) utilizando la pequeña contribución alineal a la constante dieléctrica de una sustancia transparente. En la tapa de la revista *Scientific American* de julio 1963 hay una hermosa fotografía que muestra un haz de luz roja de longitud de onda 6940 unidades angstrom (1 angstrom = 10^{-8} cm) incidente sobre un cristal. Del lado opuesto del cristal emerge un haz de luz azul de longitud de onda 3470 angstrom. La disminución de longitud de onda a la mitad es equivalente al aumento de la frecuencia al doble. En consecuencia, la alinealidad es cuadrática. Véase también "The Interaction of Light with Light" por J. A. Giordmaine, *Scientific American* (abril 1964).

1.14 La superposición de condiciones iniciales da superposición de movimientos correspondientes. Supongamos que a y b son dos oscilaciones acopladas. Consideremos tres condiciones iniciales diferentes:

- (i) a y b salen del reposo con amplitudes 1 y -1 , respectivamente;
- (ii) salen del reposo con amplitudes 1 y 1;
- (iii) salen del reposo con amplitudes 2 y 0, respectivamente. De modo que la condición inicial para el caso (iii) es una superposición de las correspondientes a los casos (i) y (ii).

Demuéstrese que el movimiento en el caso (iii) es una superposición de los movimientos para los casos (i) y (ii).

1.15 Compruébese el caso general para el ejemplo del problema 1.14 (Inclúyanse en las condiciones iniciales, tanto las velocidades como los desplazamientos.)

1.16 Compruébese el principio de superposición para las ecuaciones de movimiento lineales no homogéneas dadas después de la ecuación (36). Demuéstrese que no se aplica a ecuaciones alineales inhomogéneas.

1.17 Escribamos las tres ecuaciones para un sistema de tres grados de libertad análogos a las ecuaciones generales (47) y (48). Demuéstrese que si suponemos un modo, se obtiene una ecuación análoga a la (56), excepto en que el determinante es de tres por tres. Demuéstrese que esto da una ecuación cúbica en la variable ω^2 . Puesto que una cúbica tiene tres soluciones, hay tres modos. Generalice a N grados de libertad. Esto constituye una demostración de que para un sistema de N grados de libertad existen N modos. Deben existir, porque aquí tenemos una fórmula para encontrarlos.

Experimento casero

1.18 Pulsaciones entre cuerdas de guitarra no idénticas débilmente acopladas. Consigamos una guitarra. Afinemos las dos cuerdas más bajas a la misma frecuencia. Puntee una cuerda y observe la otra atentamente. (Deben estar afinadas a la misma frecuencia, lo más exactamente posible. El afinado más exacto se obtiene, de hecho, maximizando las pulsaciones que ve.) Ahora punteemos la otra y observemos. ¿Se transfiere completamente la energía de una cuerda a la otra durante el proceso de pulsaciones? ¿Puede lograrse que la energía se transfiera completamente mejorando el afinado? Describa lo que observe. ¿Cuál es la explicación? Véase Prob. 1.19.

1.19 Péndulos no idénticos acoplados. Consideremos dos péndulos a y b , con la longitud de hilo l , pero con pesas de masa diferentes, M_a y M_b . Están acopladas mediante un resorte de constante de resorte K sujeto a las pesas. Demuéstrese que las ecuaciones de movimiento (para pequeñas oscilaciones) son:

$$M_a \frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -M_a \frac{g}{l} \psi_a + K(\psi_b - \psi_a),$$

$$M_b \frac{d^2\psi_b}{dt^2} = -M_b \frac{g}{l} \psi_b - K(\psi_b - \psi_a).$$

Resuelva estas dos ecuaciones para los dos modos por el método de búsqueda de coordenadas normales. Demuestre que

$$\psi_1 \equiv (M_a\psi_a + M_b\psi_b)/(M_a + M_b) \quad \text{y} \quad \psi_2 = \psi_a - \psi_b$$

son coordenadas normales. Encuentre las frecuencias y configuraciones de los modos. ¿Cuál es el significado físico de ψ_1 ? ¿Y el de ψ_2 ? Encuentre una superposición de los dos modos que corresponda a las condiciones iniciales al tiempo $t = 0$, en el que ambos péndulos tienen velocidad nula, la pesa a amplitud A y la b amplitud cero. Sea E la energía total de la pesa a a $t = 0$. Encuentre una expresión para $E_a(t)$ y para $E_b(t)$. Supongamos acoplamiento débil. ¿Se transfiere completamente la energía de la pesa a a la pesa b durante una pulsación? ¿Es éste el caso, quizá, en que si el péndulo que inicialmente tiene toda la energía es el pesado la energía no se transfiere completamente, pero si es el liviano la energía se transfiere por completo?

$$\text{Resp. } \omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + K\left(\frac{1}{M_a} + \frac{1}{M_b}\right).$$

$$\psi_a = A\left(\frac{M_a}{M} \cos \omega_1 t + \frac{M_b}{M} \cos \omega_2 t\right), \quad \psi_b = A \frac{M_a}{M} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t),$$

donde $M = M_a + M_b$.

Después de definir: $\omega_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ y $\omega_{\text{pro}} = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$,

se halla:

$$\psi_a = (A \cos \omega_{\text{mod}} t) \cos \omega_{\text{pro}} t + \left(A \frac{M_a - M_b}{M} \sin \omega_{\text{mod}} t\right) \sin \omega_{\text{pro}} t,$$

$$\psi_b = \left(2A \frac{M_a}{M} \sin \omega_{\text{mod}} t\right) \sin \omega_{\text{pro}} t.$$

La energía de cada péndulo se encuentra fácilmente en la aproximación de acoplamiento débil, en la que despreciamos la variación temporal del seno o coseno de $\omega_{\text{mod}} t$ durante un ciclo de la oscilación rápida a frecuencia ω_{pro} , porque suponemos $\omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{pro}}$. También despreciamos la energía almacenada en el resorte en cada instante. Entonces encontraremos

$$E_b = E \left(\frac{2M_a M_b}{M^2} \right) [1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

$$E_a = E \left[\frac{M_a^2 + M_b^2 + 2M_a M_b \cos(\omega_2 - \omega_1)t}{M^2} \right].$$

De modo que la energía del péndulo *a* (el que posee toda la energía al tiempo cero) varía sinusoidalmente a la frecuencia de pulsación, oscilando entre un valor máximo *E* y uno mínimo $[(M_a - M_b)/M]^2 E$.

La energía del péndulo *b* oscila a la frecuencia de pulsación entre un valor mínimo de cero y un valor máximo de $(4 M_a M_b / M^2) E$. La energía total $E_a + E_b$ es constante (puesto que despreciamos el amortiguamiento). Veamos ahora el Experimento casero 1.18. También, da una explicación *cualitativa* de cómo la transferencia de energía no llega a ser completa, por así decir, cuando las masas son distintas. [Sugerencia: Consideremos los dos casos extremos (i) M_a es enorme comparada con M_b , y (ii) M_a es pequeña comparada con M_b .]

1.20 Oscilaciones transversales de dos masas acopladas. Usando, ya sea la aproximación de resorte muy extensible, ya la de pequeñas oscilaciones, encontremos las dos ecuaciones de movimiento acopladas para los desplazamientos transversales ψ_a y ψ_b de la Fig. 1.11. (a) Úsese el método sistemático de encontrar las frecuencias y relaciones de amplitud para los dos modos normales. (b) Encontrar combinaciones lineales de ψ_a y ψ_b que den ecuaciones no acopladas, es decir, encontrar las coordenadas normales y encontrar las frecuencias y relaciones de amplitud para los dos modos.

Resp. Véanse ecuaciones (70) y (71).

1.21 Oscilaciones de dos circuitos LC acoplados. Encontrar los dos modos normales de oscilación de los circuitos LC acoplados mostrados en la Fig. 1.12 con ecuaciones de movimiento dadas por las ecuaciones (77) y (78). (a) Usar el método sistemático. (b) Usar el método de encontrar coordenadas normales.

Resp. Véase ecuación (79).

1.22 Un objeto pesado colocado sobre una almohadilla de goma, que debe ser usada como amortiguador de golpes, comprime la almohadilla en 1 cm. Si se le da una palmada oscilará. (Las oscilaciones serán amortiguadas; despreciamos la amortiguación.) Calcular la frecuencia de oscilación. (*Sugerencia:* Supóngase que la almohadilla actúa como un resorte que satisface la ley de Hooke.)

Resp. Alrededor de 5 cps.

1.23 Oscilaciones longitudinales de dos masas acopladas. Se muestra el sistema en la Fig. 1.9. Las ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuaciones (62) y (63). Usar el método sistemático dado en las ecuaciones (47) a (59) para encontrar los modos. En estas ecuaciones *no* se debe simplemente reemplazar; sin embargo, debe recorrer las mismas etapas "sin mirar".

Rep. Véanse ecuaciones (60) y (61).

Experimento casero

1.24. Modo salpicante en una batea de agua. El modo de oscilación más bajo en un volumen cerrado de líquido puede denominarse modo salpicante. Es excitado fácilmente, como sabe quien alguna vez haya intentado llevar una batea de agua sin salpicar.

Llene parcialmente una fuente rectangular con agua. Empuje la fuente un poco. Salpica. Un método mejor es dejar la fuente sobre una superficie plana horizontal, llenarla hasta el borde y luego sobrellenarla de manera tal que el agua se combe por encima del nivel del borde. Sacuda suavemente la fuente.

Después que los modos más altos se hayan amortiguado se quedará sólo con el modo salpicante, que oscilará con muy poca amortiguación. (Es un modo gravitacional, aunque se está usando la tensión superficial para mantener el agua "por encima de los bordes"; esto se hace para minimizar el amortiguamiento.) La superficie de agua permanece prácticamente plana. (Es plana después que los modos más altos se han amortiguado.) Supongamos que es plana durante todo el movimiento horizontal, cuando pasa por la posición de equilibrio, e inclinada en los extremos de su oscilación. Sea x a lo largo de la dirección horizontal de oscilación y sea y vertical hacia arriba. Sean \bar{x} e \bar{y} las coordenadas horizontal y vertical del centro de gravedad del agua. Sean x_0 — y_0 los valores de \bar{x} e \bar{y} en el equilibrio. Encontrar una fórmula para $\bar{y} - \bar{y}_0$ en función de $\bar{x} - \bar{x}_0$. (Un parámetro conveniente para trabajar es el nivel del agua en un extremo de la fuente, con relación a su nivel de equilibrio.) El aumento de energía potencial del volumen de agua es $mg(\bar{y} - \bar{y}_0)$. Encontraremos que $\bar{y} - \bar{y}_0$ es proporcional a $(\bar{x} - \bar{x}_0)^2$. Así el centro de gravedad tiene una energía potencial como la de un oscilador armónico. Usar la segunda ley de Newton como si toda la masa m estuviera concentrada en el centro de gravedad. Encontrar una fórmula para la frecuencia.

Resp. $\omega^2 = 3gh_0/L^2$, donde h_0 es la profundidad de agua en el equilibrio, $g = 980$ cm/seg², y L es la mitad de la longitud de la fuente en la dirección del movimiento ondulatorio, es decir, a lo largo de x . Probar esta fórmula en el experimento con la fuente de agua, es decir, midamos ω , h_0 y L y veamos cómo satisfacen la fórmula. Ahora veamos el Prob. 1.25.

1.25 Seiches.* De acuerdo con una enciclopedia, la profundidad media del lago Ginebra es aproximadamente 150 metros. La longitud es de alrededor de 60 km (incluyendo el extremo occidental, más angosto). Si comparamos el lago a una fuente rectangular podemos utilizar la fórmula para ω^2 obtenida en el Experimento casero 1.24. ¿Qué nos dice éste, bajo aquellas suposiciones, para el período de los seiches (modos salpicantes), que van en la dirección más larga del lago? (El período observado es del orden de una hora.) Las seiches son, probablemente, provocadas por diferencias repentinas en la presión atmosférica en una parte del lago respecto a la otra. Las amplitudes observadas son de hasta un metro y medio.

En junio de 1954, un seiche de amplitud aproximada de 3 metros, que tuvo lugar en el lago Michigan, barrió una cantidad de gente que estaba pescando desde los muelles.

De acuerdo con el *Time* (17 nov. 1967) las ondas de choque del gran terremoto de Alaska de Viernes santo de 1964, produjeron seiches en ríos, lagos y puertos a lo largo de la costa del golfo de los Estados Unidos e hicieron que el agua salpicara sobre el borde de la piscina de un hotel de Atlantic City, en Nueva Jersey.

* "Seiche". — Oleaje.

Capítulo 2

Oscilaciones libres de sistemas con muchos grados de libertad

2.1 Introducción 52

Las ondas estacionarias son modos normales 53
Modos de una cuerda con cuentas 53

2.2 Modos transversales de una cuerda continua 54

Vibración longitudinal y transversal 55
Polarización lineal 55
Ecuación de ondas clásica 59
Ondas estacionarias 59
Velocidad de la onda 60
Condiciones de contorno 61

Relaciones de frecuencia armónica 62
Número de onda 62
Relación de dispersión 63
Ley de dispersión para una cuerda de piano real 63
Ondas dispersivas y no dispersivas 64

2.3 Movimiento general de una cuerda continua y análisis de Fourier 64

Movimiento de una cuerda fijada en ambos extremos 64
Serie de Fourier para una función con ceros en ambos extremos 65
Análisis de Fourier de una función periódica de z 66
Modo de hallar los coeficientes de Fourier 67
Coeficientes de Fourier 68
Onda cuadrada 69
Análisis de Fourier de una función periódica del tiempo 70
Sonido de un acorde de piano 72
Otras condiciones de contorno 73

Calidad del tono según el método de excitación 74
Los modos de una cuerda homogénea forman un conjunto completo de funciones 75
Cuerda inhomogénea 75
Características de sistemas homogéneos dada por la forma sinusoidal de ondas estacionarias 76
Conjunto completo de funciones formados por los modos de una cuerda inhomogénea 76
Autofunciones 77

2.4 Modos de un sistema no continuo con N grados de libertad 77

Ejemplo 1: Oscilaciones transversales de una cuerda con cuentas 78
Ecuación de movimiento 79
Modos normales 80
Relación de dispersión exacta para una cuerda con cuentas 81
Condiciones de contorno 81
Límite continuo o de longitud de onda larga 83
Relación de dispersión para una cuerda de piano real 84
Ejemplo 2: Oscilaciones longitudinales de un sistema de resortes y masas 85

Parámetros empaquetados y parámetros distribuidos 86
Ejemplo 3: «Slinky» 87
Ejemplo 4: Circuito LC 88
El significado de ka 89
Otras formas de la relación de dispersión 91
Ejemplo 5: Péndulos acoplados 91
Ejemplo 6: Oscilaciones del plasma 94
Ejemplos esotéricos 97

Problemas y experimentos caseros 97

Capítulo 2 *Oscilaciones libres de sistemas con muchos grados de libertad*

2.1 Introducción

En el Capítulo 1 estudiamos oscilaciones de sistemas de uno o dos grados de libertad. En este capítulo estudiaremos sistemas de N grados de libertad, donde N puede llegar a ser un número muy grande, que llamaremos con poca exactitud “infinito”.

Para un sistema con N grados de libertad, siempre hay exactamente N modos (véase Prob. 1.17). Cada modo tiene su propia frecuencia ω y su propia “forma” dada por las relaciones de amplitud $A:B:C:D: \dots$, etcétera, correspondiente a los grados de libertad a, b, c, d, \dots , etc. En cada modo, todas las partes móviles pasan por sus posiciones de equilibrio simultáneamente; esto es, cada grado de libertad oscila en ese modo con la misma constante de fase. En consecuencia, hay una única constante de fase para todo el modo, que está determinada por las condiciones iniciales. Puesto que en un modo dado cada grado de libertad oscila con la misma frecuencia ω , cada parte móvil experimenta la misma fuerza restauradora por unidad de desplazamiento por unidad de masa, dada por ω^2 .

Supongamos, como ejemplo, que tenemos un sistema con cuatro grados de libertad a, b, c, d . Entonces hay cuatro modos. Supongamos que en el modo 1 las relaciones de amplitud son

$$A:B:C:D = 1:0:-2:7.$$

Entonces los movimientos de a, b, c y d (si el modo 1 es el único modo excitado) están dados por

$$\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \psi_b = 0, \quad \psi_c = -2\psi_a, \quad \psi_d = 7\psi_a,$$

donde A_1 y φ_1 dependen de las condiciones iniciales.

Si un sistema está compuesto por un número muy grande de partes móviles, y si estas partes están distribuidas en el interior de una región limitada del espacio, la distancia promedio entre partes móviles vecinas se torna muy pequeña. Como aproximación, podríamos pensar que el número de partes va haciéndose infinito y la distancia entre partes vecinas tendiendo a cero. Entonces se dice que el sistema se comporta como si fuera “continuo”. En este punto de vista está implícita la suposición de que el movimiento de los vecinos es casi el mismo. Esta suposición nos permite describir el vector desplazamiento de todas las partes móviles en un pequeño entorno de un punto x, y, z con una única cantidad vectorial, $\psi(x, y, z, t)$. Entonces, el desplazamiento $\psi(x, y, z, t)$

es una función continua de la posición, x, y, z , y del tiempo t . $\psi(x, y, z, t)$ reemplaza la descripción que usa los desplazamientos $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$, etc., de las partes individuales. Entonces decimos que estamos tratando con *ondas*.

Las ondas estacionarias son modos normales. Los modos de un sistema continuo se denominan *ondas estacionarias*, o *modos normales*, o simplemente *modos*. De acuerdo con la discusión anterior, un verdadero sistema continuo tiene un número infinito de partes móviles independientes a pesar de que ocupan un espacio finito. Hay, en consecuencia, infinitos grados de libertad y, por lo tanto, infinitos modos. Esto no es estrictamente cierto para un sistema material real. Un litro de aire no contiene un número infinito de partes móviles sino $2,7 \times 10^{23}$ moléculas, cada una de las cuales tiene tres grados de libertad (para el movimiento según las direcciones x , y , z). Así, una botella que contiene un litro de aire no tiene un número infinito de modos vibracionales del aire, sino solamente 8×10^{23} como máximo. Cualquiera que haya experimentado soplando en una botella, o una flauta, sabe que no es muy fácil excitar más que algunos de los primeros modos. (Usualmente distinguimos los modos llamados al de más baja frecuencia 1, el siguiente hacia arriba 2, etc.) En la práctica nos ocupamos solamente de algunos de los primeros (o algunas docenas, o algunos millares) modos. Como veremos, los primeros modos se comportan como si el sistema fuera continuo.

El movimiento más general de un sistema puede sacrificarse como superposición de todos sus modos, con la amplitud y constante de fase para cada modo determinadas por las condiciones iniciales. La apariencia del sistema vibrante en tal situación general es muy complicada, simplemente porque el ojo y el cerebro no pueden contemplar sin confusión varias cosas al mismo tiempo. No es fácil observar la totalidad del movimiento y “ver” cada modo separadamente cuando hay muchos presentes.

Modos de una cuerda con cuentas. Estudiamos en primer término las oscilaciones transversales de cuerdas con cuentas. Cuando decimos “cuerda”, realmente estamos significando resortes. Supondremos que tenemos resortes rectilíneos sin masa (p. ej., cumplen la ley de Hooke) conectando masas puntuales M . (En nuestras figuras dibujamos los resortes como líneas rectas mejor que como hélices.)

En la Fig. 2.1 mostramos una serie de sistemas de cuerdas con cuentas. El primer sistema tiene $N = 1$ (un grado de libertad), el siguiente $N = 2$, etc. En cada caso dibujamos sin demostración las configuraciones de los modos normales. Más adelante deduciremos la frecuencia y configuración exacta para cada modo.

Ya será posible ver (suponiendo que las configuraciones mostradas son las correspondientes a los modos) como hemos ordenado correc-

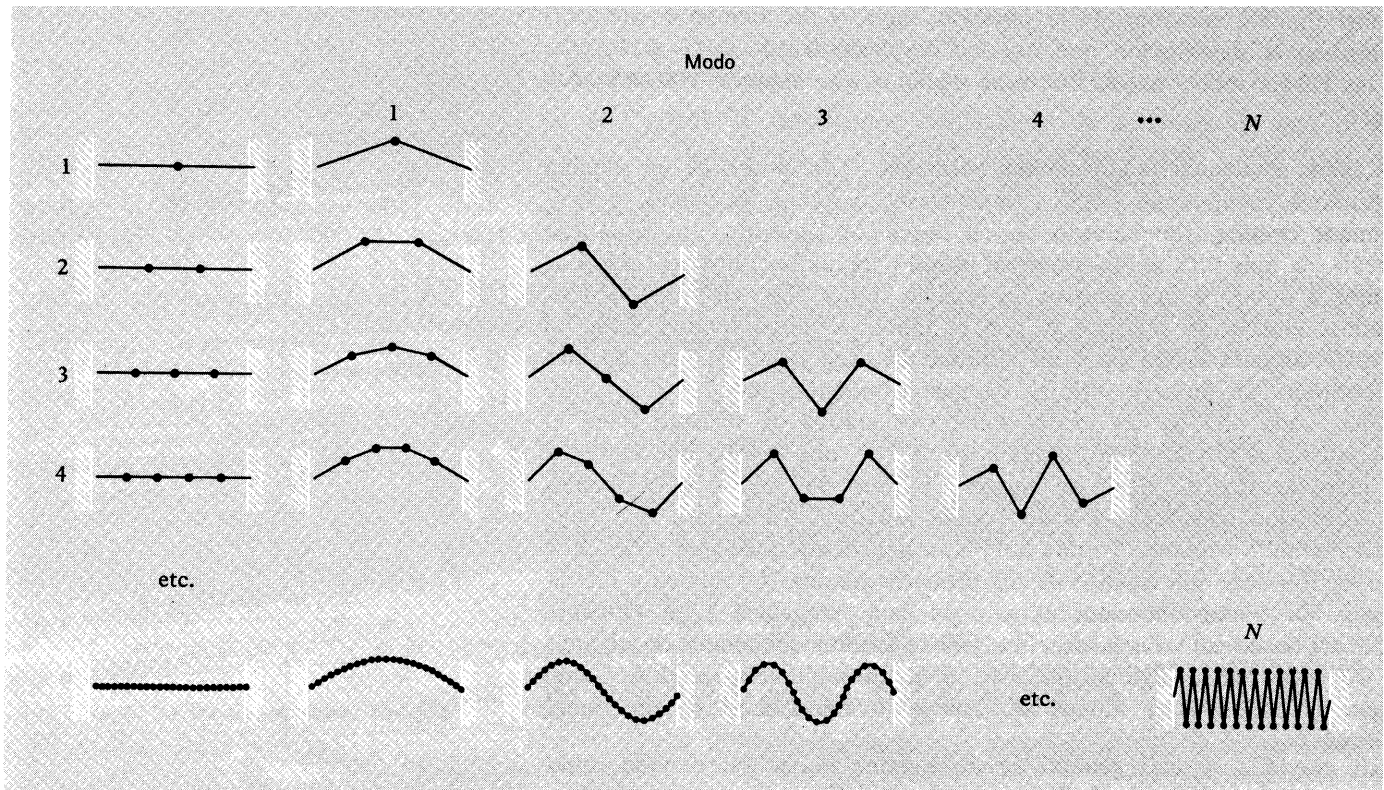


Fig. 2.1 Modos de vibraciones transversales para una cuerda con cuentas. Una cuerda con N cuentas tiene N modos. En el modo m la cuerda cruza el eje de equilibrio $m-1$ veces y tiene m semilongitudes de onda. El modo de frecuencia más alta es la configuración en zigzag mostrada.

tamente las configuraciones en orden creciente de frecuencia de los modos. Esto es porque las cuerdas forman ángulos cada vez mayores con el eje de equilibrio a medida que aumentamos el número del modo (manteniendo constante el desplazamiento de una cuenta dada). Por consiguiente, la fuerza restauradora por unidad de desplazamiento por unidad de masa, para una cuenta dada en un sistema dado, aumenta cuando pasamos de una configuración a la siguiente y, por tanto, la frecuencia del modo hace lo mismo.

Otro aspecto que resalta es que nuestra serie de formas de modos supuestos da siempre exactamente N configuraciones: el primer modo siempre tiene cero "nodos" (lugar donde el resorte cruza el eje, excluidos los extremos), el segundo tiene un nodo, etc. El modo más alto siempre tiene el mayor número posible de nodos, a saber $N-1$, que es conseguido zigzagueando hacia arriba y abajo, o sea, cruzando el eje una vez entre cada dos masas sucesivas.

2.2 Modos transversales de una cuerda continua

Consideremos ahora el caso de una N enorme, digamos $N = 1\,000\,000$ o algo así. Entonces, para los modos más bajos (digamos los primeros

millones), hay un número muy grande de cuentas entre cada nodo. Así que el desplazamiento varía lentamente de una cuenta a la siguiente. [No consideraremos aquí los modos más altos puesto que se aproximan al "límite zigzag", donde no es posible describirlos usando una función continua $\psi(x,y,z,t)$]. En consecuencia, de acuerdo con las acotaciones anteriores, no describiremos la configuración instantánea por medio de una lista de desplazamientos $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$, $\psi_c(t)$, $\psi_d(t)$, etc., de cada cuenta. En cambio consideramos que todas con posiciones de *equilibrio* en el entorno del punto x,y,z (un entorno que, si se desea, es un cubo infinitesimal con aristas de longitud Δx , Δy y Δz) tienen el mismo vector instantáneo de desplazamiento $\psi(x,y,z,t)$:

$$\psi(x,y,z,t) = \hat{x}\psi_x(x,y,z,t) + \hat{y}\psi_y(x,y,z,t) + \hat{z}\psi_z(x,y,z,t), \quad (1)$$

donde \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} son vectores unitarios y ψ_x , ψ_y y ψ_z son los componentes del vector desplazamiento ψ . Es importante caer en la cuenta de que x,y,z indican la posición de *equilibrio* de las partículas en ese entorno. por ello, x,y,z no son funciones del tiempo.

Vibración longitudinal y transversal. La ecuación (1) es de una forma mucho más general que la necesaria para estudiar las vibraciones de una cuerda. Supongamos que, en el equilibrio, la cuerda está estirada a lo largo del eje z . Entonces, la coordenada z es suficiente para indicar la posición de equilibrio de cada cuenta (con una exactitud Δz) y la ecuación (1) puede escribirse en la forma, más simple

$$\psi(z,t) = \hat{x}\psi_x(z,t) + \hat{y}\psi_y(z,t) + \hat{z}\psi_z(z,t). \quad (2)$$

Las vibraciones a lo largo de la dirección z se llaman vibraciones *longitudinales*. Las vibraciones a lo largo de las direcciones x e y se llaman vibraciones *transversales*. En este momento deseamos considerar solamente las vibraciones transversales de la cuerda. Por lo tanto, suponemos que ψ_z es nulo:

$$\psi(z,t) = \hat{x}\psi_x(z,t) + \hat{y}\psi_y(z,t). \quad (3)$$

Polarización lineal. Como simplificación adicional, suponemos que todas las vibraciones se producen en la dirección de \hat{x} (es decir, $\psi_y \equiv 0$). Entonces se dice que las vibraciones son *linealmente polarizadas* en la dirección de \hat{x} . (En el Cap. 8 estudiaremos estados generales de polarización.) Ahora podemos dejar de lado el vector unitario \hat{x} y el subíndice de ψ_x usando la notación:

$$\psi(z,t) = \text{Desplazamiento transversal instantáneo de partículas con posición de equilibrio } z. \quad (4)$$

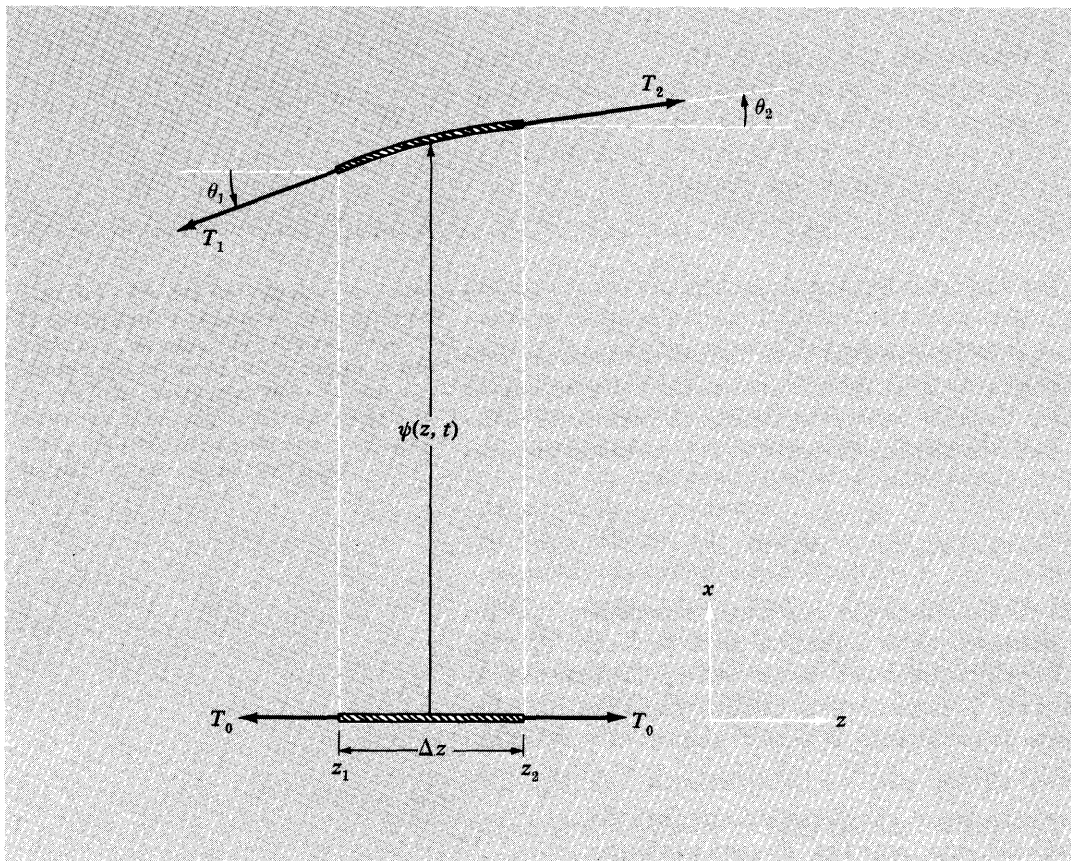
Consideremos ahora un segmento muy pequeño de la cuerda continua. En el equilibrio, el segmento ocupa un pequeño intervalo de longitud Δz , centrado en z . La masa ΔM del segmento dividido por la longitud Δz se define como la *densidad de masa* ρ_0 medida en unidades de masa por unidad de longitud.

$$\Delta M = \rho_0 \Delta z. \quad (5)$$

Se supone que la densidad de masa es uniforme a lo largo de la cuerda. La tensión de la cuerda en equilibrio T_0 , se supone también uniforme.

Para una situación general (no equilibrio), el segmento tiene un desplazamiento transversal $\psi(z, t)$, promediado sobre el segmento. (Véase Fig. 2.2.) El segmento ya no es recto; tiene (generalmente) una pequeña curvatura. Esto se indica en la Fig. 2.2, por el hecho de que θ_1 y θ_2 no son iguales. La tensión en el segmento ha dejado de ser T_0 , puesto que su longitud ha aumentado respecto a la longitud en el equi-

Fig. 2.2 Oscilaciones transversales de una cuerda continua. En la base está la posición de equilibrio de un segmento infinitesimal a lo largo del eje z . Arriba está representada una posición general y configuración del mismo segmento.



librio Δz . Encontramos la fuerza neta sobre el segmento, F_x , en el instante mostrado en la figura. En su extremo izquierdo el segmento es llevado hacia abajo con una fuerza $T_1 \sin \theta_1$. En su extremo derecho es empujado hacia arriba con una fuerza $T_2 \sin \theta_2$. La fuerza neta hacia arriba es

$$F_x(t) = T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1. \quad (6)$$

Queremos expresar $F_x(t)$ en términos de $\psi(z, t)$ y su derivada espacial

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} = \text{pendiente del resorte en la posición } z \text{ al tiempo } t. \quad (7)$$

De acuerdo con la Fig. 2.2, la pendiente de la cuerda en z_1 es $\tan \theta_1$ y la pendiente en z_2 es $\tan \theta_2$. Asimismo, $T_1 \cos \theta_1$ es la componente horizontal en z_2 . Ahora queremos, eventualmente, obtener una ecuación diferencial *lineal* de movimiento. Para ello supondremos que podemos usar tanto la aproximación del “slinky” como la de pequeñas oscilaciones. En la aproximación del “slinky”, T es mayor que T_0 en un factor $1/\cos \theta$, porque el segmento es más largo que Δz en un factor $1/\cos \theta$. En consecuencia, $T \cos \theta = T_0$. En la aproximación de pequeñas oscilaciones despreciamos el aumento de la longitud del segmento y también aproximamos $\cos \theta$ por 1. Así obtenemos también en este caso $T \cos \theta = T_0$. Entonces la ecuación (6) da:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 \\ &= T_2 \cos \theta_2 \tan \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 \tan \theta_1 \\ &= T_0 \tan \theta_2 - T_0 \tan \theta_1 \\ &= T_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_2 - T_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Consideremos ahora la función $f(z)$ definida por

$$f(z) = \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z}, \quad (9)$$

donde hemos suprimido la variable t al escribir $f(z)$ porque nos proponemos mantener t constante. Desarrollamos $f(z)$ en serie de Taylor en el entorno de z_1 , y entonces hacemos $z = z_2$. [Véase ec. (3) del Apéndice]:

$$f(z_2) = f(z_1) + (z_2 - z_1) \left(\frac{df}{dz} \right)_1 + \frac{1}{2} (z_2 - z_1)^2 \left(\frac{d^2 f}{dz^2} \right)_1 + \dots, \quad (10)$$

donde $z_2 - z_1 = \Delta z$, de acuerdo con la Fig. 2.2. Vayamos ahora al límite en el que Δz es suficientemente pequeño de tal forma que podemos despreciar los términos cuadráticos y de orden superior en la ecuación (10). Entonces escribimos:

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= \Delta z \left(\frac{df}{dz} \right)_1 = \Delta z \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \right) \\ &= \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \right) \\ &= \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Obsérvese que al llegar a la ecuación (11) hemos dejado de lado el subíndice 1. Lo hemos hecho porque no importa en qué parte del intervalo Δz evaluamos la derivada con respecto a z , puesto que estamos despreciando derivadas superiores en la serie de Taylor de la ecuación (10). Obsérvese también que debemos escribir la derivada espacial como derivada parcial al usar la notación $\psi(z, t)$.

Podemos ahora usar las ecuaciones (9) y (11) en la ecuación (8) obteniendo para la fuerza neta sobre el segmento el resultado

$$F_x(t) = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}. \quad (12)$$

Usemos la segunda ley de Newton. La fuerza F_x dada por la ecuación (12) es igual a la masa del segmento ΔM multiplicada por su aceleración. La velocidad y aceleración del segmento con posición de equilibrio z se expresa en términos de $\psi(z, t)$ y sus derivados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= \text{desplazamiento} \\ \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} &= \text{velocidad} \\ \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} &= \text{aceleración} \end{aligned} \quad (13)$$

Así, la ley de Newton [con $\Delta M = \rho_0 \Delta z$] da

$$\rho_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = F_x = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

es decir,

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}} \quad (14)$$

Ecuación de ondas clásicas. La ecuación (14) es una célebre ecuación diferencial en derivadas parciales lineal y de segundo orden. Se la llama *ecuación de ondas clásica*. La encontraremos a menudo, y eventualmente conoceremos muchas propiedades de sus soluciones y las situaciones físicas en las que aparece. (Por supuesto, la constante positiva T_0/ρ_0 es característica de la cuerda. En otras aplicaciones físicas aparecerán, en su lugar, algunas otras constantes positivas.)

Ondas estacionarias. Estamos tratando de encontrar los modos normales —las ondas estacionarias— de una cuerda continua. Por lo tanto, *suponemos* que tenemos un modo. Suponemos que todas las partes de la cuerda oscilan con movimiento armónico a la misma frecuencia angular ω y la misma constante de fase φ . Entonces, $\psi(z, t)$, que es el desplazamiento de las partículas de cuerda con posición de equilibrio z , tendrá el mismo comportamiento temporal, $\cos(\omega t + \varphi)$ para todas las partículas, es decir, para todo z . Como es usual, la constante de fase φ corresponde al “tiempo de giro” del modo. La “forma” de un modo compuesto de grados de libertad discretos indicados con a, b, c , etc., está dada por las amplitudes relativas de vibración A, B, C , etc. En el caso específico de una cuerda continua, donde los (infinitos) grados de libertad se designan con el parámetro z . La amplitud de vibración de los grados de libertad en z (es decir, en un pequeño entorno de z) puede escribirse como una función continua de z denotada $A(z)$. La forma de $A(z)$ como función de z , depende del modo, esto es, cada modo tiene una $A(z)$ diferente. Entonces podemos escribir la *expresión general para una onda más estacionaria*:

$$\psi(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi). \quad (15)$$

La aceleración correspondiente a la ecuación 15 es

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi = -\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \varphi) \quad (16)$$

La segunda derivada parcial de la ecuación (15) con respecto a z es

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 [A(z) \cos(\omega t + \varphi)]}{\partial z^2} \\ &= \cos(\omega t + \varphi) \frac{d^2 A(z)}{dz^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

donde, en lugar de una derivada parcial con respecto a z hay una derivada ordinaria, porque $A(z)$ no depende del tiempo. Reemplazando las ecuaciones (16) y (17) en la (14) y eliminando el factor común $\cos(\omega t + \varphi)$ obtenemos

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\omega^2 \frac{\rho_0}{T_0} A(z). \quad (18)$$

La ecuación (18) gobierna la forma del modo. Puesto que cada modo tiene una frecuencia angular ω diferente, y puesto que ω^2 aparece en la ecuación (18), vemos que a modos distintos corresponden formas diferentes, como se esperaba.

La ecuación (18) es de la forma de la ecuación diferencial para oscilaciones armónicas, pero para oscilación en el espacio más que en tiempo. La forma general para oscilación armónica en el espacio puede ser escrita

$$A(z) = A \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) + B \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right), \quad (19)$$

donde la constante λ representa la distancia sobre la que tiene lugar una oscilación completa. Por eso se la llama *longitud de onda*. El parámetro para oscilaciones en el espacio es análogo al período T para oscilaciones en el tiempo. La longitud de onda λ se mide en unidades de centímetros por ciclo (es decir, por ciclo de oscilación especial a lo largo de z), o simplemente en centímetros.

Para tratar de adaptar esta solución a la ecuación (18), diferencie dos veces la ecuación (19)

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A(z). \quad (20)$$

Entonces, comparando las ecuaciones (18) y (20) vemos que necesitaremos tener

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2 \left(\frac{\rho_0}{T_0}\right) = (2\pi\nu)^2 \frac{\rho_0}{T_0}, \quad (21)$$

es decir:

$$\boxed{\lambda\nu = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \equiv v_0 = \text{constante}} \quad (22)$$

Velocidad de la onda. La ecuación (22) da la relación entre longitud de onda y frecuencia para ondas transversales estacionarias en una cuerda continua homogénea. La constante $(T_0/\rho_0)^{1/2}$ tiene dimensiones de velocidad, puesto que $\lambda\nu$ tiene dimensiones de longitud/tiempo. La velocidad, $v_0 \equiv (T_0/\rho_0)^{1/2}$ se llama “velocidad de fase para ondas de propagación”, para este sistema. (Estudiaremos ondas de propagación en el Capítulo 4.) En el estudio de ondas estacionarias que estamos haciendo, el concepto de velocidad de fase no es necesario, porque las ondas estacionarias no van a ningún lado. Ondulan como un gran oscilador armó-

nico “distribuido”. En lo que sigue de este capítulo evitaremos llamar velocidad a $(T_0/\rho_0)^{1/2}$, porque deseamos que el lector se forme una imagen mental de ondas estacionarias.

La solución general para el desplazamiento $\psi(z,t)$ de la cuerda en un solo modo (onda estacionaria) se obtiene combinando las ecuaciones (15) y (19):

$$\psi(z,t) = \cos(\omega t + \varphi)[A \sin(2\pi z/\lambda) + B \cos(2\pi z/\lambda)]. \quad (23)$$

Condiciones de contorno. La ecuación (23) es, hasta cierto punto, *demasiado* general. No pone de manifiesto las importantes condiciones de contorno. Nuestra cuerda vibrante está *fija en ambos extremos*, pero todavía no hemos incorporado esa porción de información en la solución. Lo haremos como sigue. Supongamos que la cuerda tiene una longitud total L . Elijamos el origen de coordenadas de manera tal que el extremo izquierdo de la cuerda esté en $z = 0$. El extremo derecho está entonces en $z = L$. Consideremos $z = 0$. Allí está sujeta la cuerda, así que $\psi(0,t)$ debe ser cero para todo t . Esta condición requiere que sea $B = 0$ puesto que, para todos los tiempos t ,

$$\psi(0,t) = \cos(\omega t + \varphi)[0 + B] = 0. \quad (24)$$

Así, tenemos

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \sin \frac{2\pi z}{\lambda}. \quad (25)$$

La otra condición de contorno es que la cuerda esté fija en $z = L$, de forma que $\psi(L,t)$ debe anularse para todo t . Nosotros, por cierto, no queremos elegir $A = 0$ en la ecuación (25), puesto que eso corresponde a la situación trivial de una cuerda en reposo permanente. La única manera de cumplir la condición de contorno en L es tener

$$\sin \frac{2\pi L}{\lambda} = 0. \quad (26)$$

Las únicas longitudes de onda λ que pueden satisfacer esta condición de contorno son aquellas para las cuales el número de semilongitudes de onda, L , es un entero. Así, las longitudes de onda aceptables deben satisfacer una de las siguientes posibilidades:

$$\frac{2\pi L}{\lambda} = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, \dots \quad (27)$$

(¿Por qué hemos excluido el caso $2\pi L/\lambda = 0$?) Esta sucesión de posibles caminos para satisfacer las condiciones de contorno corresponde a todos los posibles modos de la cuerda. De acuerdo a la sucesión numeramos los

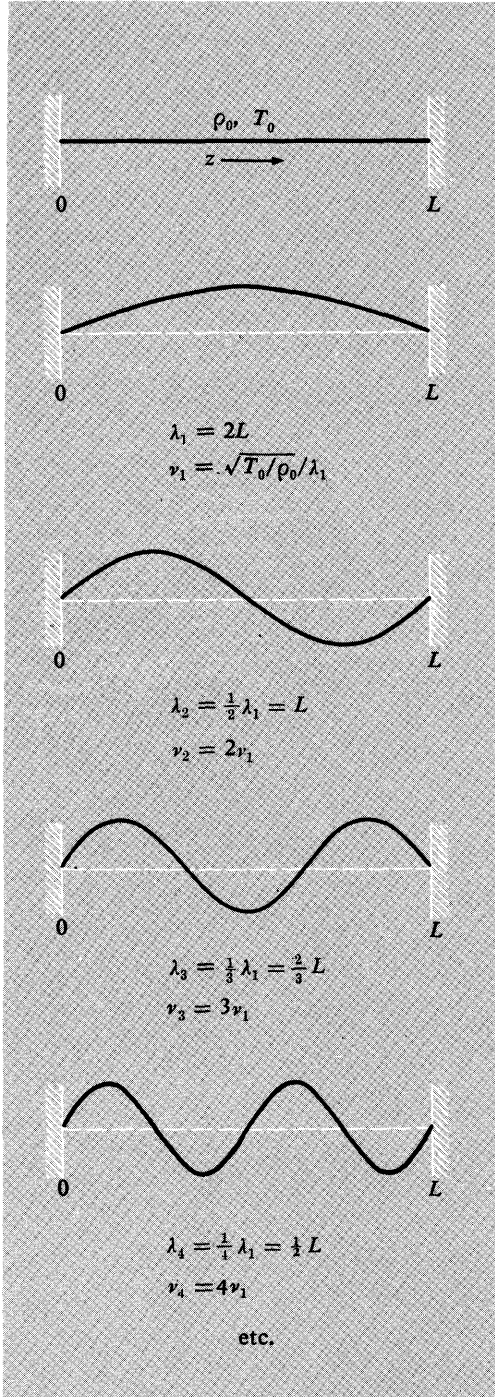


Fig. 2.3 Modos de una cuerda continua homogénea con extremos fijos.

modos comenzando por el primero como número 1. Entonces, según la ecuación (27), las longitudes de onda de los modos nos quedan dadas por

$$\lambda_1 = 2L, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_1, \quad \lambda_4 = \frac{1}{4}\lambda_1, \quad \dots \quad (28)$$

Relaciones de frecuencia armónicas. Las frecuencias correspondientes de los modos se encuentran usando la ecuación (22)

$$\nu_1 = \frac{v_0}{\lambda_1}, \quad \nu_2 = 2\nu_1, \quad \nu_3 = 3\nu_1, \quad \nu_4 = 4\nu_1, \quad \dots \quad (29)$$

Las frecuencias $2\nu_1$, $3\nu_1$, etc., se llaman segunda, tercera, etc., *armónicas* de la frecuencia *fundamental* ν_1 . El hecho de que las frecuencias ν_2 , ν_3 , etcétera, forman una sucesión de *armónicos* de la frecuencia más baja ν_1 es el resultado de nuestra suposición de que la cuerda es perfectamente uniforme y flexible. La mayoría de los sistemas físicos reales tienen frecuencias de modos que no siguen esta sucesión armónica de relaciones de frecuencia. Por ejemplo, las frecuencias de los modos para una cuerda de densidad de masa no uniforme no forman una sucesión de armónicos de la fundamental. En lugar de ello uno puede tener, por ejemplo, $\nu_2 = 2,78\nu_1$, $\nu_3 = 4,62\nu_1$, etc. Para una cuerda real de piano o violín las frecuencias de los modos siguen aproximada pero no exactamente la sucesión armónica. Esto ocurre porque no son perfectamente flexibles. (Para un argumento cualitativo, que muestra cómo estas relaciones de frecuencia "armónicas" se deben a la uniformidad de la cuerda, véase Prob. 2.7.)

Los modos de la cuerda se muestran en la Fig. 2.3. La configuración de equilibrio corresponderá al primer término $2\pi L/\lambda = 0$, ausente en la sucesión dada por la ecuación (27). La frecuencia correspondiente es cero. No hay movimiento, y al estado de equilibrio no se le llama modo.

Número de onda. La inversa de la longitud de onda λ se llama *número de onda* σ . Sus unidades son ciclos por centímetro o, más a menudo, "inversa de centímetros" (cm^{-1}). Es el parámetro, para oscilaciones en el espacio, análogo a la frecuencia para oscilaciones en el tiempo.

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \text{número de ondas (ciclos por cm)} \quad (30)$$

Al número de onda multiplicado por 2π se le llama *número de onda angular* k . Sus unidades son radianes de fase por centímetro. Es la cantidad, para oscilaciones en el espacio, análogo a la frecuencia angular ω para oscilaciones en el tiempo.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{número de onda angular (radianes por cm)} \quad (31)$$

Podemos ilustrar el uso de estas cantidades escribiendo la misma onda estacionaria en varias formas equivalentes

$$\psi(z,t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{z}{\lambda} = A \sin 2\pi \nu t \sin 2\pi \sigma z = A \sin \omega t \sin kz. \quad (32)$$

Como ejemplo adicional podemos describir la sucesión de modos normales dada por las ecuaciones (27), (28) y (29) de la siguiente manera:

$$k_1 L = \pi \text{ radio} \quad k_2 L = 2\pi \text{ radio} \quad k_3 L = 3\pi \text{ radio} \quad \text{etc.} \quad (33)$$

$$\sigma_1 L = \frac{1}{2} \text{ ciclo} \quad \sigma_2 L = 1 \text{ ciclo} \quad \sigma_3 L = \frac{3}{2} \text{ ciclo} \quad \text{etc.} \quad (34)$$

Relación de dispersión. La ecuación (22) da la relación entre frecuencia y longitud de onda para los modos normales de la cuerda flexible uniforme:

$$\nu = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \cdot \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \cdot \sigma,$$

o (multiplicando por 2π)

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k. \quad (35)$$

La ecuación (35) da la relación entre frecuencia y número de onda para los modos normales de la cuerda. (Obsérvese que hemos abandonado el adjetivo “angular” de las designaciones “frecuencia angular” y “número de onda angular”. Esto es una práctica común, pero los símbolos y las unidades siempre eliminan toda ambigüedad.) Tal relación dando ω como función de k , se llama *relación de dispersión*. Es una manera conveniente de caracterizar el comportamiento ondulatorio de un sistema.

Ley de dispersión para una cuerda de piano real. La relación de dispersión dada por la ecuación (35) es extremadamente simple, pero hallaremos algunas más complicadas en el futuro. Para una relación de dispersión más complicada, la cantidad $\lambda\nu = \omega/k$ *no* es constante, es decir, no es independiente de la longitud de onda. Por ejemplo, aparece que la ley de dispersión para una cuerda de piano real está dada aproximadamente por:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{T_0}{\rho_0} + \alpha k^2 \quad (36)$$

donde α es una constante positiva pequeña que sería nula si la cuerda fuera perfectamente flexible. [En este caso, la ecuación (36) se reduce a la (35).] Los modos de una cuerda de piano real tienen la misma dependencia espacial que los de una cuerda perfectamente flexible, es decir, $\lambda_1 = 2L$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_1$, etc., porque las condiciones de contorno son las mismas. Pero las frecuencias de los modos *no* satisfacen la secuencia “armónica” $\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$, etc., porque la relación de dispersión, ecuación (36), no da esa sucesión. La sucesión armónica se obtiene solamente en el límite idealizado donde α es nula, es decir, donde tenemos $\lambda\nu = \text{constante}$. Para una cuerda de piano real las frecuencias de los modos más altos son algo “más agudas” (o sea, tienen frecuencias levemente más altas) que las frecuencias dadas por la sucesión armónica.

Ondas dispersivas y no dispersivas. Las ondas que satisfacen la sencilla relación de dispersión $\omega/k = \text{constante}$ se llaman “ondas no dispersivas”. Cuando ω/k depende de la longitud de onda (y, por lo tanto, de la frecuencia), las ondas se llaman “dispersivas”. Para ondas dispersivas se acostumbra hacer una gráfica de ω en función de k . En el presente ejemplo de la cuerda flexible, esta gráfica es una línea recta que pasa por el punto $\omega = k = 0$ y tiene una pendiente $(T_0/\rho_0)^{1/2}$, como se muestra en la Fig. 2.4.

2.3 Movimiento general de una cuerda continua y análisis de Fourier

El estado de movimiento más general de la cuerda continua (con ambos extremos fijos y para vibraciones transversales a lo largo de x) está dado por una superposición de todos los modos, numerados 1, 2, 3, ..., con amplitudes A_1, A_2, A_3, \dots , y constantes de fase $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$,

$$\psi(z, t) = A_1 \sin k_1 z \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin k_2 z \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots, \quad (37)$$

donde los k_n han sido elegidos como se describe en la sección precedente para satisfacer las condiciones de contorno en $z = 0$ y $z = L$ y donde los ω_n están relacionados con los k_n mediante la relación de dispersión $\omega(k)$. Las amplitudes A_n y las constantes de fase φ_n , que completan la descripción del movimiento para todas las posiciones z y tiempos t , están determinadas especificando las *condiciones iniciales*, o sea, los desplazamientos instantáneos $\psi(z, t)$ y las correspondientes velocidades instantáneas $v(z, t) = \partial\psi(z, t)/\partial t$ para cada punto z a $t = 0$.

Movimiento de una cuerda fijada en ambos extremos. Suponga que para $t < 0$ obligamos a la cuerda a seguir una forma determinada $f(z)$ por medio de alguna clase de templado. Entonces, a $t = 0$ aflojamos la cuerda quitando súbitamente el templado. Así, a $t = 0$ cada parte de la cuerda tiene su desplazamiento $\varphi(z, 0)$ igual a $f(z)$ y su velocidad $v(z, 0)$

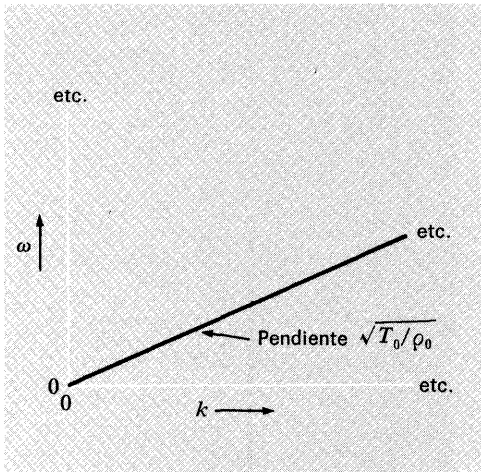


Fig. 2.4 Relación de dispersión para una cuerda continua, homogénea y flexible.

igual a cero. Ahora, el término n -ésimo de la velocidad [que es la derivada temporal de la ec. (37)] es proporcional a $\text{sen}(\omega_n t + \varphi_n)$, que se reduce a $\text{sen} \varphi_n$ para $t = 0$. En consecuencia, podemos hacer $v(z, 0) = 0$ para todo t haciendo simplemente cada constante de fase φ_n igual a cero, o bien a π . Sin embargo, la constante de fase $\varphi_1 = \pi$ (por ejemplo) equivale exactamente a un signo menos operando sobre A_1 . Por lo tanto, podemos satisfacer estas condiciones iniciales si llevamos todas las constantes de fase a cero, pero permitimos que las amplitudes A_1, A_2 , etc., sean positivas o bien negativas. Así tenemos, para $v(z, 0) = 0$,

$$\psi(z, t) = A_1 \text{sen } k_1 z \cos \omega_1 t + A_2 \text{sen } k_2 z \cos \omega_2 t + \dots, \quad (38)$$

y a $t = 0$,

$$\psi(z, 0) = f(z) = A_1 \text{sen } k_1 z + A_2 \text{sen } k_2 z + \dots \quad (39)$$

Como veremos más abajo, la ecuación (29) determina las amplitudes A_1, A_2, \dots

Serie de Fourier para una función con ceros en ambos extremos. La función $f(z)$ puede ser una función muy general de z . La única condición que especificamos fue que debía constreñir la cuerda. Por lo tanto, todo lo que virtualmente requerimos de $f(z)$ es que se anule para $z = 0$ y $z = L$. También requerimos que $f(z)$ no tenga forma de “sierra” en una “pequeña” escala, puesto que se supone que nuestra función de ondas $\psi(z, t)$ es una función que varía suavemente con z . Por lo tanto, $f(z)$ debe ser razonablemente lisa para que podamos constreñir la cuerda y ésta todavía obedezca a la ecuación diferencial que obtuvimos en la aproximación “continua”. De esta manera hemos encontrado que toda función razonable $f(z)$ que se anule en $z = 0$ y L puede ser desarrollada en una serie de la forma (39), es decir, como suma de oscilaciones sinusoidales. La ecuación (39), se llama *serie de Fourier* o *desarrollo de Fourier*. Es un ejemplo especial de serie de Fourier en el sentido de que se aplica sólo a funciones $f(z)$ que se anulan en $z = 0$ y L . Sin embargo, una clase mucho más amplia de funciones puede ser expresada en desarrollos de Fourier apropiados. Encontraremos ahora esa amplia clase de funciones.

Nuestra función $f(z)$ se usaba para constreñir la cuerda y, en consecuencia, estaba definida sólo entre $z = 0$ y L . Sin embargo, las funciones $\text{sen } k_1 z$, $\text{sen } 2k_1 z$, $\text{sen } 3k_1 z$, etc., que formaban la serie infinita de la ecuación (39), están definidas para todo z desde $-\infty$ a $+\infty$. También notemos que $\text{sen } k_1 z$ es *periódica* en z con período λ_1 . Esto significa que satisface la *condición de periodicidad*, o sea, que para todo z dado, debe tener los mismos valores en z y $z + \lambda_1$ (el período λ_1 , es $2L$ en nuestro ejemplo). Notemos que la función $\text{sen } 2k_1 z$ es también periódica en z con período λ_1 (por supuesto, recorre dos ciclos en la distancia λ_1 ; es

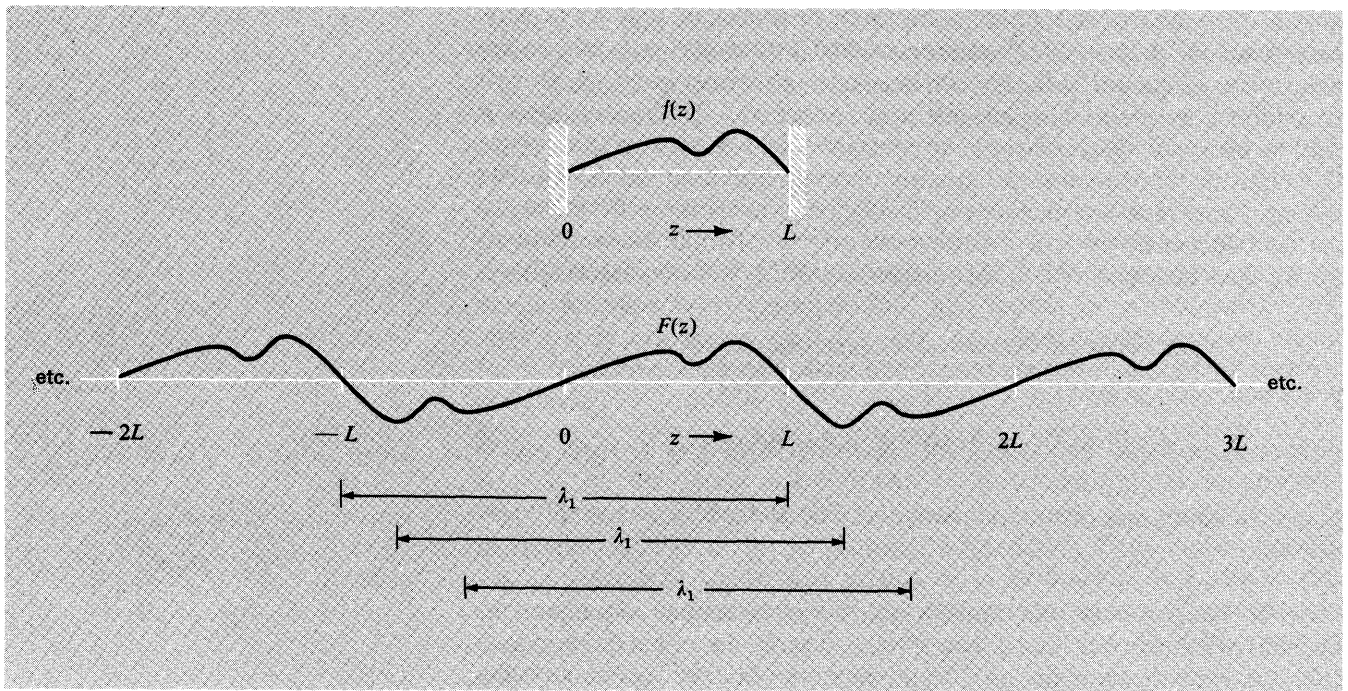


Fig. 2.5 Construcción de una función periódica $F(z)$ con período $\lambda_1 = 2L$ a partir de una función $f(z)$ que se anula en $z = 0$ y L . Note que $F(z)$ satisface la condición de periodicidad.

entonces periódica con período $\frac{1}{2}\lambda_1$, como también periódica con período λ_1). De hecho, todas las funciones sinusoidales en el desarrollo, ecuación (39), son periódicas en z con período λ_1 . En consecuencia, la expansión en sí es periódica con período λ_1 . Así, podemos ampliar la clase de funciones que tienen un desarrollo de Fourier de la forma de la ecuación (39): todas las funciones periódicas $F(z)$ con período λ_1 que se anulan en $z = 0$ y en $z = \frac{1}{2}\lambda_1$, pueden ser desarrolladas en serie de Fourier de la forma de la ecuación (39). Dada una función $f(z)$ definida sólo entre $z = 0$ y L y que se anula en esos puntos, podemos construir una función periódica que tendrá el mismo desarrollo de Fourier que $f(z)$ por el siguiente procedimiento: Entre $z = 0$ y L , hacemos que $F(z)$ coincida con $f(z)$. Entre L y $2L$ construimos $F(z)$ haciendo una “imagen especular invertida” de $f(z)$ en un “espejo” colocado en $z = L$. Ahora que hemos definido $F(z)$ entre 0 y $2L$, simplemente la repetimos en intervalos sucesivos de longitud $2L$ para definir $F(z)$ para todo z . La construcción se muestra en la Fig. 2.5.

Análisis de Fourier de una función periódica de z . Ahora ampliaremos un poco más la clase de funciones para las que podemos escribir desarrollos de Fourier, de la siguiente manera: La ecuación (39) corresponde sólo a las funciones periódicas de período λ_1 que se anulan en $z = 0$ y $\frac{1}{2}\lambda_1$. Sin embargo, la condición de que la función sea nula en $z = 0$ y $\frac{1}{2}\lambda_1$, era el resultado de nuestra particular elección de condicio-

nes de contorno, o sea que la cuerda tenga ambos extremos fijos. Sin estas condiciones de contorno particulares, habríamos obtenido soluciones para las vibraciones de la cuerda que incluirían no sólo los términos en $\sin mk_1 z$, sino también, términos en $\cos mk_1 z$. Estas funciones también son periódicas en z con período λ_1 , pero no se anulan en $z = 0$ y $\frac{1}{2}\lambda_1$. (Corresponden a vibraciones de la cuerda con extremo o extremos fijos.) Incluyéndolos en la serie, llegamos finalmente a una clase muy general de funciones para las cuales podemos escribir series de Fourier: toda función periódica (razonable) $F(z)$ con período λ_1 , es decir, las funciones tales que $F(z + \lambda_1) = F(z)$ para todo z , pueden desarrollarse en series de Fourier de la forma:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \sin n \frac{2\pi}{\lambda_1} z + B_n \cos n \frac{2\pi}{\lambda_1} z \right] \\ &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n \frac{2\pi}{\lambda_1} z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n \frac{2\pi}{\lambda_1} z \\ &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nk_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos nk_1 z. \end{aligned} \quad (40)$$

Modo de hallar los coeficientes de Fourier. El proceso de encontrar las amplitudes o *coeficientes de Fourier* B_0 , A_n y B_n (para todo n) para una función periódica dada $F(z)$, se llama *análisis de Fourier*. Le mostraremos cómo encontrar estos coeficientes

Primero hallamos B_0 como sigue: Integramos ambos miembros de la ecuación (40) sobre cualquier período completo de $F(z)$, es decir, integramos desde $z = z_1$ hasta $z = z_2$, donde z_1 es cualquier valor de z y $z_2 = z_1 + \lambda_1$. Se supone conocida la función $F(z)$; en consecuencia puede encontrarse su integral entre z_1 y z_2 que es la integral del miembro izquierdo de la ecuación (40). Ahora consideremos la integral del miembro derecho. Hay un mínimo infinito de términos y, por lo tanto, infinitas integrales a considerar. El primer término es B_0 , que da lugar a la integral

$$\int_{z_1}^{z_2} B_0 dz = B_0(z_2 - z_1) = B_0\lambda_1. \quad (41)$$

Todos los demás términos dan cero cuando integran sobre un período. Esto es porque $\sin nk_1 z$ y $\cos nk_1 z$ son tantas veces positivos como negativos en cualquier período completo y, por lo tanto, sus integrales se anulan:

$$\int_{z_1}^{z_2} \sin nk_1 z dz = 0; \quad \int_{z_1}^{z_2} \cos nk_1 z dz = 0.$$

En consecuencia hemos encontrado B_0 . Está dado por

$$B_0\lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} F(z) dz. \quad (42)$$

Ahora mostraremos cómo encontrar A_m , donde m es cualquier valor particular de n en la ecuación (40) desde 1 a infinito. El artificio es multiplicar ambos lados de la ecuación (40) por $\sin mk_1 z$, e integrar ambos miembros sobre un período completo de $F(z)$. La integral del primer miembro puede ser evaluada, ya que $F(z)$ es conocida. Considere ahora la integral del 2.º miembro. El primer término es la integral de B_0 por $\sin mk_1 z$; esta integral da cero porque incluye m períodos completos de $\sin mk_1 z$. Nos queda la integral de $\sin nk_1 z \sin mk_1 z$ y $\cos nk_1 z \sin mk_1 z$ para $n = 1, 2, \dots$. Consideremos el término particular que tiene $n = m$. El cuadrado de $\sin mk_1 z$ da un promedio $\frac{1}{2}$ integrado sobre un período de $F(z)$ de longitud λ_1 (lo que es m períodos completos de la función $\sin mk_1 z$). Esto da una contribución de $\frac{1}{2} A_m \lambda_1$ a la integral del lado derecho de la ecuación (40). La contribución de los restantes términos es cero. Vemos esto como sigue: Consideremos, por ejemplo, el integrando $\sin nk_1 z \sin mk_1 z$ para m distinto de n . Esto puede escribirse en la forma

$$\sin nk_1 z \sin mk_1 z = \frac{1}{2} \cos(n - m)k_1 z - \frac{1}{2} \cos(n + m)k_1 z. \quad (43)$$

Puesto que $n - m$ y $n + m$ son enteros, cada uno de los dos términos de la derecha en la ecuación (43) es tantas veces positivo como negativo en cualquier período completo de $F(z)$ de longitud λ_1 . En consecuencia, ambos términos integrados dan cero (excepto en el caso $n = m$ que ya hemos considerado). Análogamente, la integral de los términos de la forma $\cos nk_1 z \sin mk_1 z$ da cero debido a la identidad

$$\cos nk_1 z \sin mk_1 z = \frac{1}{2} \sin(m + n)k_1 z + \frac{1}{2} \sin(m - n)k_1 z.$$

Así, encontramos que

$$\frac{1}{2} A_m \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} \sin mk_1 z F(z) dz. \quad (44)$$

Análogamente, podemos encontrar los coeficientes B_m multiplicando ambos miembros de la ecuación (40) por $\cos mk_1 z$ e integrando sobre un período de longitud λ_1 . La única contribución no nula a la integral del lado derecho proviene del término con coeficiente B_m . De esta manera encontramos que

$$\frac{1}{2} B_m \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} \cos mk_1 z F(z) dz. \quad (45)$$

Coeficientes de Fourier. Nuestros resultados están dados por las ecuaciones (40), (42), (44) y (45) que reuniremos aquí por ser conveniente para futuras referencias:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen} mk_1 z + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos mk_1 z, \\
 B_0 &= \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) dz, \\
 A_m &= \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \operatorname{sen} mk_1 z dz, \\
 B_m &= \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \cos mk_1 z dz,
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

donde z_1 es cualquier valor de z . Las ecuaciones (46) nos dicen cómo analizar Fourier a $F(z)$, función cualquiera de z de período λ_1 .

Onda cuadrada. He aquí un ejemplo ilustrativo, el análisis de Fourier de una “onda cuadrada”. Sea $f(z)$ nula en los puntos $z = 0$ y $z = L$ y sea $+1$ para $0 < z < L$. (Esta función tiene una discontinuidad en $z = 0$ y otra en $z = L$, o sea que no satisface la superposición hecha en nuestra discusión anterior, a saber, que era lisa en todas partes. En consecuencia, no podemos razonablemente esperar que la serie de Fourier dé una representación perfecta de la onda cuadrada. Se pone de manifiesto la existencia de una pendiente abrupta aguda en $z = 0$ y en $z = L$ para toda suma parcial de la serie. A medida que se van agregando más términos, la pendiente se hace más aguda, pero la altura sobre $f(z) = 1$ no tiende a cero.)

La función periódica $F(z)$ que construimos de acuerdo con la prescripción de la Fig. 2.5, viene dada como sigue: $F(z) = 0$ para $z = 0$; $+1$ para $0 < z < L$; 0 para $z = L$; -1 para $L < z < 2L$; etc., como se muestra en la Fig. 2.6.

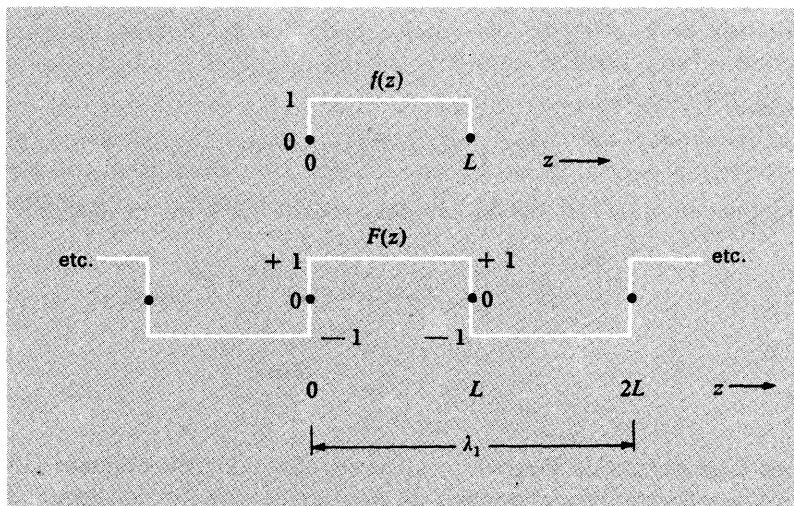


Fig. 2.6 Onda cuadrada $f(z)$. Onda cuadrada periódica $F(z)$.

Usando las ecuaciones (46), se pueden obtener fácilmente los resultados (Prob. 2.11) $B_0 = 0$; $B_m = 0$ para todo m ; $A_m = 0$ para $m = 2, 4, 6, 8 \dots$ (enteros pares); $A_m = 4/m\pi$ para $m = 1, 3, 5, 7, \dots$ (enteros impares). En consecuencia, $F(z)$ está dada por

$$\begin{aligned} F(z) &= B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos mk_1 z + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mk_1 z \\ &= \frac{4}{\pi} \left\{ \sin k_1 z + \frac{1}{3} \sin 3k_1 z + \frac{1}{5} \sin 5k_1 z + \dots \right\} \\ &= 1,273 \sin \frac{\pi z}{L} + 0,424 \sin \frac{3\pi z}{L} + 0,255 \sin \frac{5\pi z}{L} + \dots \quad (47) \end{aligned}$$

En la Fig. 2.7 se muestran la onda cuadrada $f(z)$, los primeros tres términos que contribuyen, dados por la ecuación (47), y la superposición de estos tres primeros términos. Suponga que en lugar de tratar de forzar a un "slinky" a la configuración de la función de vértices agudos $f(z)$ que hemos estado considerando, lo obligamos en el instante $t = 0$ a seguir exactamente la función

$$g(z) = 1,273 \sin \frac{\pi z}{L} + 0,424 \sin \frac{3\pi z}{L} + 0,255 \sin \frac{5\pi z}{L}. \quad (48)$$

Esto corresponde a los tres primeros términos de la ecuación (47) y está representada en la Fig. 2.7b. Soltamos el "slinky" a $t = 0$. ¿Cuál es $\psi(z, t)$? ¿Permanece constante la forma a medida que t aumenta? (Véase Prob. 2.16.)

Análisis de Fourier de una función periódica del tiempo. Suponga que tenemos una función periódica del tiempo $F(t)$ definida para todo t y de período T_1 :

$$F(t + T_1) = F(t) \text{ para cualquier } t \quad (49)$$

Suponemos que $F(t)$ puede ser desarrollada en serie de Fourier

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t, \quad (50)$$

con

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \frac{2\pi}{T_1}. \quad (51)$$

Los coeficientes de Fourier pueden ser obtenidos directamente de nuestros resultados para el análisis de Fourier de una función especial perió-

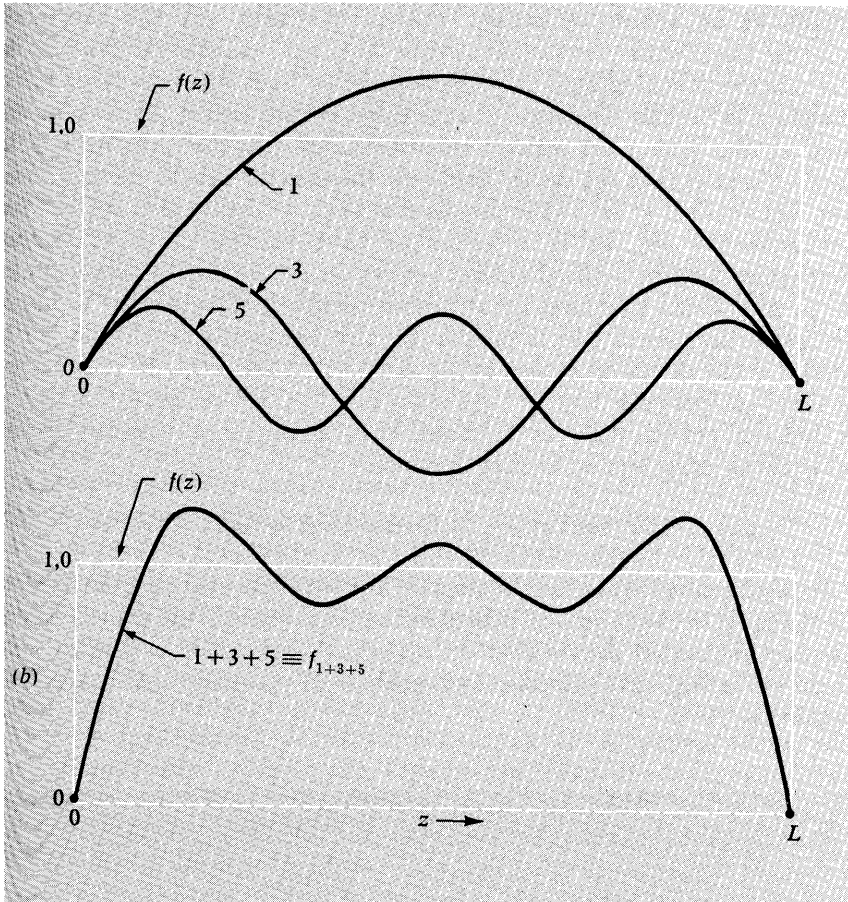


Fig. 2.7 Análisis de Fourier de la onda cuadrada $f(z)$. (a) Onda cuadrada $f(z)$ y las tres primeras contribuciones a su descomposición de Fourier. Las indicaciones 1, 3 y 5 se refieren a los modos normales 1, 3 y 5. (b) Onda cuadrada $f(z)$ y la superposición f_{1+3+5} de sus tres primeras componentes de Fourier.

dica $F(z)$, que estudiamos más arriba. El análisis matemático no puede distinguir la variable $\theta = \omega_1 t$, de la variable $\theta_1 = k_1 z$. En consecuencia, obtenemos los resultados para los coeficientes de la ecuación (50) directamente de las ecuaciones (46)

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) dt, \\ B_n &= \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) \cos n\omega_1 t dt, \\ A_n &= \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) \sin n\omega_1 t dt, \end{aligned} \quad (52)$$

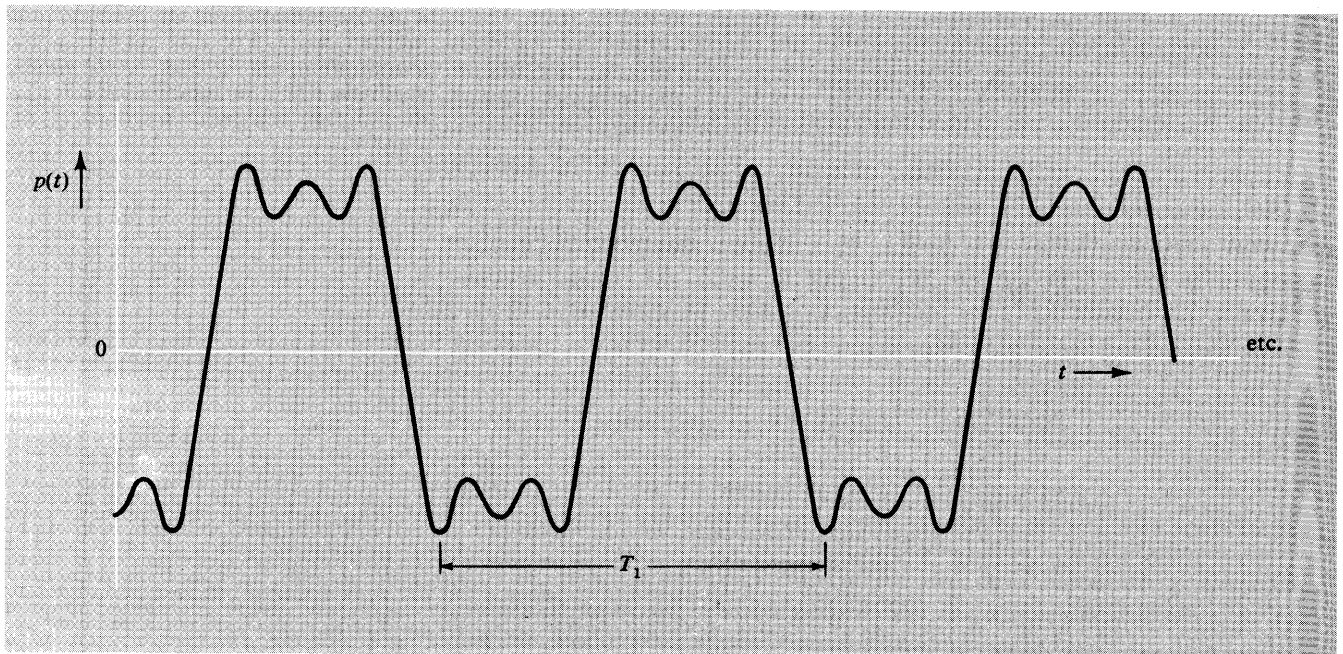
donde el tiempo t_1 , es cualquier tiempo conveniente.

Sonido de un acorde de piano. Ilustraremos esto con una superposición de ingredientes conocidos, mejor que por análisis de Fourier de una función conocida $F(t)$. Supongamos que se tiene una cuerda de piano afinada a la “escala científica” (véase Experimento casero 2.6 si se quiere conocer más acerca de escalas musicales). Sea $\nu_1 = 128$ cps. Ésta es la nota C, una octava (es decir, doble en frecuencia) debajo de la C central. Sea ahora $\nu_3 = 3\nu_1 = 384$ cps. Es ésta la G, arriba de la C central. Sea $\nu_5 = 5\nu_1 = 640$ cps. Es la E arriba de la G, arriba de la C central. Golpeemos las tres notas al mismo tiempo. Se oye un bonito acorde abierto. Si se golpean exactamente al mismo tiempo y si ajustamos la fuerza del golpe de manera que la presión de aire producida en el oído por la cuerda C128 es (en unidades apropiadas) $1,273 \text{ sen } 2\pi\nu_1 t$, la presión por la G384 es $0,424 \text{ sen } 2\pi\nu_3 t$, y la presión por la E640 es $0,255 \text{ sen } 2\pi\nu_5 t$, entonces la presión de aire total en su oído $p(t)$ es la superposición

$$p(t) = 1,273 \text{ sen } 2\pi\nu_1 t + 0,424 \text{ sen } 2\pi\nu_3 t + 0,255 \text{ sen } 2\pi\nu_5 t. \quad (53)$$

Pero la ecuación (53) es muy semejante a la (48), que aparece gráficamente en la Fig. 2.7b. Todo lo que hemos hecho para obtener un gráfico de $p(t)$ ha sido el cambio de variable de $k_1 z$ a $\omega_1 t$ y extender el gráfico mostrado en la Fig. 2.7b. Entonces obtenemos el resultado que muestra la figura 2.8.

Fig. 2.8 Presión medida en el oído debida a la superposición de las notas C128, G384 y E640 con las amplitudes relativas y fases de la ecuación (53). El período T_1 es $(1/128)$ seg.



Si no golpeamos todas las teclas exactamente al mismo tiempo (dentro de una precisión de $1/128$ seg), las fases relativas de las tres notas no serán las de la ecuación (53), y la superposición no tendrá el aspecto de la Fig. 2.8. ¡Pero el oído *no* nota esto! El oído (más el cerebro) realiza un análisis de Fourier sobre la presión total. Esto debe ser así, puesto que se “oyen” las notas individuales del acorde y se reconocen. Pero la información acerca de la fase relativa de las notas es aparentemente descartada o quizás no se obtiene. De otra manera, se notaría una diferencia en el sonido según las fases relativas.

El sistema detector de tonos en el oído se llama *membrana basilar*. Está encerrado en un órgano de forma de espiral, lleno de fluido, en el oído interno, llamado *caracol*. El caracol está acoplado mecánicamente al tímpano. El extremo de la membrana basilar más cercano al tímpano resuena a cerca de los 20 000 cps; el extremo más alejado del tímpano resuena a cerca de los 20 cps. En consecuencia, el rango máximo de frecuencias audibles abarca aproximadamente desde 20 cps a 20 kc. El nervio del caracol tiene sensores en la membrana basilar y “transduce” las vibraciones mecánicas en señales eléctricas que son enviadas al cerebro, donde son de alguna manera procesadas para convertirse en nuestras sensaciones auditivas. Haciendo el experimento de golpear la cuerda más y más y viendo que nuestra sensación es la misma [a pesar de que $p(t)$ debe tener una forma muy diferente según las fases relativas], hemos aprendido que en algún lugar se pierde la información acerca de la fase relativa de las vibraciones de las diferentes partes de la membrana basilar. Quizás esta información no es nunca recogida. Quien sabe si el transductor es *un detector de ley cuadrática*, es decir, uno que entrega una señal eléctrica proporcional al cuadrado de la amplitud de vibración de la membrana. O tal vez la señal nerviosa lleva información de fase [es decir, tal vez la señal da $\psi(z,t)$ en lugar de $\psi^2(z,t)$, pero el cerebro no usa la información de fase, o sea no superpone las $\psi(z,t)$ provenientes de señales nerviosas diferentes. Aparentemente, no hay mucho valor de supervivencia en la información sobre fases; de otra manera, seguramente habríamos adquirido algún mecanismo detector de fases en nuestro desarrollo evolutivo.

Otras condiciones de contorno. En el problema general de vibraciones transversales de una cuerda continua no es necesario que la cuerda esté fija en ambos extremos. Uno o ambos extremos pueden estar “libres”, por lo menos cuando se trate con oscilaciones transversales. La tensión y configuración de equilibrio pueden ser mantenidas por un vínculo en forma de anillo sin masa ni rozamiento, deslizándose sobre una varilla fija orientada en la dirección x , es decir, transversal al eje de equilibrio de la cuerda (que siempre tomamos en la dirección z). Los modos normales tendrán entonces configuraciones diferentes de aquellas que obtuvimos para la cuerda con ambos extremos fijos. Las formas de los modos siguen siendo funciones sinusoidales de z , como lo indicado por

la ecuación (19). La relación de dispersión entre frecuencia y longitud de onda sigue siendo la dada por la ecuación (22). De hecho, la solución general para el desplazamiento de la cuerda en un modo particular, es independiente de las condiciones de contorno. Fue solamente en la discusión que seguía a la ecuación (23), que especializamos la solución al caso de la cuerda fija en $z = 0$ y L .

En un extremo libre de una cuerda vibrante no hay (por definición) ninguna fuerza transversal ejercida sobre el extremo de la cuerda, es decir, la varilla sin fricción no ejerce fuerza transversal sobre el anillo. Entonces (por la tercera ley de Newton), la cuerda y el anillo sin fricción no ejercen fuerzas transversales sobre la varilla. Esto significa que la cuerda debe ser horizontal. *La pendiente de la cuerda en un extremo libre es cero en todo momento.* Si tratamos de ejercer una fuerza transversal sobre el extremo libre de una cuerda, ésta se mueve de forma tal de reducir la fuerza a cero, así como está siendo aplicada. Nunca se hace distinta de cero y la cuerda permanece horizontal, pero, por supuesto, en movimiento. (Esto nos demuestra que no se puede empujar algo que rehúsa echarse atrás, pero sí se puede moverlo donde le plazca.)

En la Figura 2.9 mostramos los modos de una cuerda con un extremo fijo y el otro libre. Hemos indicado los modos sucesivos de acuerdo al número de cuartos de longitud de onda contenidos en la longitud de la cuerda L . Obsérvese que están ausentes las armónicas pares con frecuencias $2\nu_1$, $4\nu_1$, etc. El análisis de Fourier de funciones $f(z)$ con valor cero en $z = 0$ y pendiente cero en $z = L$ se discuten en el Prob. 2.29.

Calidad del tono según el método de excitación. Cuando una cuerda de piano es golpeada por su martillo, son excitadas hasta cierto grado la fundamental (ν_1), la segunda armónica u octava ($2\nu_1$), la octava más una quinta ($3\nu_1$) y la segunda octava ($4\nu_1$), la segunda octava más una tercera mayor ($5\nu_1$), y la segunda octava más un quinto ($6\nu_1$), así como también armónicas más altas del tono fundamental ν_1 . La contribución y fase de cada componente de Fourier (cada armónica) depende de la velocidad y configuración inicial de toda la cuerda en el instante inmediato posterior al golpe del martillo. Éstas dependen en gran parte de la ubicación del martillo, o sea de su distancia al extremo de la cuerda. Ningún modo que tenga un nodo (un punto en reposo permanente) allí donde es golpeada la cuerda, será excitado por el toque del martillo, puesto que éste imparte una velocidad inicial a la parte de la cuerda que golpea. Por ejemplo, si la cuerda se hace sonar en su centro, los modos con un nodo en el centro no se excitan. Una inspección de la Fig. 2.3 muestra que en ese caso faltan todas las armónicas pares. En consecuencia, si hacemos sonar la cuerda para C128 en el centro, esperaremos que vibre en una superposición de C128, G384, E640, etc. La "calidad de tono" es entonces apreciablemente diferente de la producida cuando la cuerda es golpeada en un extremo y vibra en una superposición de C128, C256, G384, C512, E640, G768, etc.

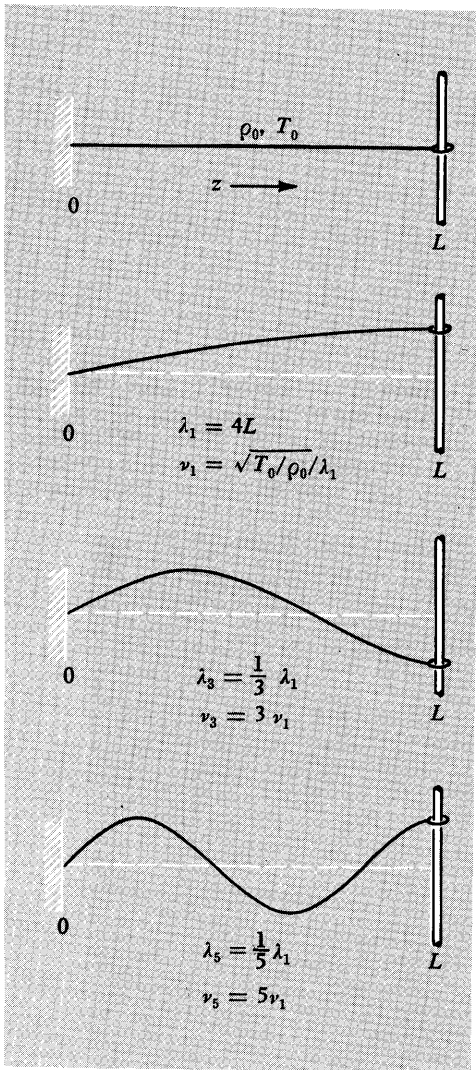


Fig. 2.9 Modos de una cuerda continua con un extremo fijo y el otro libre.

Los modos de una cuerda homogénea forman un conjunto completo de funciones. Comenzando con una cuerda fija en ambos extremos, descubrimos que cualquier función razonable $f(z)$ definida entre $z = 0$ y $z = L$ y nula en $z = 0$ y L puede ser desarrollada en la serie de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senn} k_1 z; \quad k_1 L = \pi. \quad (54)$$

Por esta razón, las funciones $\operatorname{sen} nk_1 z$ con $n = 1, 2, 3, \dots$, se dice que forman un *conjunto completo* de funciones [con respecto a funciones $f(z)$ que se anulan en $z = 0$ y L]. Se define a un conjunto completo de funciones como aquel tal que *cualquier* función (razonable) $f(z)$ puede ser escrita como superposición de funciones del conjunto, eligiendo coeficientes constantes adecuados.

Cuerda inhomogénea. Aparte de las funciones sinusoidales que constituyen una serie de Fourier, ¿hay otros conjuntos completos? ¡Sí, hay infinitos conjuntos! Podemos ver esto como sigue. Suponga que la cuerda no es homogénea, o sea, que su densidad de masa o su tensión (o ambas) es una función continua de la posición z . (Un ejemplo de “cuerda” con densidad de tensión variable es un “slinky” colgado verticalmente con sus extremos superior e inferior fijos. La tensión en la base es menor que arriba en el peso Mg , donde M es la masa total del “slinky”. Entonces, la ecuación de movimiento de un pequeño segmento de cuerda no nos conduce nuevamente a la ecuación de ondas clásica, que es

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}.$$

En cambio, si tenemos en el equilibrio tensión $T_0(z)$ y densidad $\rho_0(z)$ podemos fácilmente encontrar (Prob. 2.10) que tenemos

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[T_0(z) \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \right], \quad (55)$$

que se reduce a la ecuación de ondas clásica sólo si $T_0(z)$ y $\rho_0(z)$ son constantes, independientes de z . En un modo normal de esta cuerda *inhomogénea*, al igual que en un modo de la cuerda homogénea, toda parte de la cuerda vibra en movimiento armónico con la misma frecuencia y constante de fase

$$\psi(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi). \quad (56)$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \varphi), \quad (57)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \cos(\omega t + \varphi) \frac{dA(z)}{dz}. \quad (58)$$

Sustituyendo éstas en la ecuación (55) y simplificando el factor común $\cos(\omega t + \varphi)$ se obtiene la ecuación para la forma del modo:

$$\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{d}{dz} \left[T_0(z) \frac{dA(z)}{dz} \right] = -\omega^2 A(z). \quad (59)$$

Características de sistemas homogéneos dado por la forma sinusoidal de ondas estacionarias. La forma del modo está dada por $A(z)$ que se obtiene resolviendo la ecuación diferencial (59) con las condiciones de contorno apropiadas: $A(z) = 0$ en $z = 0$ y L . La función $A(z)$ no tiene forma sinusoidal salvo que T_0 y ρ_0 sean constantes. En consecuencia, las oscilaciones *sinusoidales* en el espacio son solamente características de la forma de los modos normales de un sistema homogéneo.

Conjunto completo de funciones formados por los modos de una cuerda inhomogénea. Vamos a referir, sin comprobación, las características de los modos normales para una cuerda inhomogénea con extremos fijos en $z = 0$ y L . El modo más bajo corresponde a una solución de la ecuación (59), $A_1(z)$, que se anula sólo para $z = 0$ y L . (Esto se parece a una semilongitud de onda para una “onda sinusoidal distorsionada”, que no tiene modos entre 0 y L .) Este modo tiene frecuencia ω_1 . El próximo modo tiene *un nodo* entre $z = 0$ y L y entonces se asemeja a una longitud de onda completa de la onda sinusoidal distorsionada. Tiene una frecuencia característica ω_2 . El m -ésimo modo tiene $m - 1$ nodos entre $z = 0$ y L y se parece a m semilongitudes de onda de una onda sinusoidal distorsionada. Hay infinitos modos (para una cuerda continua). Las funciones $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$, ..., que dan la dependencia espacial de los modos, forman un conjunto completo respecto a cualquier función razonable $f(z)$ que se anule en $z = 0$ y L . Se define una función razonable $f(z)$ como aquella que pueda ser seguida por un “slinky” o una cuerda, sin violar ninguna de nuestras suposiciones. En ese caso podemos hacer un templado con la forma de $f(z)$, colocar la cuerda inhomogénea en el templado y quitarla del reposo a $T = 0$. La cuerda vibrará entonces en una superposición infinita de sus modos:

$$\psi(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z) \cos \omega_m t \quad (60)$$

Entonces, a $t = 0$ tenemos

$$\psi(z, 0) = f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z). \quad (61)$$

La ecuación (61) muestra que $f(z)$ (sujeta a nuestras suposiciones) puede ser desarrollada en el conjunto de funciones $A_m(z)$. Así, $A_m(z)$ forma un conjunto completo de funciones. Este argumento es exactamente análogo al que nos convenció de que las funciones sinusoidales de una serie de Fourier forman un conjunto completo con respecto a funciones $f(z)$ que se anulan en $z = 0$ y L .

Autofunciones. Hay un número infinito de maneras de construir una cuerda con densidad de masa y tensión no uniformes. Por lo tanto, hay infinitos conjuntos completos $A_m(z)$ diferentes. Las funciones sinusoidales de z no son entonces el único conjunto completo de funciones para desarrollar funciones $f(z)$. Pero son un conjunto muy importante, puesto que son muy sencillas y fáciles de entender. Más aún, dan la forma de los modos siempre que tengamos un sistema espacialmente *homogéneo*. Cuando esto no ocurre, las funciones sinusoidales no son muy útiles. En su lugar se trata de usar las funciones apropiadas $A_m(z)$ que corresponden a los modos normales del sistema. Estas funciones $A_m(z)$, o, más en general, $A_m(x, y, z)$ para un sistema tridimensional, se denominan *autofunciones*. Dan la dependencia *espacial* de los modos normales.

Para toda posición x, y, z , la dependencia *temporal* de un modo está siempre dada por $\cos(\omega t + \varphi)$. En consecuencia, no es esencialmente más que las pequeñas oscilaciones simultáneas (lo suficientemente pequeña como para dar ecuaciones lineales) de todas las partes móviles, oscilando todas éstas con la misma frecuencia y constante de fase. Cuando todo el sistema está en un modo único, pulsa y vibra como un gran oscilador. Cada modo tiene su propia "forma", es decir, su propia autofunción. La relación entre la frecuencia y forma del modo se llama relación de dispersión, $\omega(k)$ cuando la forma de las autofunciones es sinusoidal. Cuando no son sinusoidales no hay, por supuesto, cosas tales como longitud de onda o número de onda k . Entonces, la relación entre la forma y frecuencia del modo no es usualmente denominada como "relación de dispersión".

No profundizaremos más en el estudio de sistemas inhomogéneos. Cuando estudiemos física cuántica, veremos las autofunciones (formas) de las ondas estacionarias de de Broglie en sistemas con energía potencial no constante. Son análogas a las ondas estacionarias de una cuerda inhomogénea. Vemos el Tema suplementario 2.

2.4 Modos de un sistema no continuo con N grados de libertad

En la Sección 2.2 consideramos una cuerda continua, que es un sistema con infinitos grados de libertad. Ningún sistema mecánico real tiene un

número infinito de grados de libertad, y nosotros estamos interesados en sistemas reales. En esta sección encontraremos la solución exacta para los modos de una cuerda uniforme con N cuentas y extremos fijos. En el límite para N tendiendo a infinito (manteniéndose la longitud L finita), encontraremos las ondas estacionarias estudiadas en la Sección 2.2. Nuestro propósito, sin embargo, no es meramente éste. Más que ello, encontraremos que, pasando el caso límite de una cuerda continua, descartamos una parte muy interesante del comportamiento del sistema. Recuerde que para usar la función lisa $\psi(z,t)$ para describir el desplazamiento cuando N es enorme pero no infinito, tuvimos que prohibir la consideración de los modos más altos, es decir, $m = N$, $N-1$, $N-2$, etc. Nos debimos restringir a valores de m mucho menores que N . Esto se debe a que el modo N tiene la configuración en zigzag mostrada en la Fig. 2.1 y, por lo tanto, las cuentas vecinas no tienen aproximadamente igual desplazamiento.

El resultado nuevo más interesante que obtendremos en esta sección es que la ley de dispersión que obtuvimos para la cuerda *continua*, a saber, " ω igual a una constante por k ", en general no se mantiene. Esta relación entre frecuencia y longitud de onda, que implica que la frecuencia se hace doble cuando la longitud de onda se divide por la mitad (esto es, que da las relaciones de frecuencia armónicas), es una aproximación que se cumple para la cuerda flexible sólo en el límite continuo. El hecho de que no se cumple para una cuerda "aterronada" (pero de otro modo, uniforme) ejemplifica un interesante fenómeno físico llamado *dispersión*. Un medio que satisfaga la relación de dispersión sencilla dada más arriba, " ω igual constante por k ", se llama *no dispersivo* (para ondas apropiadas). Si se cumple cualquier otra relación de dispersión, el medio se denomina *dispersivo*. Ahora considere el ejemplo:

Ejemplo 1: Oscilaciones transversales de una cuerda con cuentas

Se muestra el sistema en la Fig. 2.10. Hay N cuentas. La cuerda está fija en $z = 0$ y L . Las cuentas están situadas en $z = a, 2a, \dots, Na$. La longitud total L es $(N+1)a$. Cada cuenta tiene masa M . Los segmentos de cuerda (o de resorte) son idénticos. No tienen masa y cumplen exactamente la ley de Hooke. La tensión de equilibrio es T_0 . Si los resortes (cuerdas) satisfacen la aproximación del "slinky" (tensión proporcional a la longitud), las oscilaciones pueden tener amplitud arbitrariamente grande y todavía darnos ecuaciones de movimiento lineales. Si los resortes no son "slinkies", nos limitaremos a oscilaciones de amplitud pequeña para tener ecuaciones lineales.

Ahora consideremos la configuración general mostrada en la figura 2.11. [No es completamente general, dado que estamos considerando solamente oscilaciones transversales en la dirección x . Más tarde consideremos oscilaciones longitudinales a lo largo de z . El movimiento ge-

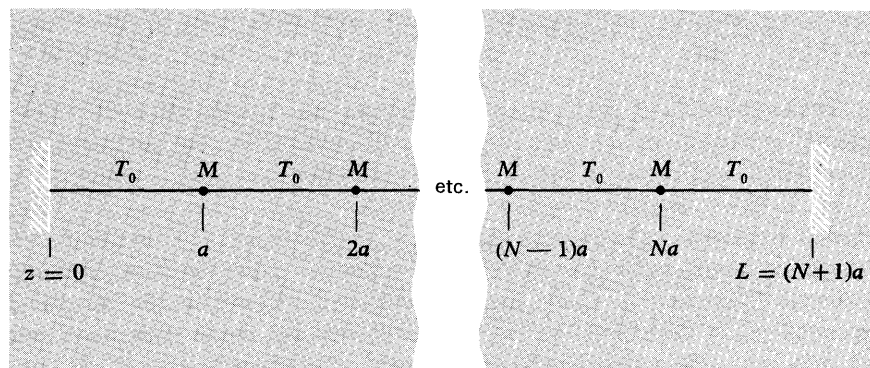


Fig. 2.10 Configuración de equilibrio de una cuerda con cuentas.

neral es, por supuesto, una superposición de oscilaciones longitudinales según z y transversales según x e y .] El desdoblamiento de la cuenta n hacia arriba (en la figura) de su posición de equilibrio es $\psi_n(t)$, con $n = 1, 2, 3, \dots, N-1, N$. Fijamos nuestra atención en una cuenta arbitraria n y sus vecinas $n-1$ (a la izquierda) y $n+1$ (a la derecha).

Ecuación de movimiento. Necesitamos la ecuación de movimiento para la cuenta n . Ya hemos resuelto un problema muy similar a éste (en la Sec. 1.2, para un grado de libertad y en la Sec. 1.4 para dos). En consecuencia, le dejamos para demostrar que, ya sea para la aproximación "slinky" o la de pequeñas oscilaciones, la ley de Newton aplicada al movimiento de la cuenta n da

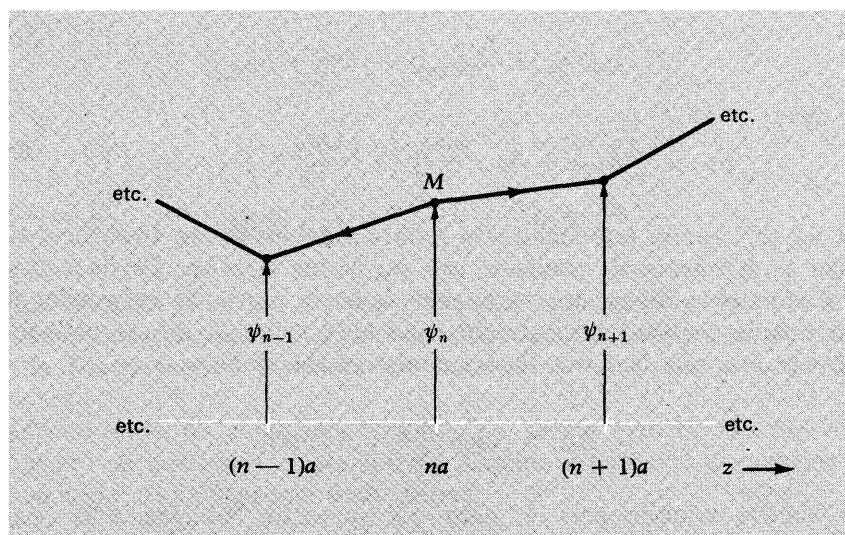


Fig. 2.11 Configuración general de una cuerda con cuentas para oscilaciones transversales en la dirección x .

$$M \frac{d^2 \psi_n(t)}{dt^2} = T_0 \left[\frac{\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)}{a} \right] - T_0 \left[\frac{\psi_n(t) - \psi_{n-1}(t)}{a} \right]. \quad (62)$$

La ecuación (62) es perfectamente general; se cumple para un movimiento arbitrario del sistema oscilando libremente, o sea, para una superposición arbitraria de los N modos diferentes

Modos normales. Queremos encontrar las frecuencias y configuraciones de los modos individuales. Para ello suponemos que tenemos un modo único de frecuencia ω . Cada cuenta oscila armónicamente con la misma frecuencia ω y constante de fase φ . La forma del modo está dada por las relaciones de amplitud de las cuentas. Designemos con A_n la amplitud de vibración para la cuenta n en el modo que estamos considerando. Entonces tenemos, en un modo único,

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi); \psi_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi); \dots; \\ \psi_{n-1}(t) &= A_{n-1} \cos(\omega t + \varphi); \psi_n(t) = A_n \cos(\omega t + \varphi); \\ \psi_{n+1}(t) &= A_{n+1} \cos(\omega t + \varphi); \dots \end{aligned} \quad (63)$$

debido a la ecuación (63), tenemos

$$\frac{d^2 \psi_n(t)}{dt^2} = -\omega^2 \psi_n(t) = -\omega^2 A_n \cos(\omega t + \varphi). \quad (64)$$

Use ahora la ecuación (64) en el lado izquierdo de la (62), y las ecuaciones (63) en el derecho. Luego simplifique el factor común dependiente del tiempo $\cos(\omega t + \varphi)$. Esto da

$$-M\omega^2 A_n = \frac{T_0}{a} (A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1});$$

es decir,

$$A_{n+1} + A_{n-1} = A_n \left(2 - \frac{Ma}{T_0} \omega^2 \right). \quad (65)$$

La Ec. (65) parece formidable. Da la forma del modo con frecuencia angular ω . Resolvámosla mediante una suposición atrevida. Estamos guiados en nuestra búsqueda por nuestra solución previa de los modos de una cuerda continua con extremos fijos en $z = 0$ y L . En ese problema encontramos que la forma de los modos estaba dada por

$$A(z) = A \sin \frac{2\pi z}{\lambda} = A \sin kz. \quad (66)$$

Nuestra solución para A_n debe, por supuesto, reducirse a la ecuación (66) en el límite para infinitas cuentas (límite continuo). Intente-

mos una solución, obtenida haciendo simplemente $z = na$ en la ecuación (66):

$$A_n = A \operatorname{sen} \frac{2\pi na}{\lambda} = A \operatorname{sen} kna. \quad (67)$$

Entonces

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A \operatorname{sen} k(n+1)a = A \operatorname{sen} (kna + ka) \\ &= A(\operatorname{sen} kna \cos ka + \cos kna \operatorname{sen} ka). \\ A_{n-1} &= A \operatorname{sen} k(n-1)a = A \operatorname{sen} (kna - ka) \\ &= A(\operatorname{sen} kna \cos ka - \cos kna \operatorname{sen} ka). \\ A_{n+1} + A_{n-1} &= 2A \operatorname{sen} kna \cos ka = 2A_n \cos ka \end{aligned} \quad (68)$$

Reemplazando la ecuación (68) en la (65), obtenemos

$$2A_n \cos ka = A_n \left(2 - \frac{Ma}{T_0} \omega^2 \right). \quad (69)$$

Relación de dispersión exacta para una cuerda con cuentas. La ecuación (69) se supone válida para toda cuenta n , independiente de que A_n sea nula para esa cuenta particular n en un modo particular. En consecuencia, podemos tomar n correspondiendo a una cuenta que no está en un nodo, o sea, con A_n distinto de cero. Luego simplificamos A_n y obtenemos la condición que nuestra búsqueda de solución encontrará que es realmente tal:

$$2 \cos ka = 2 - \frac{Ma}{T_0} \omega^2,$$

es decir,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{2T_0}{Ma} (1 - \cos ka) \\ &= \frac{2T_0}{Ma} \left[1 - \left(\cos^2 \frac{ka}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{ka}{2} \right) \right], \\ \omega^2 &= \frac{4T_0}{Ma} \operatorname{sen}^2 \frac{ka}{2} = \frac{4T_0}{Ma} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi a}{\lambda}. \end{aligned} \quad (70)$$

La ecuación (70), que relaciona frecuencia con longitud de onda (o número de onda) para un modo con frecuencia angular ω , es la relación de dispersión para la cuerda con cuentas.

Condiciones de contorno. Todavía no hemos especificado las condiciones de contorno completamente. Cuando escribimos la ecuación (67) en lugar de la expresión más general

$$A_n = A \operatorname{sen} kna + B \cos kna, \quad (71)$$

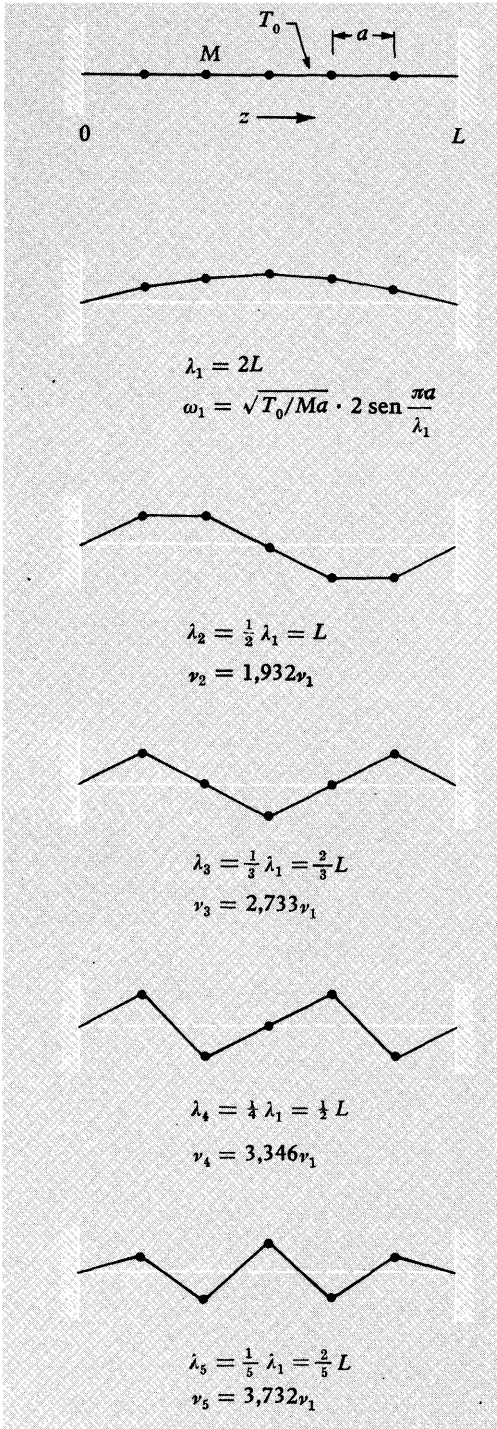


Fig. 2.12 Modos de una cuerda con cinco cuentas.

ya habíamos satisfecho la condición de contorno en $z = 0$, o sea, que el desplazamiento de la cuerda sea nulo para cualquier modo. Haciendo $z = na = 0$ en la ecuación (71), y haciendo $A_0 = 0$ se obtiene $B = 0$. Todavía debemos ampliar con la condición de contorno en $z = L$, es decir, que allí también sea cero el desplazamiento de la cuerda. La pared en $z = L$ corresponde a la “cuenta fija $N + 1$ ”. En consecuencia, necesitamos que sea $A_{N+1} = 0$:

$$A_{N+1} = A \sin k(N + 1)a = A \sin kL = 0. \quad (72)$$

Hay N posibles soluciones para la ecuación (72). Cada solución corresponde a un modo único m , con $m = 1, 2, \dots, N$. Numeramos los modos de forma que $m = 1$ tenga la longitud de onda más larga. En consecuencia tenemos

$$k_1 L = \pi, \quad k_2 L = 2\pi, \quad \dots, \quad k_m L = m\pi, \quad \dots, \quad k_N L = N\pi. \quad (73)$$

La razón por la que sólo hay N soluciones [los modos especificados por la ecuación (73)] es que el último término de la sucesión de la ecuación (73) corresponde a una configuración completamente en zigzag: comenzando en $z = 0$, el primer segmento va hacia arriba hasta la primera cuenta, el segundo va hacia abajo hasta la cuenta 2, ..., el segmento $N + 1$ va hacia abajo (o arriba) desde la cuenta N a la pared. La ecuación (72) tiene las soluciones adicionales $k_{N+1}L = (N + 1)\pi$, $k_{N+2}L = (N + 2)\pi$, etc., pero haciendo todo el zigzag que implican tales soluciones, requiere más segmentos de cuerda que los que tenemos.

La ecuación (65) para la forma de los modos fue obtenida sin considerar condiciones de contorno. (La Fig. 2.11 no contiene condiciones de contorno.) La solución más general de esta ecuación está dada por la ecuación (71), con B/A y k determinadas por las condiciones de contorno. Si se sustituye la ecuación (71) en la (65), se encuentra la relación de dispersión ecuación (70), independiente de las condiciones de contorno, o sea, independiente de los valores de A , B y k , como puede fácilmente comprobarse (Prob. 2.19). Para nuestras condiciones de contorno particulares (cuerda fija en $z = 0$ y L), obtenemos las configuraciones de los modos de la ecuación (72), con k_m dado por la (73). Entonces, las frecuencias ω_m están dadas por la ecuación (70).

Obsérvese que las configuraciones de los modos dadas por la ecuación (73) son exactamente las mismas que obtuvimos para la cuerda continua, con la única diferencia de que en aquel caso teníamos $N = \infty$ y en consecuencia no había un modo de altura máxima. También, para la cuerda con cuentas, los segmentos son rectos y no siguen la función sinusoidal que pasa por las cuentas.

Ilustramos los modos mostrando el caso $N = 5$ en la Fig. 2.12. En la Fig. 2.13 se muestra en forma de gráficas la relación de dispersión dada por la ecuación (70).

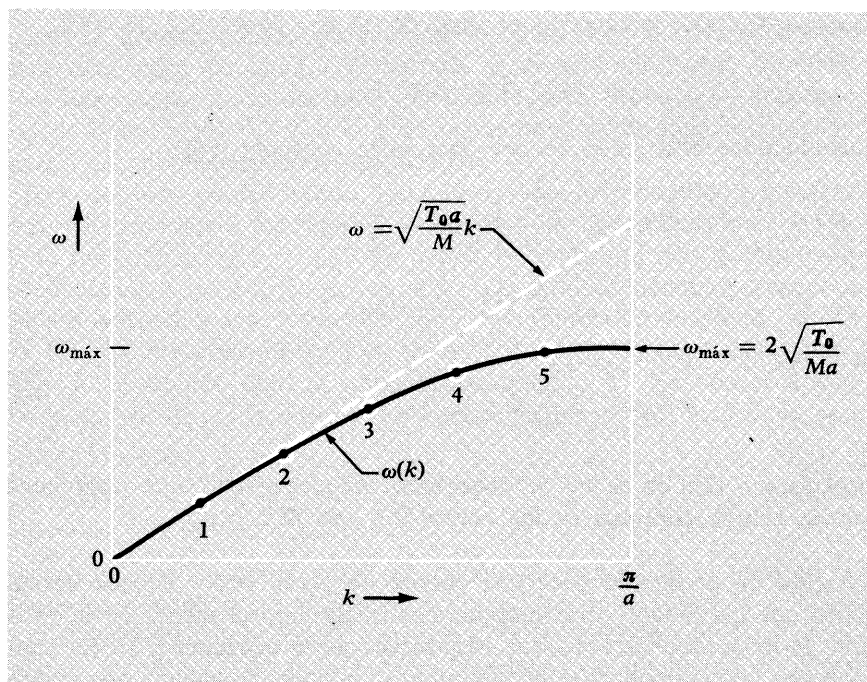


Fig. 2.13 Relación de dispersión para la cuerda con cuentas. Los cinco puntos indicados corresponden a los cinco modos de una cuerda de cinco cuentas con ambos extremos fijos. Condiciones de contorno diferentes o un número de cuentas distinto darían puntos diferentes en el mismo diagrama.

$$\omega(k) = 2 \sqrt{\frac{T_0}{Ma}} \sin \frac{ka}{2}. \quad (74)$$

Los cinco puntos indicados dan k y ω para los cinco modos de la cuerda con cinco cuentas y con ambos extremos fijos. Si hubiera un número diferente de cuentas o diferentes condiciones de contorno (por ejemplo, un extremo libre en $z = L$), los puntos que representan los modos caerían en lugares diferentes de la misma curva $\omega(k)$. En consecuencia, la Fig. 2.13 vale para *toda* cuerda con cuentas.

Límite continuo o de longitud de onda larga. En la aproximación continua supusimos un número infinito de cuentas en la región entre $z = 0$ y $z = L$. En consecuencia, la separación entre cuentas a tiende a cero. Es interesante fijarse en las propiedades de nuestra relación de dispersión exacta, ecuación (74), para separación entre cuentas a , muy pequeña pero no *exactamente* cero, para ver que la relación de dispersión se aproxima a la de una cuerda continua. Tenemos que saber qué queremos decir con la palabra “pequeña”, es decir, ¿pequeña con respecto a qué? La aproximación continua es buena si el espacio entre cuentas a es pequeño comparado con la longitud de onda λ :

$$a \ll \lambda; \quad ka = 2\pi \frac{a}{\lambda} \ll 1.$$

Usamos ahora el desarrollo en serie de Taylor [Apéndice, ec. (4)].

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

Introducimos esta serie con $x = \frac{1}{2}ka$ en la ecuación (74)

$$\begin{aligned}\omega(k) &= 2 \sqrt{\frac{T_0}{Ma}} \left[\frac{1}{2}ka - \frac{1}{48}(ka)^3 + \dots \right] \\ &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M}} k \left[1 - \frac{1}{24}(ka)^2 \dots \right],\end{aligned}$$

es decir,

$$\omega(k) \approx \sqrt{\frac{T_0 a}{M}} k. \quad (75)$$

La ecuación (75) es la ley de dispersión “no dispersiva” que obtuvimos para la cuerda continua en la Sección 2.3, con $M/a = \rho_0$.

Relación de dispersión para una cuerda de piano real. Hemos descubierto que los modos para una cuerda discontinua no satisfacen la relación de dispersión de ondas no dispersivas de la ecuación (75). En consecuencia, esperamos que los sobretonos de una cuerda de piano, por ejemplo la cuerda con tono fundamental C128, no están dados exactamente por la octava C256, duodécima G384, doble octava C512, etc. Esto es correcto; no están dados así. De acuerdo con la ecuación (74) o, más fácilmente, su gráfica en la Fig. 2.13, un aumento en k no produce un aumento proporcional en frecuencia, sino algo menor. En consecuencia, puede esperar que los sobretonos de la cuerda de piano estén levemente “desentonados” con respecto a las predicciones de la teoría de la cuerda continua, o sea, puede esperar que la segunda armónica tenga $\nu_2 < 256$, la tercera $\nu_3 < 384$, etc. ¡Esto es incorrecto! ¡Los sobretonos de una cuerda de piano no son desentonados; son *exactos* respecto a la simple producción de “sobretonos armónicos” de la ecuación (75)! Esto ocurre porque, a pesar de que el modelo de una cuerda perfectamente flexible y continua no es una descripción perfecta de una cuerda de piano, tampoco lo es el modelo de una cuerda con cuentas. De hecho, el modelo de cuerda con cuentas es peor que el de cuerda continua, puesto que el resultado de este último da una “corrección” ¡con el signo equivocado! El problema con el modelo de cuerda continua para una cuerda de piano, no es que necesite tener algunas cuentas, sino que una cuerda de piano real no es perfectamente flexible. Cuando la doblamos trata de volver a ponerse recta, aun cuando no haya una tensión ayudándola a hacerlo. Por consiguiente, la fuerza restauradora sobre un pequeño segmento curvo (es decir, la fuerza que tiende a mantener la recta en el equilibrio) es levemente mayor que la predicha por el modelo “completamente flexible”, dada por $\omega^2 = \text{fuerza restauradora por}$

unidad de desplazamiento por unidad de masa. Los modos más altos tienen longitudes de onda más cortas, de manera que están torcidos. La rigidez es, por lo tanto, más importante para los modos altos que para los bajos, y así la frecuencia aumenta *más rápido* que lo esperado a partir del modelo de la cuerda flexible.

Hay un interesante “punto final” para esta explicación. La fuerza restauradora debida a la tensión y la debida a la rigidez aumentan con k . Por lo tanto si la rigidez juega un papel relativamente más grande para los valores más altos de k que para los menores, la fuerza restauradora debida a la rigidez debe aumentar con k más rápidamente que la debida a la tensión. Esta última es proporcional a k^2 . La fuerza restauradora debido a la rapidez aparece como proporcional a k^4 . En consecuencia, la relación de dispersión para una cuerda de piano real está dada por

$$\omega^2 \approx \frac{T_0}{\rho_0} k^2 + \alpha k^4, \quad (76)$$

donde α es una constante positiva debida a la rigidez. Si el término de rigidez fuera también proporcional a k^2 , todavía tendríamos la relación de dispersión “no dispersiva”, ecuación (75) meramente con T_0/ρ_0 reemplazado por $(T_0/\rho_0) + \alpha$. Entonces las relaciones de frecuencia seguirían siendo las “armónicas” $\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$, etc. Consideraremos ahora más ejemplos:

Ejemplo 2: Oscilaciones longitudinales de un sistema de resortes y masas

Éste es un ejemplo importante, puesto que más adelante nos proveerá de un modelo muy simple para ayudarnos a comprender las ondas de sonido. (Las ondas de sonido consisten en vibraciones longitudinales, es decir, las vibraciones son perpendiculares a los “frentes de onda”).

Ya hemos estudiado los casos $N = 1$ y 2 en las Secciones 1.2 y 1.4, respectivamente. Consideramos ahora el caso general de N masas acopladas por resortes, como se muestra en la Fig. 2.14.

La ecuación de movimiento de la cuenta n se deduce muy fácilmente. (Si tiene dificultad, revise la deducción para $N = 2$ en la Sec. 1.4.) Se llega a

$$M \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1}). \quad (77)$$

La forma matemática de la ecuación (77) es la misma que la de la ecuación de movimiento para desplazamientos transversales, ecuación (62), excepto el reemplazo de la constante T_0/a por la constante de resorte K . Por lo tanto, todos nuestros pasos anteriores pueden ser repetidos. Así, obtenemos la relación de dispersión [obtenida reemplazando T_0/a por K en la ecuación (74)].

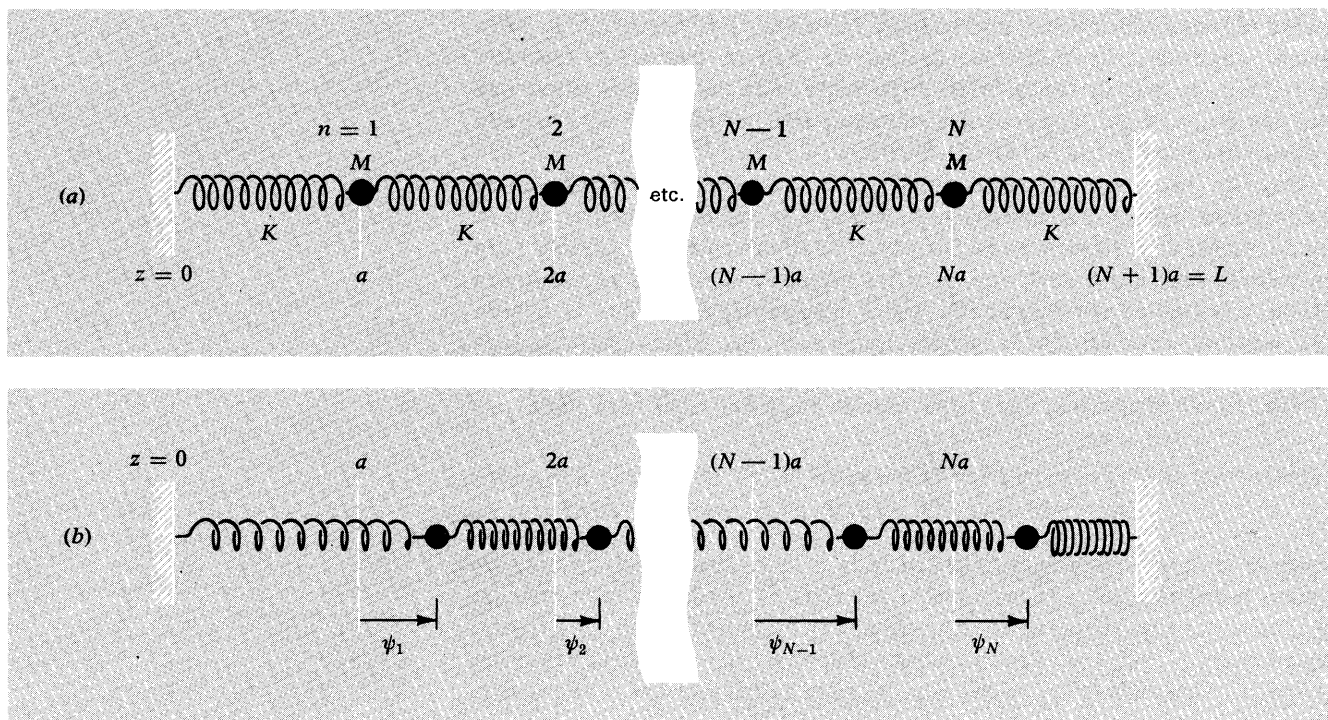


Fig. 2.14 Oscilaciones longitudinales de N masas y $N + 1$ resortes (a) Configuraciones de equilibrio. (b) Configuración general.

$$\omega(k) = 2\sqrt{K/M} \sin \frac{ka}{2} = 2\sqrt{K/M} \sin \frac{\pi a}{\lambda}. \quad (78)$$

En el modo con número de onda k , el movimiento de la masa n está dado por

$$\psi_n(t) = A \sin nka \cos [\omega(k)t + \varphi], \quad (79)$$

con las N diferentes posibilidades para k dadas por

$$k_1 L = \pi, \quad k_2 L = 2\pi, \quad \dots, \quad k_N L = N\pi. \quad (80)$$

La relación de dispersión representada en la Fig. 2.13, sólo necesita modificar su notación para representar la ecuación (78).

Parámetros empaquetados y parámetros distribuidos. Cuando considerábamos las vibraciones transversales de una cuerda con cuentas, pasamos al límite continuo haciendo tender a cero el espacio a entre cuentas (dejando L constante). Una vez que se tiene un a/λ suficientemente pequeño, de manera que vale la aproximación continua puede emplearse otro modelo físico del sistema. En lugar de seguir haciendo

tender a a cero manteniendo la imagen mental de resorte sin masa alternando con masas puntuales, podemos distribuir la masa uniformemente a lo largo del resorte. Entonces no hay ya más masas empaquetadas y resortes sin masa (constantes de resorte empaquetadas). En su lugar hay un resorte largo con la masa distribuida. El “slinky” provee un buen ejemplo. Para la longitud del intervalo a no podemos tomar el largo según z de una vuelta del resorte helicoidal. Los significados de los parámetros M y K se vuelven, respectivamente, la masa y la constante de resorte de una vuelta. Si se tienen N vueltas (N no es el número de grados de libertad), la masa total es NM . La constante de resorte total (es decir, para el resorte completo de longitud $L = Na$) es K/N . (Esto es porque dos resortes idénticos enganchados en serie hacen uno más largo cuya constante de resorte es la mitad de la constante de los dos resortes originales.)

En lugar de retener la longitud a (de una vuelta de la hélice), podemos eliminarla completamente de la notación (en la aproximación continua) reemplazando M/a por la masa por unidad de longitud (densidad lineal de masa) $\rho_0 = M/a$. Análogamente, podemos eliminar K , la constante de resorte de una vuelta, reemplazándola por una cantidad que es característica del material del resorte y su construcción. Esa cantidad es la inversa de la constante del resorte por unidad de longitud, K^{-1}/a . Esto se ve fácilmente como sigue. Para un resorte de largo total $L = Na$, la constante de resorte K_L es N veces más pequeña que K :

$$K_L = \frac{1}{N} K = \frac{a}{L} K. \quad (81)$$

Tenemos por lo tanto $K_L \cdot L = Ka$, que es independiente de L ; es decir, Ka es una propiedad de la elasticidad del material e independiente de la longitud del resorte. Puesto que queremos trabajar con cantidades que tengan dimensiones de “algo por unidad de longitud” escribimos la relación

$$K_L \cdot L = Ka$$

en la forma

$$\frac{K^{-1}}{a} = \frac{K_L^{-1}}{L}. \quad (82)$$

Ahora podemos expresar el resultado diciendo que la constante inversa de resorte por unidad de longitud es una propiedad del resorte y es independiente de su longitud.

Ejemplo 3: «Slinky»

Un “slinky” es un resorte helicoidal que tiene $N \approx 100$ vueltas, cada una de alrededor de 7 cm de diámetro. El largo, sin estirarlo, es alrede-

dor de 6 cm. Cuando se lo estira hasta una longitud de aproximadamente un metro, satisface la aproximación “slinky” muy bien. Un largo repetido a conveniente está dado por la longitud por vuelta $a = L/N$. Entonces K es la constante de resorte para una vuelta y $K^{-1/a}$ es independiente de L . (La masa está por supuesto distribuida y no acumulada en cada intervalo de longitud a .) La relación de dispersión para oscilaciones longitudinales se obtiene pasando el límite continuo a partir de la ecuación (78)

$$\begin{aligned}\omega(k) &= 2 \sqrt{\frac{K}{M}} \sin \frac{ka}{2} \\ &= 2 \sqrt{\frac{K}{M}} \left[\frac{ka}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{ka}{2} \right)^3 + \dots \right] \\ &\approx \sqrt{\frac{Ka^2}{M}} k \\ &= \sqrt{\frac{Ka}{(M/a)}} k.\end{aligned}\tag{83}$$

La relación de dispersión para oscilaciones transversales es [véase ecuación (75)]

$$\begin{aligned}\omega(k) &\approx \sqrt{\frac{T_0}{M/a}} k \\ &\approx \sqrt{\frac{Ka}{M/a}} k,\end{aligned}\tag{84}$$

puesto que $T_0 = Ka$ en la aproximación “slinky”. En consecuencia, el “slinky” tiene la misma relación de dispersión para oscilaciones longitudinales y transversales. Por lo tanto, si las condiciones de contorno son las mismas (por ejemplo, ambos extremos fijos para vibraciones según x , y o z), los modos para las vibraciones x , y y z tienen la misma sucesión de longitudes de onda y frecuencias. Le recomendamos especialmente que lleve a cabo algunos de los Experimentos caseros que utilizan “slinkies”. No hay mejor camino para entender ondas que comprobarlo por uno mismo. Consiga un “slinky”. (Fabricado por James Industries, Inc., Hollidaysburg, Pa.; disponible en cualquier juguetería por 1 dólar aproximadamente.)

Ejemplo 4: Circuito LC

Considere la serie de inductancias y capacitancias acopladas mostrada en la Fig. 2.15. De la Fig. 2.15b (y nuestra discusión sobre el

mismo circuito para el caso $N = 2$, en la Sec. 1.4). Encontramos fácilmente que la ecuación para la fuerza electromotriz a través de la n -ésima inductancia está dada por:

$$L \frac{dI_n}{dt} = -C^{-1}Q' + C^{-1}Q.$$

Entonces

$$L \frac{d^2 I_n}{dt^2} = -C^{-1} \frac{dQ'}{dt} + C^{-1} \frac{dQ}{dt}.$$

Usando conservación de la carga para eliminar dQ'/dt y dQ/dt obtenemos

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 I_n}{dt^2} &= -C^{-1}[I_n - I_{n+1}] + C^{-1}[I_{n-1} - I_n] \\ &= C^{-1}[I_{n+1} - I_n] - C^{-1}[I_n - I_{n-1}]. \end{aligned} \quad (85)$$

La ecuación (85) tiene la misma forma matemática que la ecuación (77), ecuación de movimiento que gobierna las oscilaciones longitudinales de una sucesión de masas y resortes. En consecuencia, sin preocuparnos todavía de las condiciones de contorno, podemos escribir la relación de dispersión y la solución general para las corrientes en las inductancias. La relación de dispersión se obtiene reemplazando K/M por C^{-1}/L en la ecuación (78):

$$\omega(k) = 2 \sqrt{\frac{C^{-1}}{L}} \sin \frac{ka}{2}. \quad (86)$$

La solución general de la ecuación (85) para un modo único, sin considerar las condiciones de contorno, es

$$I_n(t) = [A \sin nka + B \cos nka] \cos [\omega(k)t + \varphi], \quad (87)$$

donde las constantes A y B y la sucesión de valores de k correspondientes a los modos, depende de las condiciones de contorno en los extremos del sistema.

El significado de ka . Puede haberse observado que la ecuación que gobierna el comportamiento del circuito LC , ecuación (85), no contiene la distancia a . Indicamos tal distancia en la Fig. 2.15, pero no había necesidad de hacerlo, puesto que el diagrama de un circuito no es un diagrama espacial y el comportamiento del circuito no depende de su configuración espacial. ¿Qué queremos designar entonces con ka en la relación de dispersión, (86), y en la solución general para las corrientes, ecuación (87)? Cuando la longitud en la dirección z tiene realmente un importante significado físico, como en la cuerda oscilante, sabemos

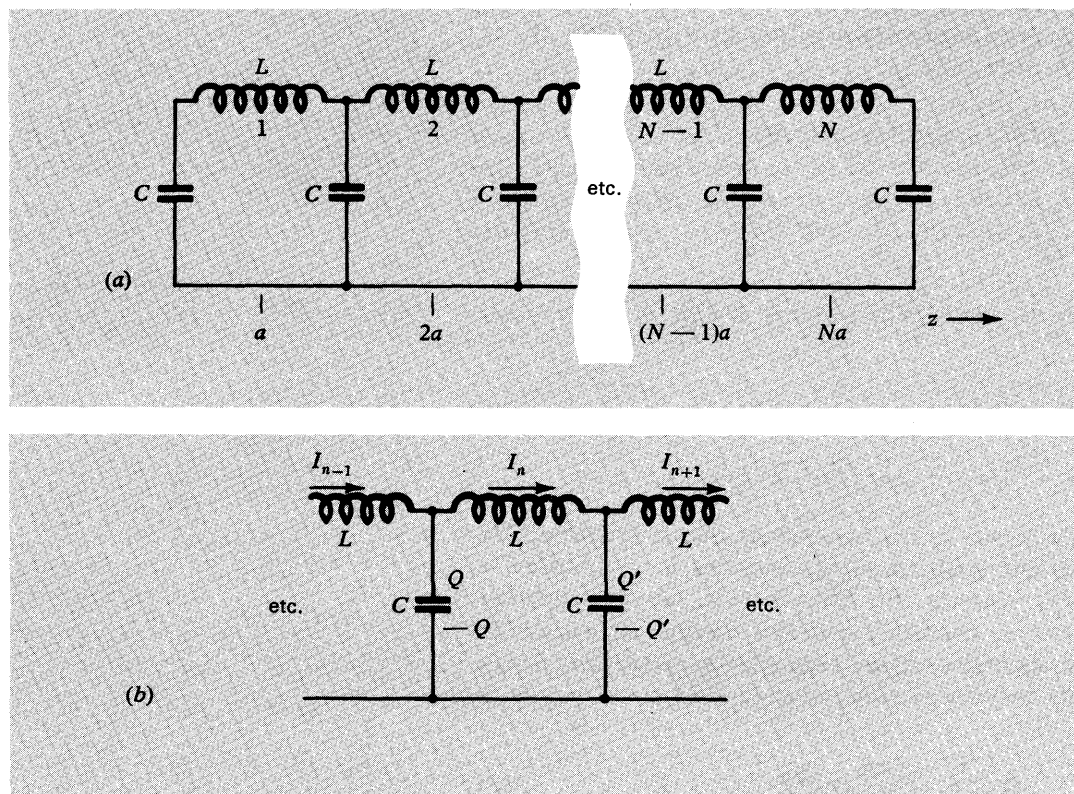


Fig. 2.15 Circuito de inductancias y capacitancias acopladas. (a) Los parámetros empaquetados. (b) Configuración general de corriente y carga en la n -ésima inductancia.

que k significa el aumento por unidad de longitud sobre z de la fase de la función $A \sin kz + B \cos kz$, que da la forma del modo. Cuando tenemos parámetros (empaquetados), como en la cuerda con cuentas, escribimos $z = na$, donde $n = 1, 2, \dots$ es el índice de la cuenta. Entonces, la cantidad ka que aparece en la función $A \sin nka + B \cos nka$ es el producto de radianes de fase (de la función forma) por unidad de distancia multiplicado por la distancia entre masas empaquetadas. En consecuencia, ka es el incremento en radianes de fase desde la masa empaquetada n hasta la siguiente masa empaquetada $n + 1$. En el caso del sistema de inductancias y capacitancias empaquetadas, la cantidad es análoga al incremento en fase de la "función forma" $A \sin nka + B \cos nka$ cuando pasamos de una inductancia empaquetada a la siguiente. No necesitamos realmente especificar la distancia a que separa las inductancias. Podemos meramente reemplazar ka por algún símbolo, digamos θ , que denotaría el aumento de fase cuando n es incrementado en 1 en la función forma $A \sin n\theta + B \cos n\theta$. Esta notación es demasiado abstracta para nosotros y abandona la semejanza matemática con

los ejemplos mecánicos, de manera que retendremos la idea de que las inductancias empaquetadas están separadas por una distancia a .

Otras formas de la relación de dispersión. Habrán podido notar que todos los sistemas de parámetros empaquetados que hemos considerado en lo que va de esta sección tienen una relación de dispersión exacta de la forma

$$\omega(k) = \omega_{\text{máx}} \sin \frac{ka}{2}, \quad (88)$$

como en la gráfica de la Fig. 2.13, siendo $\omega_{\text{máx}}$ una constante que depende del sistema físico. Esto se debe solamente a nuestra elección de sistemas. En todos los casos que consideramos, elegimos un sistema en el que la fuerza restauradora sobre una masa dada (o inductancia), es enteramente el resultado del acoplamiento de esa masa a masas vecinas y es proporcional al desplazamiento relativo de éstas y aquéllas. Tales sistemas son numerosos, pero existen muchas otras formas de relaciones de dispersión importantes e interesantes. Por ejemplo, hay sistemas que tienen la propiedad de que la fuerza restauradora en una parte dada móvil tiene las siguientes dos contribuciones independientes. Una se debe a la fuerza proveniente del acoplamiento con partes móviles vecinas semejantes. Si ésta fuera la única contribución, la relación de dispersión tomaría la forma de la ecuación (88). La otra se debe a su acoplamiento a cierta fuerza "externa". Esta contribución externa depende solamente del desplazamiento de la parte móvil de su posición de equilibrio y no del desplazamiento de las partes vecinas. Si ésta fuera la única contribución, entonces las partes móviles estarían desacopladas, y sus desplazamientos serían las coordenadas normales del sistema completo. Esta clase de sistema se ilustra por el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5: Péndulo acoplado

El sistema se muestra en la Fig. 2.16. Cada masa tiene una fuerza restauradora compuesta por dos contribuciones. La contribución "externa" es la debida a la gravedad. Es proporcional al desplazamiento de la masa de su posición de equilibrio y es independiente del desplazamiento de sus vecinos. La contribución independiente se debe al acoplamiento de una masa dada con sus vecinas por medio de resortes. Esta contribución depende del desplazamiento de las masas vecinas.

Tratemos de pensar la relación de dispersión. Si tuviéramos solamente el acoplamiento entre masas, es decir, si g fuera cero, entonces podríamos tener la relación de dispersión para oscilaciones longitudinales de masas acopladas. En consecuencia, la fuerza restauradora por unidad de desplazamiento por unidad de masa, ω^2 , estaría dada por la ecuación (78).

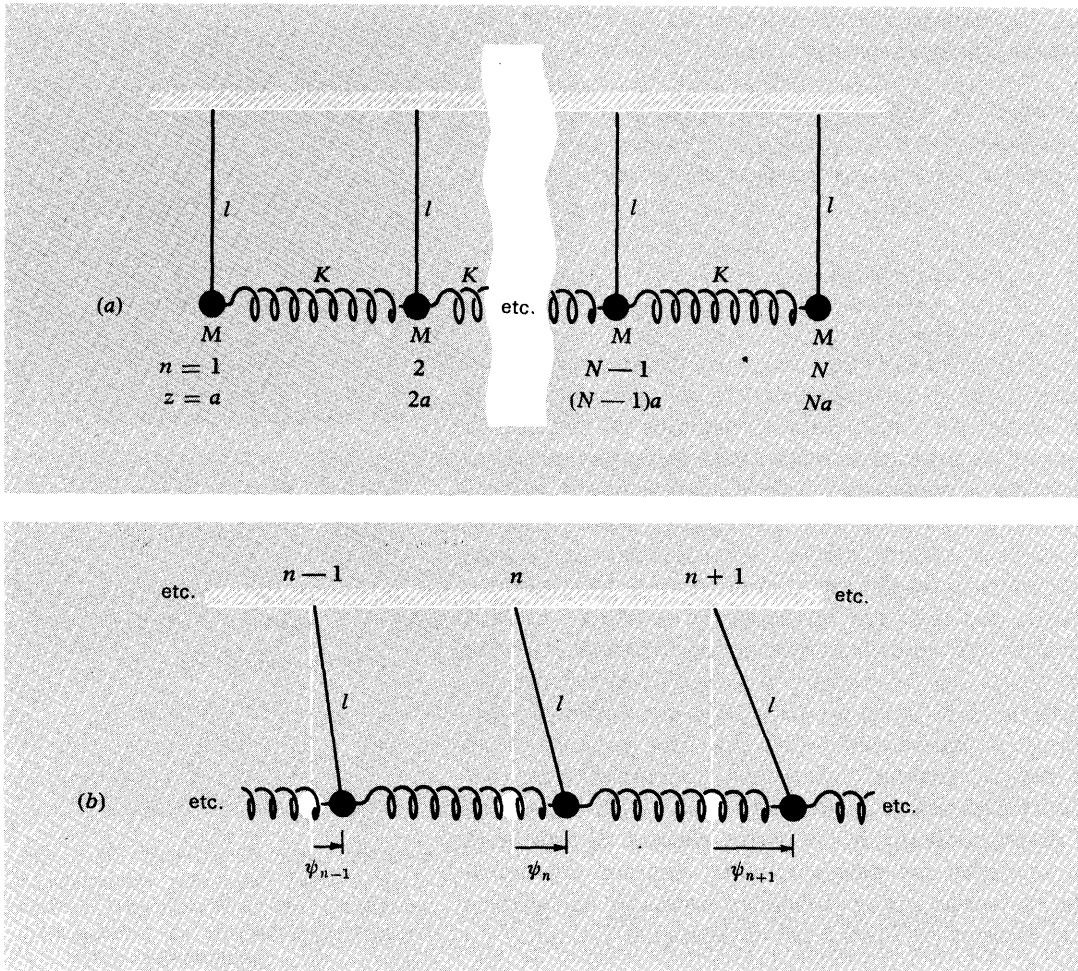


Fig. 2.16 Péndulos acoplados. (a) Equilibrio. (b) Configuración general.

$$\omega^2 = 4 \frac{K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2}, \quad \text{si } g = 0. \quad (89)$$

Ahora supongamos que (con $g=0$) tenemos oscilación en un modo único, con una forma determinada por el valor definido de k , que está dado por las condiciones de contorno. Imagine que podemos incrementar gradualmente g desde cero hasta su valor final de 980 (unidades cgs), usando una "perilla gravitatoria". (Se puede inventar un método más práctico. ¿Qué otra cosa puede variar?) Cuando incrementamos g desde cero al valor muy pequeño g' la fuerza restauradora por unidad de des-

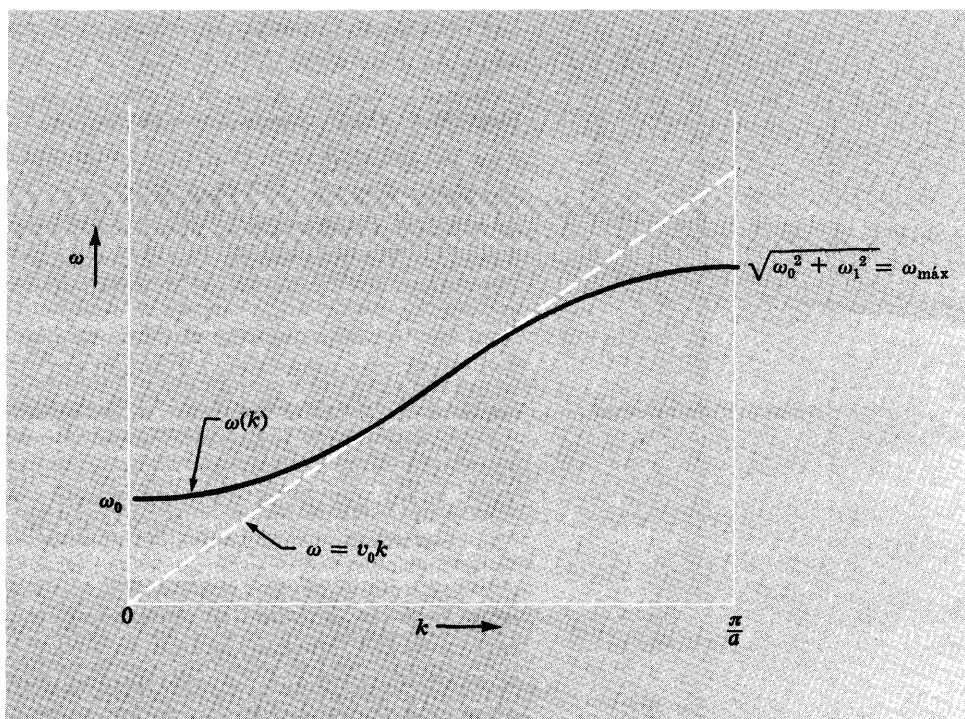
plazamiento por unidad de masa para *cada* partícula, aumenta en la *misma* cantidad, la contribución de g' :

La contribución de g' a ω^2 es g'/l para toda masa.

Esto significa que las masas continuarán oscilando con la misma configuración, el mismo k y la misma combinación lineal de $\sin kz$ y $\cos kz$, pero solamente oscilarán con más rapidez. Esto se debe a que *tenían* la misma fuerza restauradora por unidad de desplazamiento por unidad de masa, ω^2 , cuando g' era cero, y ahora tenemos sumando la *misma cantidad* a la frecuencia elevada al cuadrado de cada masa. En consecuencia, todas las masas siguen teniendo el mismo ω^2 y, por lo tanto, siguen estando en un modo. Entonces, graduando g , preservamos los modos sin mezclarlos. Las formas y longitudes de onda son las mismas que para $g = 0$, y la fuerza restauradora total por unidad de masa y de desplazamiento es ahora

$$\omega^2(k) = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (90)$$

Fig. 2.17 Relación de dispersión para péndulos acoplados.



Si se prefiere una deducción menos cualitativa de esta relación, véase el Prob. 2.26; allí encontraremos la ecuación de movimiento de la masa n , verificaremos la relación de dispersión de la ecuación (90) y se hallará la forma de los modos. (¿Puede ver ya que para las condiciones de contorno de la Fig. 2.16 el modo más bajo tiene $k = 0$?)

En lo que sigue, encontramos más ejemplos de leyes de dispersión de la forma de la ecuación (90), que podemos escribir en la forma general

$$\omega^2(k) = \omega_0^2 + \omega_1^2 \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (91)$$

En el límite continuo, donde tenemos $ka \ll 1$, esta relación queda

$$\omega^2(k) = \omega_0^2 + v_0^2 k^2, \quad (92)$$

donde v_0^2 es la constante $\omega_1^2 a^2/4$

Encontraremos leyes de dispersión de la forma (92) cuando estudiemos radiación electromagnética en una guía de onda y ondas electromagnéticas en la ionosfera terrestre. (Ésta es también la forma de la ley de dispersión para ondas relativistas de de Broglie en la descripción cuántica de partículas.) Representamos la ecuación (91) en la figura 2.17.

Ejemplo 6: Oscilaciones del plasma

Éste es un ejemplo interesante de un sistema con relación de dispersión semejante a la de los péndulos acoplados. En el Capítulo 4 deduciremos la relación de dispersión para ondas electromagnéticas en la ionosfera terrestre. Tiene la forma de la ecuación (92):

$$\omega^2(k) = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad (93)$$

donde c es la velocidad de la luz y ω_p , llamada “frecuencia de oscilación del plasma”, está dada por

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}. \quad (94)$$

Aquí N es la densidad de número de los electrones (en electrones por cm^3), e es la carga del electrón y m su masa. De la Fig. 2.17 vemos que el modo de menor frecuencia posible para un sistema con relación de dispersión como (91) o (92) es un modo con $k = 0$, es decir, con longi-

tud de onda infinita. Esto significa que todos los péndulos oscilan con la misma constante de fase y amplitud. La frecuencia del péndulo está entonces dada por $\omega^2 = g/l$. La frecuencia de ese modo más bajo en el presente ejemplo es la frecuencia de oscilación del plasma ω_p , como vemos haciendo $k = 0$ en la ecuación (93). Ahora consideraremos ese modo y derivaremos la ecuación (94) y la frecuencia.

Un plasma neutro consiste en un gas de moléculas neutras con algunas de ellas ionizadas. Toda molécula simplemente ionizada consiste en un ion positivo que ha dejado libre un electrón (negativo). La ionosfera terrestre es una capa de aire (realmente varias capas con propiedades algo diferentes) que contiene muchas moléculas de aire ionizadas (moléculas de N_2 y O_2). La ionización de una molécula de aire ocurre usualmente por absorción de un cuarto de luz ultravioleta emitido por el Sol. La densidad de iones y electrones libres es mayor, alrededor de 200 a 400 km por encima de la superficie terrestre. Más arriba, la densidad de electrones (y iones) decrece, puesto que la densidad de moléculas de aire neutras disponibles disminuye. Más abajo, la densidad de electrones decrece, porque la radiación ultravioleta ya ha sido en su mayor parte absorbida. (Ya hubiéramos muerto de quemaduras de Sol sin la capa protectora de aire que nos recubre.)

Puesto que el plasma es neutro (en promedio), no actúa como una fuente de campo electrostático. Sin embargo, una región del plasma puede, en cualquier instante, tener un pequeño exceso de carga, con un déficit correspondiente en alguna otra región vecina. Esto crea un campo eléctrico en el plasma. Bajo la influencia de ésta, los iones son acelerados en una dirección (la del campo), y los electrones en la otra. Las cargas se mueven en direcciones que tienden a cancelar los excesos y déficits de carga que crearon el campo eléctrico. En consecuencia, tenemos una "fuerza restauradora". En el tiempo en que el exceso de carga ha sido anulado junto con el campo eléctrico, los iones y los electrones han adquirido velocidades. Su inercia los hace "sobrepasarse", y tenemos un nuevo exceso de carga y déficit, con signo opuesto al original. He aquí la situación típica que sustenta las oscilaciones una vez que han sido excitadas.

Si estamos interesados solamente en el movimiento neto de vaivén de carga de una región a la otra, podemos olvidarnos de los iones positivos y considerar el movimiento completo de carga como debido al movimiento de los electrones. Esto es debido a que la aceleración de un electrón es mayor que la de un ion monopositivo en la relación de sus masas respectivas (alrededor de 3×10^4), puesto que la fuerza eléctrica es la misma sobre ambos.

Estudiemos una situación simplificada en la que el plasma está confinado entre paredes. Despreciamos el movimiento de los iones comparado con el de los electrones. En cualquier instante puede haber un exceso de carga Q en una pared y un déficit correspondiente en la

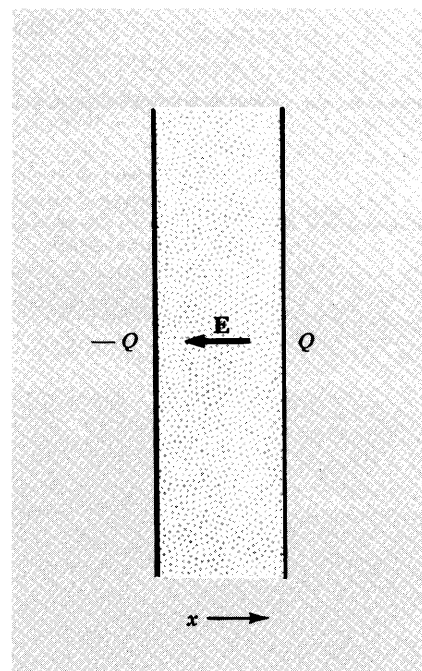


Fig. 2.18 Oscilaciones en un plasma confinado.

otra. Esto produce un campo eléctrico especialmente uniforme en el plasma (Vol. II, Sec. 3.5) dado por

$$E_x = -4\pi \frac{Q}{A}, \quad (95)$$

donde A es el área de la pared, y el signo menos significa que E_x tiende a hacer volver Q a cero. No hay otra fuente de campo eléctrico. (El plasma entre las paredes es neutro, porque cada electrón que se mueve hacia la derecha desde una región dada es reemplazado por otro que entra desde la izquierda.) Un electrón tiene masa m y carga q . La segunda ley de Newton da

$$\frac{m d^2x}{dt^2} = qE_x \quad (96)$$

para todo electron en el plasma. (Estamos despreciando otras fuerzas sobre los electrones, provenientes de colisiones entre electrones e iones; estas fuerzas en promedio dan cero y no producen movimiento neto de cargas.) Supongamos ahora que hay N electrones libres por centímetro cúbico y que cada uno está desplazado de su posición promedio (de equilibrio) una distancia x . Entonces la carga neta depositada sobre una pared (y removida de la otra) está dada por

$$Q = NqAx. \quad (97)$$

Diferenciando dos veces la ecuación (97) con respecto al tiempo y reemplazando las ecuaciones (96) y (95) se obtiene

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{4\pi Nq^2}{m} Q. \quad (98)$$

Ésta tiene la solución:

$$Q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

con

$$\omega^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m} \equiv \omega_p^2. \quad (99)$$

La cantidad ω_p se llama frecuencia de oscilación del plasma.

La densidad de electrones libres en la ionosfera terrestre, N , varía con la altura y con el tiempo. La recombinación de iones y electrones para formar moléculas neutras continúa después de la puesta del Sol, pero la formación de nuevos iones cesa. La densidad de electrones, en

consecuencia, decrece por la noche. Las frecuencias de oscilación típicas para el plasma diurno $\nu_p (= \omega_p/2\pi)$ son

$$\nu_p = 10 \text{ a } 30 \text{ Mc (megaciclos por segundo)} \quad (100)$$

que corresponde a $N \approx 10^6$ a 10^7 electrones libres por cm^3 .

Ejemplos esotéricos

Si se combina la hipótesis de de Broglie, que dice que una partícula de momento p tiene un número de onda k dado por $\hbar k$, con la "condición de frecuencia de Bohr", que dice que una partícula de energía E tiene una frecuencia ondulatoria ω dada por $E = \hbar\omega$, puede encontrarse entonces una relación de dispersión entre ω y k para partículas, dada la relación entre E y p . Se dan ejemplos en el Tema suplementario 2.

Problemas y experimentos caseros

2.1 "Slinky" — dependencia entre la frecuencia y la longitud. Sostengamos la primera vuelta de un "slinky" en la mano izquierda y la última en la derecha, con las manos separadas alrededor de 3 pies. Midamos la frecuencia para oscilaciones transversales verticales. (No debe preocuparnos el pando. Luego estiremos el "slinky" hacia fuera tanto como se pueda. Midamos la frecuencia. Ahora sujetemos cada extremo a algún objeto, de manera que la longitud total sea 8 ó 10 pies. Midamos la frecuencia. Expliquemos su resultado. Use la frecuencia para determinar la constante inversa de resorte por vuelta. Suponga que N_0 es el número total de vueltas del "slinky". Mantenga o sujete el "slinky" de manera que solamente queden libres N espiras. Antes de realizar el experimento, prediga la dependencia entre la frecuencia y N/N_0 . Luego haga el experimento.

Experimento casero

2.2 El "slinky" como sistema continuo. Sujete cada extremo a algo fijo. (Posiblemente sean útiles cinta adhesiva, cuerda y grapas en C.) Una longitud conveniente es entre 8 y 10 pies. No se preocupe por el pando. Excite el modo transversal más bajo en cada dirección transversal. Mida las frecuencias de ambos modos. Excite también el modo longitudinal más bajo y mida su frecuencia. (Hay dos buenas formas de excitar el modo deseado. Una es constreñir el "slinky" en una forma apropiada y luego soltarlo; la otra es tomarlo cerca de un extremo y agitarlo a la frecuencia deseada hasta que dé una amplitud razonable y luego soltarlo. Use ambos métodos.) Después, aprenda cómo excitar el segundo modo, en el cual la longitud L es de dos semilongitudes de onda. Haga esto para las direcciones x , y , z . Mida las frecuencias. Con algo de práctica estará capacitado para excitar el tercer modo.

Experimento casero

Ahora excite el modo vertical más bajo y el segundo modo longitudinal simultáneamente. (Esto puede hacerse fácilmente por medio de una contracción inicial adecuada.) Observe el sistema y mida la frecuencia de pulsación entre el (segundo) modo longitudinal y el doble del modo vertical más bajo. Esto resulta sencillo una vez que se tiene la idea y se practica durante algunos minutos. Éste es un buen camino para ver por inspección que uno tiene un factor exacto de dos en la frecuencia al pasar del "fundamental" a la "primera octava". Análogamente, puede excitar en forma sencilla el modo vertical más bajo y el segundo modo horizontal simultáneamente.

2.3 Mediciones nulas. Lea el Experimento casero 2.2 (a pesar de que no necesita llevarlo a cabo para trabajar en este problema). Suponga que mide frecuencias del “slinky” contando oscilaciones por cada 10 segundos aproximadamente y luego dividiendo el número de ciclos completos por el tiempo. Suponga que lee el reloj con una precisión de más o menos 1 segundo y que puede estimar una oscilación “completa” con una precisión de más o menos $1/4$ de ciclo. La frecuencia ν_1 del modo más bajo es aproximadamente 1 cps. La del segundo, ν_2 , es aproximadamente 2 cps.

(a) Aproximadamente, ¿cuál es la precisión relativa (o porcentual) que dará su medición para ν_1 ? ¿Y para ν_2 ? (Queremos una respuesta como “ $\nu_1 = 1,0 \pm 0,1$, $\nu_2 = 2,0 \pm 0,2$ ”, o lo que sea.)

(b) Después, suponga que debe excitar los dos modos simultáneamente y mida la frecuencia de pulsación entre $2\nu_1$ y ν_2 , como se discute en el Experimento casero 2.2. Esto puede hacerse observando pulsaciones para cada 10 seg, o sea, alrededor de 10 ciclos de ν_1 . Suponga que no puede detectar, con un error de $1/4$ de pulsación, ninguna pulsación entre $2\nu_1$ y ν_2 en ese tiempo. En consecuencia, su resultado experimental sería $\nu_2 - 2\nu_1 = 0$. ¿Cuál es el error experimental? (Queremos una respuesta como “ $\nu_2 - 2\nu_1 = 0 \pm 0,10\nu_1$ ”, o lo que sea.) ¿Cuál es el error de una estimación de la cantidad $\nu_2 - 2\nu_1$ (expresada de la misma forma) obtenida combinando los resultados de sus mediciones independientes de ν_1 y ν_2 en la parte (a)? ¿Puede detectar alguna ventaja experimental en el método de conteo de pulsaciones? Explique por qué lo haría mucho mejor con ese método. Trate de generalizar esto en un informe sobre “cómo realizar una medición, si es posible”.

Experimento casero

2.4 Calidad de tono de un “slinky”. La calidad de tono de un instrumento musical depende de qué armónicas se exciten [Por ejemplo, en un clarinete faltan (o casi faltan) las armónicas pares; sólo ν_1 , $3\nu_1$, $5\nu_1$, etc., están presentes.] Localice el centro de su “slinky” (suspendido como en el Exp. casero 2.2). Excítelo dándole con su mano un golpe repentino en el centro. Intente distintos grados de brusquedad. En seguida podrá ver que las armónicas pares están siempre ausentes y que cuanto mayor es la excitación, mayor es el número de modos (impares) que excita. ¿Puede idear una forma de excitar solamente los modos impares?

Pruebe de pulsar una cuerda de guitarra o piano en distintos lugares —en el medio o cerca de un extremo— y trate de escuchar una diferencia en la “calidad de tono”.

Experimento casero

2.5 El piano como máquina analizadora de Fourier —insensibilidad del oído a la fase. Consiga un piano. Apriete el pedal de sordina. Grite “eh” dentro de la región de las cuerdas y caja armónica. Preste atención. Grite “oh”. Pruebe con todas las vocales. Las cuerdas del piano están recogiendo (de manera algo distorsionada), y luego preservando, el análisis de Fourier de su voz. Note que el sonido de la vocal persiste varios segundos. ¿Qué le dice esto acerca de la importancia para su oído y cerebro de las fases relativas de los componentes de Fourier que forman el sonido?

Experimento casero

2.6 Armónicos de piano —escala de equitemperancia. Busque en el *Handbook of Chemistry and Physics* en “musical scales”, las convenientes tablas de tonos para las tres escalas comunes:

Tono americano standard (A440) escala cromática de equitemperancia.

Tono internacional (A435) escala cromática de equitemperancia.

Escala científica o exacta (basada en C256, que da A426,67).

Primero explicaremos la escala científica. Sea C256 igual a una unidad de frecuencia, $\nu = 1$. Las armónicas de esta nota fundamental son entonces $\nu = 2, 3$,

4, etc.; las *subarmónicas* se definen como $1/2$, $1/3$, $1/4$, etc. El do central de piano es C256 (si el piano está afinado de esa forma). Se le llama C_4 . (El subíndice se refiere a la octava. Aumenta en 1 para cada octava más alta de do.) Suponga que las cuerdas de piano obedecen perfectamente la ley de dispersión para una "cuerda continua y perfectamente flexible". Entonces las frecuencias de los modos de una cuerda dada formarán la sucesión armónica ν_1 , $2\nu_1$, $3\nu_1$, etc. Los nombres y frecuencias de las primeras 16 armónicas de la cuerda C_4 y también las dos primeras subarmónicas serían las siguientes (subrayando C_4 y sus octavas):

Nombre: F_3 C_3 C_4 C_5 G_5 C_6 E_6 G_6 Bb_6 C_7 D_7 E_7 $F\sharp_7$ G_7 $G\sharp_7$ Bb_7 B_7 C_8
 ν : $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Una octava es siempre más alta en frecuencia en un factor de dos (compare G_6 y G_7). Ahora construyamos una escala dentro de la octava entre C_4 y C_5 dividiendo o multiplicando las armónicas y subarmónicas de C_4 por potencias apropiadas de 2. Obtenemos entonces la escala diatónica científica o exacta en do mayor (diatónica significa que tenemos sólo las "notas blancas" sin ninguna de las "notas negras" en el teclado del piano):

Nombre:	C	D	E	F	G	A	B	C
ν :	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

("Colamos" la A. Es $5/4$ F.) La nota C se llama *tónica* en esta escala.

El intervalo musical más pequeño en esta escala diatónica se llama *segunda menor*. La relación de frecuencias para una segunda menor es $F/E = C/B = 16/15 = 1,067$. La siguiente relación se llama segunda mayor. Hay dos clases de segunda mayor: $D/C = G/F = B/A = 9/8 = 1,125$; $E/D = A/G = 10/9 = 1,111$. Hay también dos clases para la siguiente relación, la tercera menor: $F/D = 32/27 = 1,185$; $G/E = C/A = 6/5 = 1,200$. Hay sólo una clase de tercera mayor $E/C = A/F = B/G = 5/4 = 1,250$. Ahora viene la dificultad, musicalmente. Suponga que, en el transcurso de una composición para un piano afinado a esta escala, decide repentinamente que quiere cambiar a una nueva "clave", esto es, a una escala diatónica con una nota diferente como tónica. Por ejemplo puede querer cambiar de C mayor a D mayor. Quiere la misma clase de escala, es decir, las mismas relaciones de frecuencia que antes. Por lo tanto, quiere que la primera segunda mayor en la nueva escala E/D sea una "segunda mayor de tipo D/C" con relación 1,125. Desgraciadamente, no puede usar la E que ya tiene, porque esto da $E/D = 1,111$. Así que necesita una nueva cuerda, E' , con E'/C (1,125) (D/C) = 1,256, mientras que $E/C = 1,250$. La siguiente nota después de E' también necesita una nueva cuerda, llamada $F\sharp$. La hacemos en la relación $F\sharp/D = E/C$, de tal forma que $F\sharp$ ($5/4$) ($9/8$) = 1,407. (Ésta es una "tecla negra" en el piano.) Note que ahora el piano ha adquirido una nueva clase de segunda menor: $F\sharp/F = 1,0555$. A medida que completa la escala, puede agregar más y más teclas. Entonces, si quiere tocar en otras teclas todavía, la situación se torna más y más difícil. (Intente completar la escala D. Tiene que agregar la "tecla negra" $C\sharp$ para obtener la nota correspondiente a B en la escala C. Pero, ¿qué otras cuerdas "primadas" necesita?

La escala de equitemperancia evita todo esto haciendo que todas las notas estén igualmente espaciadas en una escala logarítmica. La octava está dividida en 12 segundas menores ("semitonos"), cada una de las cuales tiene la relación de frecuencia $2^{1/12} = 1,059$. Entonces todas las segundas mayores tienen la relación $2^{2/12} = 1,122$; todas las terceras menores tienen $2^{3/12}$, etc. Ninguno de los intervalos es "exacto" excepto las octavas, pero todos los intervalos son cercanos a los valores exactos en escalas diatónicas basadas en cualquier nota como tónica.

Trate de realizar los siguientes experimentos:

i) Mantenga continuamente apretada la tecla para, digamos, Bb_6 , como para levantar su amortiguador sin hacer sonar la nota. Ahora golpee abruptamente una nota más baja, manténgala por algunos segundos, y aflójela luego para amortiguar la nota baja. Si ahora oye sonar las cuerdas Bb_6 , deberá haber sido excitada por uno de los armónicos presente en el conjunto de modos de la cuerda vibrante baja. Pruebe con varias cuerdas bajas. La nota una octava más baja dará resultado. También lo hará la $12.^a$ más abajo, Eb , puesto que Bb es su tercera armónica. También la C para la cual, Bb_6 es la $7.^a$ armónica, si es que esta armónica está presente en la cuerda vibrante C . Otra forma de trabajar en este experimento es golpear la misma nota baja, digamos, C_4 , mientras se van bajando silenciosamente diferentes notas altas para ver si son excitadas. Cuando haya encontrado una nota que sea excitada, pruebe con la nota separada por una segunda menor. ¿Es excitada?

(ii) Esta vez mantenga apretada y en silencio una nota baja y golpee abruptamente una nota más alta. Si la nota alta es una de los sobretonos de la baja, excitará ese sobretono en la nota baja sin excitar el modo más bajo (el fundamental) de la cuerda baja. Así, ha conseguido escuchar cómo suenan las armónicas de la cuerda baja cuando no están tapadas por la fuerte fundamental.

(iii) Use el método de (ii) para aprender cómo suenan las primeras 6 ó 7 armónicas de C_4 (o una C más baja). Después aprenda a escuchar una armónica particular en el conjunto de tonos cuando la tecla baja es golpeada de manera normal. Por ejemplo, para aprender cómo escuchar la $7.^a$ armónica, Bb_6 , cuando es golpeada C_4 , mantenga apretada y en silencio a C_4 y golpee abruptamente Bb_6 . Esto le dice cómo suena Bb_6 cuando es la $7.^a$ armónica de C_4 . Después, mientras su memoria está fresca, golpee la cuerda C_4 y concéntrese en recoger Bb_6 del sonido (dominado por la fundamental de C_4). Note que la frecuencia de esta nota cuando suena como $7.^a$ armónica de C_4 , es decir, en la cuerda C_4 , no será exactamente la misma que la frecuencia de la nota fundamental en la cuerda Bb_6 . Estará lo suficientemente cerca como para que pueda ser excitada, probablemente, pero tan pronto como la cuerda Bb_6 es amortiguada y ha tenido más segundos para olvidarse de cómo había sido excitada, oscilará en su propia frecuencia ($7.^a$ armónica) y no en la frecuencia excitadora. Así suena algo diferente de la nota excitadora. (Por supuesto, si el piano está desafinado, puede sonar *muy* diferente.) Debido a esta pequeña diferencia de frecuencia, puede oír pulsaciones como sigue:

(iv) Apriete C_4 silenciosamente. Golpee abruptamente C_5 . Está excitado el segundo modo de la cuerda C_4 . Ahora, antes que desaparezca, amortigüe C_5 y luego golpéela nuevamente en seguida, tratando de que su volumen sea como el que queda de C_4 . Preste atención a las pulsaciones. (Esto resulta mejor en algunos pianos que en otros. Por otro lado, debe hacerse en una habitación tranquila.)

(v) Las dos notas más bajas del piano son $A_0 27,5$ y $A\#_0 29,1$. Su frecuencia de pulsación es entonces 1,6 cps, lo que es fácilmente detectable. Golpee ambas notas juntas suavemente. Una vez que crea oír pulsaciones, deje levantarse a una tecla, pero no a la otra. ¿Desaparecen las pulsaciones? ¿Está afinado el piano?

2.7 Por qué una cuerda ideal continua da exactamente relaciones de frecuencia "armónicas" y una cuerda con cuentas no las da. Considere una cuerda con muchas cuentas (digamos 100) con ambos extremos fijos. Pensaremos que esta cuerda es esencialmente continua. Suponga que está oscilando en su modo más bajo; entonces la longitud L es una semilongitud de onda de una onda seno.

Considere ahora el segundo modo. La longitud L es dos semilongitudes de onda, así que la primera mitad de L es una semilongitud de onda. Compare las 50 cuentas en la primera mitad de la cuerda cuando está en su segundo modo, con las 100 cuentas cuando está en su modo más bajo. En cada caso, las cuentas siguen una curva que es media longitud de onda de una onda sinusoidal. Compare la cuenta 1 (en el modo 2) con el promedio de las cuentas 1 y 2 (en el modo 1); compare la cuenta 2 (en el modo 2) con las 3 y 4 (modo 1) etcétera. Así, en el modo 2, la cuenta 17 tiene la misma amplitud que el promedio de las cuentas 33 y 34 en el modo 1 (si las ondas seno tienen la misma amplitud). Pero en el modo 2 la cuerda en la cuenta 17 forma un ángulo con el eje de equilibrio el doble de grande que el formado en las cuentas 33 y 34 en el modo 1 (usando la aproximación de ángulo pequeño). En consecuencia, la fuerza restauradora por unidad de desplazamiento sobre la cuenta 17 es sólo la mitad que la de las dos cuentas 33 y 34. También la masa de 17 es la mitad de la 33 y 34. Por lo tanto, *la fuerza restauradora por unidad de desplazamiento por unidad de masa es cuatro veces más grande para la cuenta 17 en el modo 2, que para la combinación de 33 y 34 en el modo 1*. Así encontramos, en la aproximación "casi continua" (implicada en nuestro "gran número" de cuentas), $\omega_2 = 2\omega_1$.

Este argumento no es válido si el número de cuentas se hace pequeño. Explique por qué. Entonces podrá ver que obtiene las relaciones "armónicas" $\nu_2 = 2\nu_1$; $\nu_3 = 3\nu_1$, etc., en el límite continuo, pero no cuando hay pocas cuentas, como se muestra, por ejemplo, en la Fig. 2.12.

2.8 ¿Cuántos años le lleva doblar su dinero si invierte el 5,9 % de interés anual (con capitalización anual)? [Sugerencia: Considere la escala equitemperada (Experimento casero 2.6).]

2.9 Complete la escala diatónica "exacta" que comenzamos en el Experimento casero 2.6. Allí encontramos que debíamos agregar una nueva cuerda E que llamamos E'. Necesitábamos nuestra primera "nota negra", F#. También necesitaremos otra nota negra, C#. ¿Qué ocurre con G, F, A y B? ¿Podemos usar las que tenemos, o necesitamos G', F', A' y B'?

2.10 Deduzca la ecuación (55), ecuación de ondas para una cuerda no uniforme.

2.11 Obtenga como resultado de la ecuación (47) para los coeficientes de Fourier $F(z)$ dada en la Fig. 2.6.

2.12 Encuentre las configuraciones de los modos y las frecuencias para los primeros tres modos de vibración transversales de una cuerda continua con tensión T_0 , densidad de masa ρ_0 , y longitud L , dadas las condiciones de contorno de que ambos extremos están libres. (Se deslizan sobre varillas sin fricción, que atraviesan anillos sin masa, situados uno en cada extremo de la cuerda.) Muestre que el modo más bajo posee la propiedad peculiar de tener longitud de onda infinita y frecuencia nula. En este modo, la cuerda se traslada con velocidad uniforme (esto incluye la posibilidad de que permanezca en reposo con desplazamiento arbitrario).

2.13 Encuentre las tres frecuencias y configuraciones de modos para vibraciones transversales de una cuerda con 3 cuentas uniformemente distribuidas y 4 segmentos de cuerda, dadas las condiciones de contorno de ambos extremos libres. (Los segmentos de cuerda terminales tienen en sus extremos anillos sin masa que se deslizan sobre varillas sin fricción.) Compare el modo más bajo con aquel del Prob. 2.12.

2.14 Considere un circuito LC de tres inductancias y cuatro capacitancias dispuestas igual que en la Fig. 2.15 para $N = 3$, salvo que *los dos capacitores exteriores están cortocircuitados*. Encuentre los tres modos-frecuencias y configuraciones de corriente. Compare el significado físico del “peculiar” modo más bajo de este problema con el del Problema 2.13. Compare las condiciones de contorno con las del Problema 2.13.

2.15 Considere la cuerda de piano que suena en do central, C256 (escala científica). La densidad del acero de la cuerda es alrededor de 9 g/cm^3 . (No es la densidad lineal de masa ρ_0 , ¿Por qué?) Suponga que el diámetro de la cuerda es $1/2 \text{ mm}$ y su longitud de 100 cm . ¿Cuál es la tensión en dinas, en kg y en libras? ($980 \text{ dinas} = 1 \text{ g}$; $454 \text{ g} = 1 \text{ lb}$.)

Resp. $T_0 \approx 47 \text{ kg} \approx 104 \text{ lb}$.

2.16 Encuentre $\psi(z, t)$ para un “slinky” obligado a seguir la función $g(z)$ dada por la ecuación (48). Haga una gráfica de $\psi(z, t_0)$, donde $\omega_1 t_0 = \pi/3$. Compare la forma de $\psi(z, t_0)$ con la de $\psi(z, 0)$ que se muestra en la Fig. 2.7.

2.17 Compare la tensión en una cuerda de acero para guitarra con la de una cuerda de tripa de la misma longitud, diámetro y tono (del modo más bajo). La densidad del acero es aproximadamente 9 g/cm^3 ; la de la tripa no es mucho mayor que 1 g/cm^3 . ¿Tienen realmente las cuerdas de acero el mismo diámetro que las de tripa? Observe guitarras y responda. Una vez que haya observado y estimado la relación de diámetro recalcule la relación de tensiones en los dos casos.

2.18 Deduzca la ecuación de ondas clásica (14) de la siguiente manera. Comience con la ecuación exacta (62). Pase a la aproximación continua. Reemplace el subíndice n por la posición z , teniendo en cuenta que la separación entre cuentas es a . Use el desarrollo en serie de Taylor del lado derecho de la ecuación (62). *Incluya un término más de lo necesario para obtener la ecuación de ondas clásica*. Dé un criterio para despreciar éste y otros términos de orden superior.

2.19 Muestre que tomando la ecuación (71) como solución de la ecuación de movimiento para vibraciones transversales de la cuerda con cuentas, ecuación (65), se obtiene la relación de dispersión (70). Muestre que este hecho es independiente de la elección de las constantes A , B y k , que dependen solamente de las condiciones iniciales y de contorno.

2.20 Use las ecuaciones (73) y (70) para obtener las relaciones de frecuencia mostradas en la Fig. 2.12 para $N = 5$.

2.21 Encuentre las configuraciones y frecuencias de los modos para oscilaciones transversales de una cuerda con 5 cuentas con un extremo fijo y el otro libre. Haga una gráfica con los cinco puntos correspondientes en la relación de dispersión $\omega(k)$ como en la Fig. 2.13.

2.22 Por inspección de la Fig. 2.13 y diseño del sistema muestre un camino sencillo para agregar 6 puntos más a la Fig. 2.13, de forma tal que dé los modos para una cuerda con 11 cuentas y extremos fijos.

2.23 Muestre que las ecuaciones (73) y (74) dan las mismas respuestas para $N = 1$ y $N = 2$ que las obtenidas en las Secciones 1.2 y 1.4.

2.24 Dibuje las configuraciones de los cinco modos de una cuerda de 5 cuerdas correspondientes a las ecuaciones (78) a (80).

2.25 Haga una gráfica para la relación de dispersión del sistema mostrado en la Fig. 2.15.

2.26 Muestre que, para el sistema de péndulos acoplados dibujado en la figura 2.16, la ecuación de movimiento para la n -ésima pesa está dada (para pequeñas oscilaciones) por

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\frac{g}{l}\psi_n + \frac{K}{M}\left(\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a}\right) - \frac{K}{M}\left(\frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a}\right)$$

Demuestre que la solución general para un modo, sin tener en cuenta las condiciones de contorno, es

$$\psi_n(t) = \cos(\omega t + \varphi)[A \sin nka + B \cos nka].$$

Muestre que la relación de dispersión es

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2}$$

Demuestre que, para las condiciones de contorno dados en la Fig. 2.16 (o sea, sin resortes, acoplando a la pared las pesas de los extremos), la solución de más arriba se reduce a

$$\psi_n(t) = \cos(\omega t + \varphi)B \cos nka,$$

con la n -ésima pesa localizada en $z = (n - 1/2)a$. Muestre que el modo más bajo tiene $k = 0$. Dibuje su configuración. ¿Cuál sería el comportamiento del sistema en esta configuración si la constante gravitacional fuera reducida gradualmente a cero? Dibuje la configuración para $N = 3$ y dé las frecuencias para los tres modos.

2.27 Encuentre el sistema de inductancias y capacitancias acopladas "análogo" el sistema de péndulos acoplados de la Fig. 2.16, en el sentido que la ecuación de movimiento para la n -ésima inductancia tenga la misma forma que la ecuación de movimiento para la pesa del péndulo n -ésimo que encontró en el Problema 2.26. Encuentre la relación de dispersión.

2.28 Pase al límite continuo en el problema de péndulos acoplados (Problema 26). Muestre que la ecuación de movimiento resulta ser una ecuación de ondas de la forma.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi + v_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

2.29 Pruebe cada una de las siguientes sentencias numeradas usando dos métodos: (a) el método "físico" que utiliza los modos normales de una cuerda continua con condiciones de contorno adecuadas, y (b) el método del análisis de Fourier de una función periódica de z .

(i) Cualquier función (razonable) $f(z)$ definida entre $z=0$, y $z=L$, con valor cero en $z=0$ y pendiente cero en $z=L$ puede ser desarrollada en serie de Fourier de la forma:

$$f(z) = \sum_n A_n \operatorname{sen} nk_1 z; \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots; \quad k_1 L = \frac{\pi}{2}.$$

(Nota: Al usar el método del análisis de Fourier, debe primero construir una función periódica a partir de $f(z)$ para poder usar las fórmulas del análisis de Fourier.)

(ii) Cualquier función (razonable) $f(z)$ definida entre $z=0$ y $z=L$ y con pendiente cero en $z=0$ y $z=L$ puede ser desarrollada en una serie de Fourier de la forma

$$f(z) = B_0 + \sum_n B_n \cos nk_1 z; \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots; \quad k_1 L = \pi.$$

(iii) Cualquier función (razonable) $f(z)$ definida entre $z=0$ y $z=L$ y con pendiente cero en $z=0$ y valor cero en $z=L$ puede ser desarrollado en una serie de Fourier de la forma.

$$f(z) = \sum_n B_n \cos nk_1 z; \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots; \quad k_1 L = \frac{\pi}{2}.$$

2.30 Análisis de Fourier de una pulsación cuadrada repetida periódicamente.

Cuando se baten palmas periódicamente, la presión de aire resultante en el oído puede ser aproximada por una pulsación cuadrada repetida periódicamente. Representemos por $F(t)$ la presión medida en su oído. Tomemos $F(t)$ como +1 unidad para el pequeño intervalo de tiempo Δt , y cero antes y después de este intervalo. Esta "pulsación cuadrada" de altura unitaria y ancho Δt [en un gráfico de $F(t)$ en función de t], se repite periódicamente a intervalos de tiempo de longitud T_1 . El pequeño intervalo Δt de la duración del sonido de cada palmada. El período T_1 es el tiempo entre palmadas sucesivas. La frecuencia $\nu_1 = T_1^{-1}$ es la frecuencia de la palmada. Deberá analizar Fourier $F(t)$.

(a) Muestre que puede elegir el origen para t de manera que aparezcan solamente cosenos de $n\omega_1 t$, o sea, tal que

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t.$$

(b) Muestre que $B_0 = \Delta t/T_1$, que es exactamente la fracción de tiempo "sí". Muestre que

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi\nu_1 \Delta t), \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

(c) Muestre que para $\Delta t \ll T_1$, el "tono fundamental" ν_1 y las armónicas bajas $2\nu_1$, $3\nu_1$, $4\nu_1$, etc., tienen esencialmente el mismo valor para sus amplitudes de Fourier B_n .

(d) Dibuje B_n vs. $n\nu_1$ llegando hasta un n lo suficientemente alto como para que B_n haya pasado por cero dos o tres veces.

(e) Muestre, a partir de (d), que las frecuencias "más importantes" (o sea, aquellas con valores de B_n suficientemente grandes) van desde la fundamental,

ν_1 hasta la frecuencia del orden de $1/\Delta t$. En consecuencia, podemos denominar a $1/\Delta t$ como $\nu_{\text{máx}}$. Por supuesto, no hay realmente una frecuencia máxima puesto que la serie de Fourier se extiende hasta $n = \infty$. Sin embargo, las frecuencias más importantes caen entre cero y $\nu_{\text{máx}}$. La “banda de frecuencias” dominantes tiene un “ancho” aproximadamente igual a $\nu_{\text{máx}} = 1/\Delta t$. Por lo tanto, las frecuencias importantes son

$$\nu = 0, \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, 4\nu_1, \dots, \nu_{\text{máx}} = \frac{1}{\Delta t}$$

El ancho de banda de frecuencias dominantes puede denominarse $\Delta\nu$. Entonces su resultado puede escribirse

$$\Delta\nu \Delta t \approx 1.$$

Esta es una relación muy importante. Se cumple no solamente para nuestra pulsación supuesta $F(t)$, pulsación “cuadrada” repetida de ancho Δt , sino para toda forma de pulsación que pueda ser caracterizada como nula la mayor parte del tiempo y no nula para un tiempo del orden de Δt . Si (como en nuestro ejemplo, la pulsación se repite a intervalos T_1 , entonces las frecuencias dominantes son $0, \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1$, etc., hasta $1/\Delta t$. Si la pulsación no se repite, sino que tiene lugar una sola vez, entonces surge (como mostraremos en el Cap. 6) que el “espectro de Fourier” de frecuencias importantes, todavía ocupa la banda de frecuencias entre cero y aproximadamente $1/\Delta t$, pero es un espectro continuo que incluye todas las frecuencias de la banda y no solamente la fundamental, ν_1 y sus armónicas.

Este problema puede ayudarle a comprender el espectro de frecuencias de la radiación electromagnética llamada *radiación de sincrotrón* que es emitida por un electrón relativista que realiza un movimiento circular uniforme. Puede demostrarse (Cap. 7) que un electrón no relativista en movimiento circular uniforme de frecuencia ν_1 emite radiación electromagnética de frecuencia ν_1 . Esto se debe a que el campo eléctrico en la radiación para velocidades electrónicas no relativistas es proporcional a la componente de la aceleración de la carga perpendicular a la línea de visual de la carga al observador. Para movimiento circular, esta aceleración proyectada es simplemente movimiento armónico. En consecuencia, para un electrón no relativista el campo irradiado es proporcional al coseno (o seno) de $\omega_1 t$. Para un electrón relativista, el campo irradiado no tiene la dependencia temporal $\cos \omega_1 t$. En cambio, la radiación está muy fuertemente concentrada en una dirección paralela a la dirección instantánea de la velocidad de la carga. Cuando el electrón se dirige directamente hacia el observador, está emitiendo radiación que será detectada después por el observador. En otros momentos, la radiación no alcanzará al observador. En consecuencia el campo eléctrico medido por el observador es fuerte durante un pequeño intervalo Δt una vez en cada período T_1 , y casi cero durante el resto del período. Por lo tanto el espectro de frecuencias observado consiste en $\nu_1 = 1/T_1$ y sus armónicas $2\nu_1, 3\nu_1$; etc., hasta una máxima frecuencia (importante) del orden de $1/\Delta t$. Muestre que el intervalo de tiempo Δt está dado groseramente por $\Delta t/T_1 \approx \Delta\theta/2\pi$, donde $\Delta\theta$ es el “ancho completo angular” del patrón de radiación.

2.31 Ondas estacionarias, diente de sierra en aguas bajas. Las ondas de aguas bajas son aquellas cuya amplitud de movimiento es comparable en magnitud en la superficie o en el fondo del lago, océano o cubeta. El modo salpicante (Exp. casero 1.24) es una onda de aguas bajas. Muestre esto experimentalmente revolviendo algunos granos de café en el agua de manera que algunos estén cerca del fondo. Excite el modo salpicante (en el que la superficie permanece esencialmente plana) y observe el movimiento de los granos de café en el fondo y en la superficie cerca del centro de la cubeta. Observe también cerca de las paredes de los extremos.

Considere ahora la siguiente *onda estacionaria diente de sierra en aguas bajas*. Suponga que tiene dos cubetas independientes de la misma forma y con agua de igual profundidad de equilibrio, h , oscilando en el modo balanceo. Las cubetas son adyacentes de forma tal que si no hubiera pared divisoria formarían una cubeta alargada según la dirección horizontal de oscilación. Suponga que las fases de las oscilaciones son tales que el agua de una cubeta siempre se mueve opuesta horizontalmente a la de la otra, haciendo que el agua en ambas fuentes se acumule hasta su máxima altura al mismo tiempo sobre la pared que las separa. Imagine que ahora suprime las paredes que separan ambas cubetas. El agua en la superficie límite no tenía movimiento horizontal cuando las paredes estaban en su lugar. Todavía sigue sin tenerlo debido a la simetría del movimiento de las dos masas de agua (ahora unidas formando un largo cuerpo). ¡El movimiento debería continuar sin cambios! Podemos seguir uniendo cubetas si así lo deseamos. Tenemos así una onda estacionaria con forma dientes de sierra. Aproximemos esa forma por una onda seno. Entonces vemos que *la longitud de una cubeta equivale a media longitud de onda*. (Nota: Si usted analiza Fourier esta función periódica de z , el primer y más dominante término en el desarrollo será aquel que estamos usando para aproximar los dientes de sierra.) Use esa aproximación en la fórmula que da la frecuencia del modo salpicante (vea Exp. casero 1.24). Muestre que obtiene

$$\lambda\nu = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{gh} = 1,10\sqrt{gh}.$$

Vemos que *estas ondas son no dispersivas* (Nota: Aparece que la relación de dispersión exacta para ondas sinusoidales de agua poco profunda es $\lambda\nu = \sqrt{gh}$. Nuestra aproximación diente de sierra da una velocidad de propagación 10 % más alta.)

Para *ondas de agua profunda* (ondas donde la profundidad de equilibrio del agua es grande comparada con la longitud de onda) la amplitud de la onda decae exponencialmente con la profundidad debajo de la superficie, con una disminución de amplitud en un factor de $e = 2,718 \dots$ para todo aumento de profundidad de $\lambda \equiv \lambda/2\pi$, donde λ (lambda barra) se llama longitud de onda reducida. En una aproximación grosera, podemos decir que una onda de agua profunda es algo así como una onda de agua baja desde la superficie hasta una profundidad de $h = \lambda$, puesto que en esa región la amplitud es relativamente grande y aproximadamente constante, mientras que para profundidades mucho mayores que λ , la amplitud es muy pequeña. Así, imaginemos que la relación de dispersión para ondas de agua profunda puede obtenerse de la relación para aguas bajas, reemplazando la profundidad de equilibrio h para aguas bajas por la longitud promedio de atenuación de amplitud λ para ondas de agua profunda. La conjetura es correcta como veremos en el Capítulo 7. Por lo tanto, la relación de dispersión para ondas de agua profunda está dada por $\lambda\nu = \sqrt{g\lambda}$.

2.32 Análisis de Fourier de una onda diente de sierra simétrica. Por diente de sierra simétrico queremos significar aquel cuyos bordes anterior y posterior tienen la misma inclinación. Sea $z = 0$ en una de las crestas (puntas de diente). Muestre que la función diente de sierra periódica $f(z)$ tiene una serie de Fourier dada por:

$$f(z) = 0,82A[\cos k_1 z + \frac{1}{4} \cos 2k_1 z + \frac{1}{9} \cos 3k_1 z + \dots],$$

donde $k_1 = 2\pi/\lambda_1$, siendo λ_1 la longitud del diente (de una cresta a la siguiente), y A es la amplitud del diente, o sea, $2A$ es la distancia vertical desde el mínimo (en un valle) hasta el máximo (en una cresta). En consecuencia, vemos que la

contribución del término n -ésimo tiene amplitud proporcional a $1/n^2$. Esto le dirá algo acerca de nuestra buena aproximación en el Problema 2.31, donde aproximamos el diente de sierra por su primer componente de Fourier para obtener la relación de dispersión $\lambda v = 1,10 \sqrt{gh}$.

2.33 Modos de tensión superficial. Las ondas circulares de tensión superficial pueden demostrarse claramente cómo sigue: llene de agua hasta el borde una taza de papel o telgopor y luego agregue un poco más, de forma que el agua se combe por encima de la parte superior de la taza. Golpee suavemente la taza; ¡Observe! Para ver las ondas más fácilmente fíjese en la reflexión del cielo. Alternativamente, use una pequeña luz brillante mantenida varios pies por encima de la superficie y observe el patrón en el fondo causado por el efecto de lente de las ondas. Para ver que está implicada la tensión superficial, pruebe agregar un poco de detergente al agua.

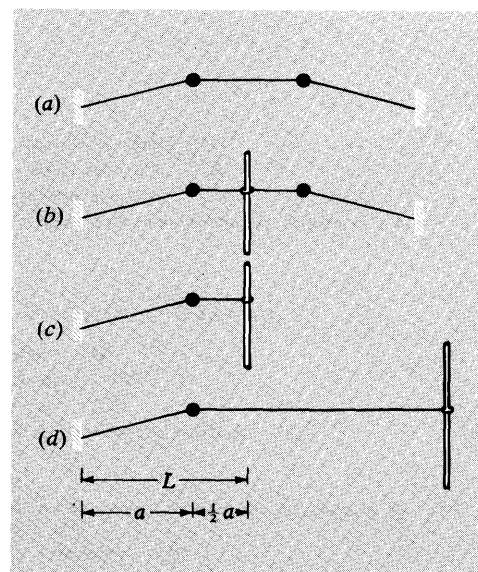
Experimento casero

2.34 Condiciones de contorno en el extremo libre de una cuerda. Considere los cuatro sistemas distintos mostrados en la figura.

(i) Demuestre que los cuatro tienen la misma frecuencia en los modos dibujados.

(ii) Suponga que quiere usar la misma fórmula para los vínculos sobre el número de onda en los casos (c) y (d) que la usada en el (a). Entonces muestre que en esos casos el L de su fórmula debe ser igual a $3/2a$. Dé la fórmula.

2.35 Una cuerda flexible, de longitud L , se estira con una tensión de equilibrio T entre los extremos fijos. Su masa por unidad de longitud es ρ , de forma que su masa total es $M = \rho L$. La cuerda se pone a vibrar con un golpe de martillo que imparte impulsivamente una velocidad transversal v_0 a un pequeño segmento central de longitud a . Evalúe las amplitudes de los tres armónicos más bajos excitados.



Capítulo 3

Oscilaciones forzadas

3.1 Introducción 110

3.2 Oscilador armónico unidimensional amortiguado 110

Decaimiento transitorio de oscilaciones libres	111
Oscilación estacionaria bajo una fuerza impulsora armónica	113
Amplitudes absorbente y elásticas	113
Resonancia	116
Ejemplo 1: Tiempo de decaimiento para un tubo de cartón	117
Dependencia entre la frecuencia y la amplitud elástica	118
Otras « curvas de resonancia »	119

Oscilaciones forzadas transitorias	121
Oscilador inicialmente no perturbado	122
Caso 1: La frecuencia impulsora es igual a la de oscilación natural	122
Caso 2: Amortiguamiento nulo y pulsaciones interminables	122
Caso 3: Pulsaciones transitorias	124
Deducción cualitativa de la forma de la resonancia	125

3.3 Resonancias en sistemas con dos grados de libertad 126

Ejemplo 2: Oscilaciones forzadas de dos péndulos acoplados	128
Cada modo actúa como oscilador forzado	129
Cada parte se mueve como superposición de modos formados	129

Oscilaciones forzadas de un sistema de muchos péndulos acoplados	131
--	-----

3.4 Filtros 131

Ejemplo 3: Dos péndulos acoplados como filtro mecánico	133
Corte de alta frecuencia	133
Corte de baja frecuencia	134
Nomenclatura	136
Ejemplo 4: Filtro de banda mecánico	136

Ejemplo 5: Filtro pasabajos mecánico	137
Ejemplo 6: Filtro de banda eléctrica	138
Ejemplo 7: Filtro pasabajos eléctrico	139
Ejemplo 8: Filtro pasabajos para una fuente de corriente continua	140

3.5 Oscilaciones forzadas de sistemas cerrados con muchos grados de libertad 141

Inobservancia del amortiguamiento	141
Fases relativas de las partes móviles	142
Ejemplo 9: Péndulos acoplados	142
Aproximación continua	144
Ecuación de ondas de Klein-Gordon	144
Ondas sinusoidales para ω por encima del corte de baja frecuencia	145
Ondas exponenciales para ω por debajo del corte de baja frecuencia	145
Péndulos acoplados como filtro pasaaltos	146
Nomenclatura para ondas exponenciales	147

Relaciones de dispersión	149
Medio dispersivo o reactivo	149
Ejemplo 10: La ionósfera	150
Penetración de ondas en una región reactiva	151
Resonancia	152
Modos ligados	152
Solución exacta para oscilaciones forzadas de un sistema de péndulos acoplados	154
Rango de frecuencias dispersivo	155
Rango reactivo bajo	155
Rango reactivo alto	156

Problemas y experimentos caseros 158

Capítulo 3 *Oscilaciones forzadas*

3.1 *Introducción*

En los Capítulos 1 y 2 estudiamos las oscilaciones libres de diversos sistemas. En el presente capítulo estudiaremos las oscilaciones *forzadas* de estos sistemas. Esto significa que investigaremos el comportamiento de los sistemas cuando de alguna manera se aplica sobre el sistema una fuerza dada exterior dependiente del tiempo. Sin pérdida de generalidad, nos especializaremos en fuerzas impulsoras armónicamente oscilantes e investigaremos la respuesta del sistema como función de la frecuencia.

En la Sección 3.2 revisaremos las oscilaciones libres de un oscilador armónico unidimensional amortiguado. Después nos fijaremos en la respuesta transitoria cuando al oscilador amortiguado parte del reposo y es empujado por una fuerza armónicamente oscilante. Encontraremos el interesante fenómeno de las “pulsaciones transitorias” entre la fuerza impulsora y la oscilación libre “transitoria”. Luego estudiaremos las oscilaciones en estado estacionario que permanecen después que las transitorias han decaído a cero. Examinaremos la respuesta resonante del oscilador forzado a medida que variamos gradualmente la frecuencia impulsora. En la Sección 3.3 estudiaremos un sistema con dos grados de libertad y encontraremos que cada modo de oscilación libre corresponde al movimiento impulsado de una parte dada móvil. En efecto, deduciremos el sencillo resultado de que el movimiento de una parte dada es una superposición de contribuciones independientes, una de cada modo. En la Sección 3.4 descubriremos el importante comportamiento de un sistema de varios grados de libertad que se lleva a una frecuencia por encima o por debajo de la correspondiente a su modo más bajo. En la Sec. 3.5 estudiaremos el comportamiento de un sistema forzado de muchos péndulos acoplados. Como consecuencia, seremos conducidos al descubrimiento de las ondas exponenciales.

Todos los fenómenos discutidos en este capítulo pueden estudiarse experimentalmente, en sencillos experimentos caseros, con péndulos acoplados usando un “slinky” como resorte de acoplamiento, latas tamaño standard (que encajan muy bien dentro del “slinky”) como pesas y un plato de tocadiscos para fuerza impulsora.

3.2 *Oscilador armónico unidimensional amortiguado*

Esta sección es en parte una revisión del Capítulo 7, Vol. 1, donde se estudiaron las oscilaciones libres y las forzadas en estado estacionario de un oscilador amortiguado. También consideraremos la “respuesta transitoria” del oscilador bajo una fuerza impulsora armónica cuando está inicialmente en reposo en su posición de equilibrio.

Considere una masa puntual M oscilando en la dirección x . Su desplazamiento del equilibrio es $x(t)$. La masa M sufre una fuerza restauradora $-M\omega_0^2 x(t)$ debida a un resorte de constante elástica $K = M\omega_0^2$. Si no hubiera otra fuerza, la masa oscilaría armónicamente con frecuencia angular ω_0 . La masa experimenta también una fuerza de *resistencia a la fricción* $-M\Gamma\dot{x}(t)$, donde Γ es una constante que podemos llamar *constante de amortiguamiento por unidad de masa*, o simplemente constante de amortiguamiento. Por último, la masa está sujeta a una *fuerza exterior* $F(t)$. La segunda ley de Newton da entonces la ecuación de movimiento de M , ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea.

$$M\ddot{x}(t) = -M\omega_0^2 x(t) - M\Gamma\dot{x}(t) + F(t). \quad (1)$$

Primero consideremos el caso en que no hay fuerza exterior.

Decaimiento transitorio de oscilaciones libres. La ecuación de movimiento (1) se hace

$$\ddot{x}(t) + \Gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \quad (2)$$

Probaremos una solución $x_1(t)$ de la forma

$$x_1(t) = e^{-(1/2)t/\tau} \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (3)$$

donde τ , ω_1 y θ son incógnitas. Por sustitución directa, encontramos que la ecuación (3) da una solución de la (2) para *todo* valor de la constante de fase θ , siempre que elijamos

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (4)$$

y

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2. \quad (5)$$

La solución general de la ecuación (2) es una superposición de dos soluciones linealmente independientes con dos constantes "arbitrarias", que pueden elegirse para concordar con el desplazamiento y velocidad iniciales $x_1(0)$ y $\dot{x}_1(0)$. Pueden obtenerse dos soluciones independientes haciendo θ igual a cero o $-\frac{1}{2}\pi$ (por ejemplo). En consecuencia, puede escribirse la solución general en la forma

$$x_1(t) = e^{-(1/2)\Gamma t}(A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t). \quad (6)$$

Fácilmente se ve que las constantes A_1 y B_1 están dadas por $B_1 = x_1(0)$ y por $\omega_1 A_1 = \dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\Gamma x_1(0)$. Entonces, la ecuación (6) da

$$x_1(t) = e^{-(1/2)\Gamma t} \left\{ x_1(0) \cos \omega_1 t + \left[\dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\Gamma x_1(0) \right] \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right\} \quad (7)$$

Cuando $\frac{1}{2}\Gamma$ es pequeño comparado con ω_0 , se dice que la oscilación es *débilmente amortiguada*. Cuando $\frac{1}{2}\Gamma$ es igual a ω_0 , el movimiento se llama *críticamente amortiguado*. En ese caso, la ecuación (5) da ω_1 nula. Entonces, en la solución (7) reemplazamos $\cos \omega_1 t$ por 1 y $(1/\omega_1) \sin(\omega_1 t)$ por t , puesto que el límite de $(1/\omega_1) \sin \omega_1 t$, cuando ω_1 tiende a cero, es exactamente t .

Cuando $\frac{1}{2}\Gamma$ es mayor que ω_0 , se dice que el oscilador está *sobreamortiguado*. En ese caso, la ecuación (5) da ω_1^2 negativa. Esto significa que

$$\omega_1 = \pm i|\omega_1|, \quad |\omega_1| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (8)$$

donde i es la raíz cuadrada de -1 . La solución (7) sigue valiendo y puede escribirse en la forma (Prob. 3.25)

$$x_1(t) = e^{-(1/2)\Gamma t} \left\{ x_1(0) \cosh |\omega_1| t + \left[\dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\Gamma x_1(0) \right] \frac{\sinh |\omega_1| t}{|\omega_1|} \right\} \quad (9)$$

Solamente nos ocupamos del caso donde $\frac{1}{2}\Gamma$ es menor que ω_0 , en el cual se dice que el oscilador está *subamortiguado*. Esto incluye el caso de amortiguamiento débil, donde tenemos $\frac{1}{2}\Gamma \ll \omega_0$. En este caso, podemos considerar que el factor exponencial $e^{-(1/2)\Gamma t}$ es esencialmente constante durante cualquier ciclo de oscilación. Entonces, la velocidad se obtiene con una aproximación suficientemente buena tomando la derivada temporal de la ecuación (6) con $e^{-(1/2)\Gamma t}$ como constante. Luego se demuestra fácilmente que la energía (cinética más potencial) es esencialmente constante durante cualquier ciclo, pero decrece exponencialmente en un intervalo de tiempo que incluye muchos ciclos:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2(t) + \frac{1}{2}M\omega_0^2 x_1^2(t) \\ &= E_0 e^{-\Gamma t} = E_0 e^{-t/\tau}, \end{aligned} \quad (10)$$

donde

$$E_0 = \frac{1}{2}M(\omega_1^2 + \omega_0^2)(\frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}B_1^2). \quad (11)$$

Volvemos ahora al caso de un oscilador subamortiguado sujeto a una fuerza externa no nula $F(t)$.

Oscilación estacionaria bajo una fuerza impulsora armónica. Una clase muy grande de funciones $F(t)$ puede ser desarrollada con una serie de Fourier sobre varias frecuencias:

$$F(t) = \sum_{\omega} f(\omega) \cos [\omega t + \varphi(\omega)]. \quad (12)$$

Por ejemplo, como vimos en la Sección 2.3, cualquier periódica (razonable) $F(t)$ puede desarrollarse de esta forma. Además, también pueden desarrollarse en serie o integral de Fourier muchas funciones no periódicas, como veremos en el Capítulo 6. Considere una componente de Fourier de una fuerza

$$F(t) = F_0 \cos \omega t, \quad (13)$$

donde hemos elegido el origen del tiempo de manera de anular la constante de fase. Una vez que sabemos cómo encontrar $x(t)$ para una fuerza impulsora armónica como la de ecuación (13), podemos encontrar $x(t)$ para una superposición como la de ecuación (12). Esto se debe, de acuerdo a nuestra discusión de la sección 1.3, a que la ecuación lineal no homogénea satisface un principio de superposición tal que la solución correspondiente a una superposición de distintas fuerzas exteriores es la superposición de las soluciones individuales. En consecuencia, sólo necesitamos considerar la ecuación no homogénea con una fuerza externa de un único componente armónico:

$$M\ddot{x}(t) + M\Gamma\dot{x}(t) + M\omega_0^2 x(t) = F_0 \cos \omega t. \quad (14)$$

Queremos encontrar la *solución de estado estacionario* de la ecuación (14). Ésta da el movimiento del oscilador después que la fuerza impulsora armónica ha sido aplicada durante un tiempo muy largo en comparación con el decaimiento, τ . Entonces, las “oscilaciones transitorias”, que describen el comportamiento medio posteriores a la aplicación de la fuerza impulsora, han decaído a cero. El oscilador experimenta entonces oscilaciones armónicas a la frecuencia ω . No hay constantes ajustables o “arbitrarias”. La amplitud de oscilación es proporcional a la amplitud F_0 de la fuerza impulsora. La constante de fase tiene una relación definida con la constante de fase de la fuerza impulsora.

Amplitudes absorbentes y elásticas. Más que describir la oscilación en términos de su amplitud y constante de fase, podemos hacerlo en términos de dos amplitudes A y B que dan la componente de oscilación $A \sin \omega t$ que está 90° desfasada con la fuerza impulsora $F_0 \cos \omega t$ y la

componente de oscilación $B \cos \omega t$ que está en fase con la fuerza impulsora. Por lo tanto, la solución de estado estacionario $x_e(t)$ puede escribirse

$$x_e(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (15)$$

eligiendo A y B adecuadas. Puede verificar por sustitución directa que $x_e(t)$ satisface la ecuación (14) si y sólo si A y B están dadas por

$$A = \frac{F_0}{M} \frac{\Gamma \omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2]} \equiv A_{ab}, \quad (16)$$

$$B = \frac{F_0}{M} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2]} \equiv A_{el}. \quad (17)$$

La constante A_{ab} se llama *amplitud absorbente*. A_{el} se llama *amplitud elástica*. (Algunas veces llamada “dispersiva”.) Se eligen estos nombres porque la absorción media temporal de potencia consumida se debe enteramente al término $A_{ab} \sin \omega t$. $A_{el} \cos \omega t$ contribuye a la absorción de potencia instantánea, pero se promedia a cero sobre un ciclo de oscilación estacionaria. Estos resultados provienen del hecho de que la potencia instantánea $P(t)$ es el producto de la fuerza $F_0 \cos \omega t$ por la velocidad $\dot{x}(t)$. La velocidad instantánea tiene una contribución en fase con la fuerza y una contribución a 90° desfasada con la fuerza. Solamente la contribución en fase afecta al *promedio temporal de potencia*, P . A esta velocidad “en fase” contribuye el desplazamiento “desfasado”, $A_{ab} \sin \omega t$. Vemos estas relaciones algebraicas como sigue:

$$\begin{aligned} F(t) &= F_0 \cos \omega t, \\ x_e(t) &= A_{ab} \sin \omega t + A_{el} \cos \omega t, \\ \dot{x}_e(t) &= \omega A_{ab} \cos \omega t - \omega A_{el} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Entonces, la potencia consumida instantánea en el estado estacionario está dada por

$$P(t) = F(t)\dot{x}_e(t) = F_0 \cos \omega t [\omega A_{ab} \cos \omega t - \omega A_{el} \sin \omega t]. \quad (18)$$

Denotando el promedio temporal sobre un ciclo con paréntesis angulares $\langle \rangle$ encontramos

$$P = F_0 \omega A_{ab} \langle \cos^2 \omega t \rangle - F_0 \omega A_{el} \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle.$$

Pero

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2}, \quad (19)$$

Donde T es el período de oscilación. Análogamente,

$$\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0. \quad (20)$$

Así obtenemos la potencia consumida en el estado estacionario en promedio temporal

$$P = \frac{1}{2} F_0 \omega A_{ab}. \quad (21)$$

En la ecuación (21) hemos verificado que P es proporcional a la amplitud A_{ab} del desplazamiento estacionario $\dot{x}_e(t)$ que está desfasado 90° grados respecto a la fuerza impulsora. Este resultado es independiente de la convención de fase por lo cual elegimos la fuerza proporcional a $\cos \omega t$ más que a la expresión general $\cos(\omega t + \varphi)$.

En estado estacionario, la potencia media temporal debe igualar al promedio temporal de potencia disipada por fricción. La fuerza de rozamiento instantánea es $-M\Gamma\dot{x}(t)$. La potencia de rozamiento instantánea es el producto de la fuerza de rozamiento por la velocidad. Puede fácilmente demostrarse que la potencia media temporal perdida por fricción está dada por

$$\begin{aligned} P_{fr} &= M\Gamma \langle \dot{x}_s^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} M\Gamma \omega^2 [A_{ab}^2 + A_{el}^2], \end{aligned} \quad (22)$$

y que esto es, en efecto, igual a la potencia consumida media temporal P dada por la ecuación (21). (Véase Prob. 3.6.)

En el estado estacionario, la energía almacenada en el oscilador no es perfectamente constante porque el consumo de potencia instantáneo $\dot{x}_e(t)F(t)$ dado por la ecuación (18) no iguala a la pérdida instantánea de potencia por rozamiento, $M\Gamma\dot{x}_e^2(t)$. Sólo cuando promediamos sobre un ciclo, el consumo y la pérdida de potencia debido a la fricción son iguales. Estamos interesados en el promedio temporal de la energía almacenada. Puede fácilmente demostrarse que para una oscilación en estado estacionario el promedio temporal de la energía almacenada E está dado por:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} M \langle \dot{x}_s^2 \rangle + \frac{1}{2} M \omega_0^2 \langle x_s^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} M (\omega^2 + \omega_0^2) (\frac{1}{2} A_{ab}^2 + \frac{1}{2} A_{el}^2). \end{aligned} \quad (23)$$

(Véase Prob. 3.10.) Note que el término con ω^2 es el promedio temporal de energía cinética y el término en ω_0^2 es el promedio temporal de energía potencial. Son iguales sólo cuando $\omega = \omega_0$. (Recuerde que para un oscilador *libre* débilmente amortiguado los promedios temporales de energía cinética y potencial son iguales.) Este hecho puede entenderse

cualitativamente como sigue: Si ω es grande comparada con ω_0 , la velocidad de M se invierte antes de que tenga posibilidades de adquirir un desplazamiento mayor y, de este modo, antes de que pueda adquirir una gran energía potencial almacenada en el resorte. Por otro lado, si ω es pequeña comparada con ω_0 la velocidad nunca se hace muy grande y entonces domina la energía potencial media temporal.

Note que para $\omega = \omega_0$, la energía almacenada E dada por la ecuación (23), es igual al producto de la potencia de estado estacionario disipada [dada por la ec. (22)], por el tiempo de decaimiento para oscilación libre τ . Esto se entiende cualitativamente: Si apagáramos la fuerza impulsora, la fricción hacía decaer exponencialmente la energía del oscilador con un tiempo de decaimiento medio τ , como muestra la ecuación (10). Cuando impulsamos el oscilador a su frecuencia natural, que es esencialmente ω_0 para amortiguamiento débil, la amplitud de oscilación continúa creciendo hasta que, en estado estacionario, la potencia consumida se iguala con la pérdida de potencia por fricción. Puesto que la fricción disipa la mayor parte de la energía en un tiempo τ , la energía de estado estacionario almacenada es igual a la proporcionada “recientemente” por la fuerza impulsora, o sea, dentro del intervalo de tiempo τ . En consecuencia, esperamos que en el equilibrio la energía almacenada será aproximadamente igual a la potencia consumida multiplicada por τ , que es igual a la potencia de rozamiento por τ . Hemos visto que, efectivamente, éste es el caso, para $\omega = \omega_0$. (Para ω distinto de ω_0 es menos fácil acertar con la relación.)

Resonancia. Seguidamente consideraremos la variación en la respuesta del oscilador cuando variamos gradualmente la fuerza impulsora, manteniendo siempre una frecuencia esencialmente constante durante cualquier intervalo de duración, igual a muchos tiempos de caída τ , manteniendo de esta forma un estado esencialmente estacionario. El promedio temporal de potencia P consumida está dado por [ecs. (21) y (16)]

$$P = P_0 \frac{\Gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}, \quad (24)$$

donde P_0 es el valor de P “en resonancia”, o sea, $\omega = \omega_0$. El valor máximo de P tiene lugar en la resonancia. Los puntos de “semipotencia” se definen como aquellos valores de ω para los que P toma la mitad de su valor máximo. Puede mostrar que los puntos de semipotencia están dados por (Prob. 3.11)

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma \omega, \quad (25)$$

lo que es equivalente a

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \pm \frac{1}{2}\Gamma. \quad (26)$$

[Note que en la ecuación (25) hay dos ecuaciones cuadráticas en ω separadas. Cada una de ellas tiene una solución positiva y otra negativa. Las dos soluciones positivas dan la ecuación (26)]. El intervalo de frecuencias entre los dos puntos de semipotencia se llama *ancho completo de frecuencia a potencia semimáxima*, o sea, simplemente *ancho completo de resonancia* y se escribe $(\Delta\omega)_{\text{afap}}$ o simplemente $\Delta\omega$. De acuerdo con la ecuación (26),

$$(\Delta\omega)_{\text{afap}} = \Gamma. \quad (27)$$

Ya hemos encontrado [ec. (4)] que las oscilaciones libres tienen un tiempo medio de decaimiento τ dado por $\tau = 1/\Gamma$. Hemos hallado, en consecuencia, una relación muy importante entre el ancho completo de resonancia para oscilaciones *forzadas* y el tiempo medio de decaimiento para oscilaciones *libres*:

$$(\Delta\omega)_{\text{res}} \tau_{\text{libre}} = 1. \quad (28)$$

En palabras, *el ancho de frecuencia de la curva de resonancia para oscilaciones forzadas es igual a la inversa del tiempo de decaimiento para oscilaciones libres*. Este resultado es de carácter muy general. Se cumple no sólo para sistemas de un grado de libertad, sino también para sistemas de muchos grados de libertad, como mostramos más adelante. En esos casos aparecen resonancias a las frecuencias de los modos normales para oscilación libre no amortiguada, como ocurría para el oscilador armónico unidimensional. (La frecuencia de resonancia ω_0 sólo es igual a la de oscilaciones libres ω_1 si la constante de amortiguamiento Γ es nula. En las oscilaciones libres amortiguadas la frecuencia es “empujada” de ω_0 a ω_1 , a causa del factor de amortiguación $e^{-(1/2)\Gamma t}$. En oscilaciones forzadas la amplitud es constante y la frecuencia resonante es lo que sería la frecuencia de oscilación libre si no hubiese amortiguación.) Cuando hay varios grados de libertad, el ancho de resonancia y el tiempo de decaimiento libre para cada modo satisfacen la ecuación (28), si las resonancias están lo suficientemente separadas en la frecuencia como para no “superponerse”.

La ecuación (28) tiene consecuencias experimentales muy importantes. A menudo es más fácil observar la respuesta resonante de un sistema que su decaimiento libre. En ese caso, se puede obtener el tiempo medido de decaimiento para oscilación libre estudiando la respuesta resonante tal como para obtener $\Delta\omega$. El tiempo de decaimiento se obtiene entonces de la ecuación (28).

Ejemplo 1: Tiempo de decaimiento para un tubo de cartón

Esta es una aplicación ilustrativa de la ecuación (28) a un sistema de muchos grados de libertad. Consiga un tubo de cartón, para embalaje.

Excítelo bruscamente y luego déjelo decaer libremente. Para hacer esto, pegue nuevamente con el tubo contra su cabeza. El golpe excita principalmente el modo más bajo, en el cual la longitud del tubo es media longitud de onda. El sistema oscila. Irradia energía sonora por los extremos y también pierde algo de energía sonora por “fricción” del aire que roza las paredes rugosas del tubo (o sea, la energía sonora se convierte en “calor”). Por lo tanto, tenemos oscilaciones amortiguadas. La pregunta es, ¿cuál es el tiempo medio de decaimiento? Su oído reconoce fácilmente que hay una frecuencia dominante igual a la que oye cuando sopla continuamente perpendicular al extremo del tubo. Sin embargo, el tiempo de decaimiento es demasiado rápido para ser medido con el oído desnudo. Tiene dos alternativas. Puede conseguir un micrófono, un amplificador de audio y un osciloscopio al mismo tiempo que excita las oscilaciones y conecta la salida del amplificador a las placas verticales. (Esto se hace más fácilmente con un buen osciloscopio que tenga un “disparador interno”, de manera que el comienzo de la salida del amplificador pueda ser utilizado para iniciar el barrido.) Fotografíe el trazo del osciloscopio y mida τ directamente, o también, en forma indirecta, de la siguiente manera: Consiga un generador de señales de audio. Haga que alimente un pequeño altavoz colocado en la entrada del tubo. Esto mantiene el tubo en oscilaciones en estado estacionario a la frecuencia de la señal. Capte con su micrófono la radiación salida por el otro extremo del tubo, mida la amplitud de la onda en el osciloscopio. Varíe ahora la frecuencia impulsora. [Experimentalmente puede ser fácil mantener la frecuencia impulsora constante y variar la longitud del tubo con un trombón. Trace un gráfico del cuadrado de la amplitud en función de la inversa de la longitud del tubo (¿por qué la inversa?).] Encuentre los puntos de semipotencia. Esto da $\Delta\omega$. Luego use la ecuación (28) para encontrar τ .

Aun sin este equipo, puede trabajar bastante bien. Use un diapasón y cinco o seis tubos idénticos excepto en longitud. Mueva el diapasón rápidamente sobre la fila de tubos y trate de decidir acerca del “ancho completo a potencia de salida semimáxima”. Puede ingeniárselas para encontrar una manera de reconocer un factor de dos en la intensidad de un tono dado. En todo caso puede estimar $\Delta\omega$ (y, por consiguiente, el tiempo de decaimiento) dentro de un factor de dos. He encontrado que los tiempos de decaimiento típicos para tubos de encomiendas son de 20 a 50 miliseg. (Véase Exp. casero 3.27)

Dependencia entre la frecuencia y la amplitud elástica. El término $A_{el} \cos \omega t$ en la oscilación en estado estacionario $x_e(t)$ es la parte de $x_e(t)$ que está en fase con la fuerza impulsora $F_0 \cos \omega t$. Como ya hemos discutido, no contribuye al promedio temporal de energía absorbida. Más aún, en resonancia (o sea, en $\omega = \omega_0$), A_{el} es nula. ¿Significa esto que A_{el} no es importante? No. A frecuencias impulsoras que estén *lejos*

de la resonancia, el término elástico es dominante. Vemos esto como sigue: La amplitud elástica está dada por la ecuación (17)

$$A_{el} = \frac{F_0}{M} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \quad (29)$$

La relación de amplitudes de la elástica a la absorbente está dada por [véase ecs. (16) y (17)]

$$\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Gamma \omega}. \quad (30)$$

Para $\omega < \omega_0$, vemos que A_{el}/A_{ab} es positivo y puede hacerse tan grande como se quiera eligiendo ω suficientemente pequeño. Para ω mayor que ω_0 , A_{el}/A_{ab} es negativo y puede hacerse tan grande en magnitud como se quiera eligiendo ω suficientemente grande. Para cualquiera de los casos tenemos $\Gamma \omega \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$, y podemos despreciar la contribución de $A_{ab} \sin \omega t$ a $x_e(t)$ si es que queremos despreciar al pequeño promedio temporal de potencia. (Cuando estamos lejos de la resonancia, la absorción de potencia es muy pequeña comparada con la que tiene lugar en resonancia.) En consecuencia, lejos de la resonancia la solución estacionaria está dada por $A_{el} \cos \omega t$, con A_{el} obtenido despreciando el término $\Gamma^2 \omega^2$ en el denominador de la ecuación (29)

$$x_e(t) \approx A_{el} \cos \omega t \approx \frac{F_0 \cos \omega t}{M(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (31)$$

Note que la constante de amortiguamiento ha desaparecido completamente del resultado (31). En efecto, es fácil ver que la ecuación (31) da la solución estacionaria *exacta* a la ecuación de movimiento (14), si hacemos $\Gamma = 0$ en esa ecuación (Prob. 3.13).

En la Fig. 3.1 damos gráficamente las amplitudes elástica y absorbente cerca de la resonancia.

Otras “curvas de resonancia”. El comportamiento de los osciladores armónicos forzados es descrito por varias cantidades diferentes, todas las cuales tienen “formas de resonancia” similares (pero no idénticas), cuando se esquematizan en función de la frecuencia. Estas cantidades son la amplitud absorbente A_{ab} , la amplitud al cuadrado, $|A|^2 \equiv A_{el}^2 + A_{ab}^2$, la potencia consumida (que también es igual a la disipada) y la energía almacenada E . En este párrafo escribiremos todas ellas a los efectos comparativos. De las ecuaciones (16), (17), (22) y (23) tenemos

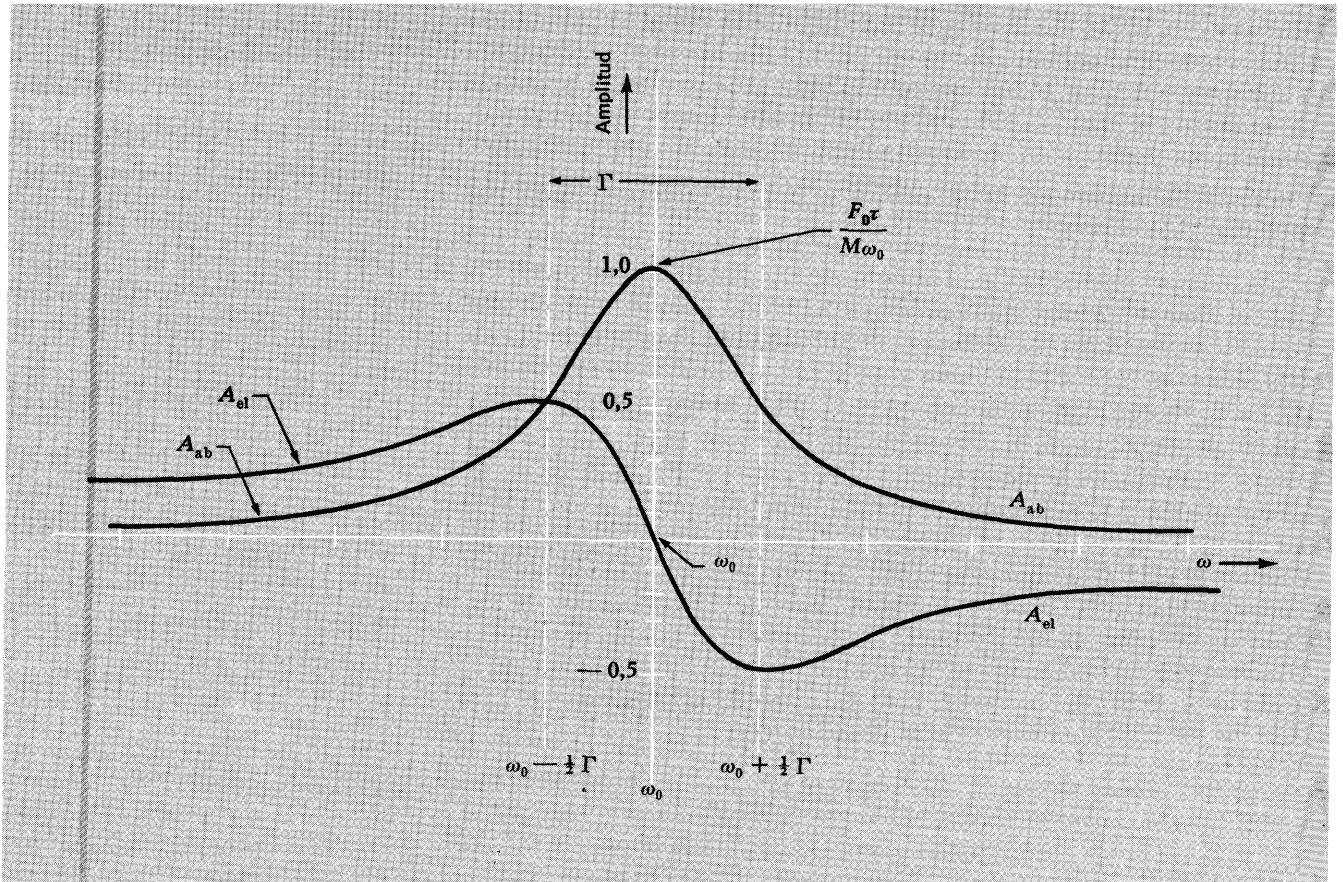


Fig. 3.1 Resonancia en un oscilador impulsado. Cuando el oscilador está sujeto a la fuerza externa $F_0 \cos \omega t$, la oscilación en estado estacionario es $x_e(t) = A_{ab} \sin \omega t + A_{el} \cos \omega t$.

$$A_{ab}(\omega) = A_{ab}(\omega_0) \frac{\Gamma^2 \omega_0 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}, \quad (32)$$

$$|A(\omega)|^2 = |A(\omega_0)|^2 \frac{\Gamma^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}, \quad (33)$$

$$P(\omega) = P(\omega_0) \frac{\Gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}, \quad (34)$$

$$E(\omega) = E(\omega_0) \frac{\frac{1}{2} \Gamma^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \quad (35)$$

Todas estas cantidades tienen en común el “denominador de resonancia” D , dado por

$$D \equiv (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2 = (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + \Gamma^2 \omega^2.$$

Cerca de la resonancia (o sea, cerca de $\omega = \omega_0$), la rápida variación de D con ω se debe casi por completo al factor $(\omega_0 - \omega)^2$ en el primer término. La aparición de ω en otras partes de D y en los numeradores de las cuatro cantidades anteriores contribuye a una variación mucho más lenta. Ahora bien, la amplitud absorbente y las otras cantidades dadas más arriba sólo son relativamente importantes cerca de la resonancia. (Podemos sin mucho fundamento, definir “cerca” como dentro del rango $\omega_0 - 10 \Gamma < \omega < \omega_0 + 10 \Gamma$.) En la región cercana a la resonancia y para acoplamiento débil, o sea, $\Gamma \ll \omega_0$, es una aproximación muy buena hacer ω igual a ω_0 en todo D , excepto en el factor $(\omega_0 - \omega)^2$ del primer término. Entonces D queda

$$D \approx (\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega)^2 + \Gamma^2\omega_0^2 = 4\omega_0^2[(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2].$$

En la misma aproximación podemos hacer $\omega = \omega_0$ en los numeradores de nuestras cuatro cantidades resonantes. Entonces, las cuatro tienen la misma forma, que puede denotarse con R (resonancia)

$$R(\omega) \equiv \frac{(\frac{1}{2}\Gamma)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2}. \quad (36)$$

[Elegimos la constante de proporcionalidad tal que $R(\omega_0) = 1$.] Note que $R(\omega)$ es una función par de $\omega_0 - \omega$, o sea, es simétrica alrededor de la frecuencia de resonancia. Es fácil ver que el ancho completo en la mitad del máximo de $R(\omega)$ es Γ , como en el caso de la expresión exacta para el ancho completo a potencia semimáxima.

En óptica, la dependencia respecto a la frecuencia exhibida por $R(\omega)$ se llama usualmente “forma de línea de Lorentz”. En física nuclear, $R(\omega)$ se llama “curva de resonancia de Breit-Wigner”, con ω_0 y ω reemplazados por $E_0 = \hbar\omega_0$ y ω por $E = \hbar\omega$. Las curvas de resonancia exactas son siempre más complicadas que $R(\omega)$, tanto en óptica como en física nuclear, así como también para el oscilador armónico.

Oscilaciones forzadas transitorias. Queremos encontrar la solución de la ecuación (14), ecuación diferencial de un oscilador armónico amortiguado, armónicamente forzado, para condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ dadas arbitrariamente. Para eso necesitamos la solución general. Ésta viene dada por una superposición de la solución estacionaria $x_e(t)$ y la general $x_1(t)$ de la ecuación de movimiento homogénea (para oscilaciones libres):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e(t) + x_1(t) \\ &= A_{ab} \sin \omega t + A_{el} \cos \omega t + e^{-(1/2)\Gamma t} [A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t], \end{aligned} \quad (37)$$

donde A_1 y B_1 son constantes arbitrarias que pueden elegirse para satisfacer las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad. Podemos

ver, de la siguiente manera, que la ecuación (37) es la solución general. Primero, satisfacer la ecuación diferencial de segundo orden dada. Segundo, se le puede hacer cumplir condiciones iniciales arbitrarias $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ por adecuada elección de A_1 y B_1 . Esto es todo lo que requiere para ser una solución única, de acuerdo con la teoría de ecuaciones diferenciales.

Oscilador inicialmente no perturbado. Especialicemos nuestra solución general a la interesante situación donde a $t = 0$ el *oscilador está prácticamente en reposo en su posición de equilibrio*. Elegimos $B_1 = -A_{el}$, puesto que esto dará la condición inicial $x(0) = 0$. Elegimos ahora A_1 tan simple como sea posible teniendo en cuenta que todavía la velocidad inicial $\dot{x}(0)$ es esencialmente nula. Estamos interesados solamente en amortiguamiento débil; por lo tanto tomamos $e^{-(1/2)\Gamma t}$ como esencialmente constante durante cualquier ciclo dado. Con esta aproximación se puede demostrar que $\dot{x}(0) \approx \omega A_{ab} + \omega_1 A_1$. Puesto que estamos interesados en frecuencias impulsoras no demasiado lejos de la resonancia tomamos simplemente $A_1 = -A_{ab}$. Entonces

$$\dot{x}(0) \approx (\omega - \omega_1)A_{ab}, \quad (38)$$

que se anula para $\omega = \omega_1$, o para $A_{ab} = 0$ (lo que implica $\Gamma = 0$). Con estas elecciones tenemos $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) \approx 0$. Entonces, la ecuación (37) queda

$$x(t) = A_{ab}[\sin \omega t - e^{-(1/2)\Gamma t} \sin \omega_1 t] + A_{el}[\cos \omega t - e^{-(1/2)\Gamma t} \cos \omega_1 t]. \quad (39)$$

Siguen algunos casos especiales interesantes.

Caso 1: La frecuencia impulsora es igual a la de oscilación natural

Haciendo $\omega = \omega_1$ en la ecuación (39), obtenemos

$$x(t) = [1 - e^{-(1/2)\Gamma t}][A_{ab} \sin \omega t + A_{el} \cos \omega t] = [1 - e^{-(1/2)\Gamma t}]x_e(t), \quad (40)$$

donde $x_e(t)$ es la solución estacionaria. En consecuencia, cuando la frecuencia impulsora es exactamente igual a la de oscilación natural ω_1 , la solución estacionaria “está presente desde el principio”. Su amplitud de oscilación crece parejamente desde cero hasta su valor final estacionario.

Caso 2: Amortiguamiento nulo y pulsaciones interminables

Haciendo $\Gamma = 0$ se obtiene $A_{ab} = 0$.

$$A_{el} = \frac{F_0/M}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Entonces, la ecuación (39) da

$$x(t) = \frac{F_0}{M} \frac{[\cos \omega t - \cos \omega_0 t]}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (41)$$

La ecuación (41) es similar a la superposición de dos oscilaciones armónicas encontrada cuando estudiamos el fenómeno de pulsaciones entre dos disposiciones en la Sección 1.5. Insistimos en que podemos escribir $x(t)$ como superposición lineal de dos oscilaciones exactamente armónicas, como en la ecuación (41), o, también, como una oscilación “casi armónica” a la frecuencia promedio “rápida” $\omega_{pr} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ con una amplitud “suavemente variable” que oscila armónicamente en la frecuencia de modulación “suave” $\omega_{mod} = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)$. El segundo procedimiento da (Prob. 3.22)

$$x(t) = A_{mod}(t) \text{sen } \omega_{pr} t, \quad (42)$$

donde

$$A_{mod}(t) = \frac{F_0}{M} \frac{2 \text{sen } \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (43)$$

Por lo tanto, la amplitud de oscilación oscila permanentemente a la frecuencia de modulación $\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)$. La energía almacenada oscila alrededor de su valor promedio, pasando de cero a su valor máximo E_0 de acuerdo con la relación

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \text{sen}^2 \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t \\ &= \frac{1}{2}E_0[1 - \cos(\omega_0 - \omega)t]. \end{aligned} \quad (44)$$

En consecuencia, la energía oscila permanentemente a la frecuencia de pulsación entre la frecuencia impulsora y la de oscilación natural.

Para observar pulsaciones casi interminables puede colgar una lata de conserva o algo similar, a una cuerda de unos 45 cm de largo. Acoople este péndulo por medio de varios pies de bandas de goma a un tocadiscos que gire a 45 rpm.

Para el caso especial $\omega = \omega_0$, la ecuación (43) implica que la amplitud de las oscilaciones rápidas aumenta linealmente con el tiempo, permanentemente, correspondiendo a un período de pulsaciones infinito:

$$x(t) = \left[\frac{1}{2} \frac{F_0 t}{M\omega_0} \right] \text{sen } \omega_0 t. \quad (45)$$

Después de un tiempo infinito la amplitud es infinita.

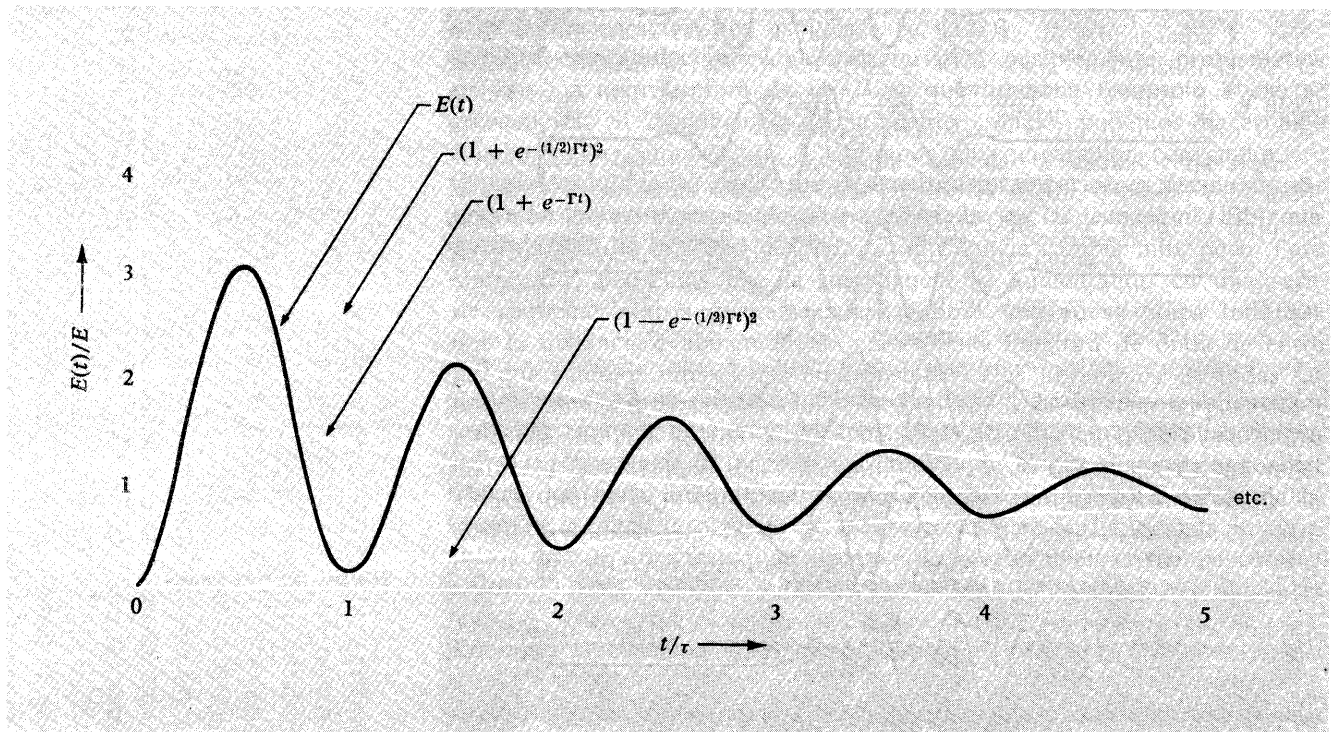
Caso 3: Pulsaciones transitorias

Para acoplamiento débil y ω cercano a ω_1 , no es difícil (pero es tedioso) mostrar que la energía almacenada está dada aproximadamente por (Prob. 3.24)

$$E(t) = E[1 + e^{-\Gamma t} - 2e^{-(1/2)\Gamma t} \cos(\omega - \omega_1)t], \quad (46)$$

Donde E es la energía estacionaria. (Si tomamos $\omega = \omega_1$, obtenemos el caso 1 anterior. Si $\Gamma = 0$, obtenemos el 2.) Por lo tanto, vemos que si partimos a $t = 0$ sin energía en el oscilador, la energía $E(t)$ no crece parejamente hasta su valor de estado estacionario, salvo que la frecuencia impulsora ω sea exactamente igual a la de oscilación libre ω_1 . En cambio, la energía experimenta oscilaciones a la frecuencia de pulsación $\omega - \omega_1$. Estas pulsaciones provienen del hecho que al oscilador “le gusta” oscilar a su frecuencia natural ω_1 , mientras está siendo empujado a la frecuencia ω . Por consiguiente, algunas veces, la fuerza impulsora está empujada con una fase relativa que ayuda a aumentar la amplitud de oscilación, pero otras veces (medio período de pulsación después) está empujando con la fase opuesta, disminuyendo, en conse-

Fig. 3.2 Pulsaciones transitorias. (Elegimos el período de pulsación igual al tiempo de decaimiento τ .) La energía almacenada $E(t)$ aumenta desde cero, sufre oscilaciones amortiguadas a la frecuencia de pulsación entre la fuerza impulsora y las oscilaciones naturales y, eventualmente, se estabiliza en el valor del estado estacionario, E .



cuencia, las oscilaciones. Si no hubiese amortiguación, estas pulsaciones seguirían permanentemente como en el Caso 2. Sin embargo, debido a la amortiguación, el oscilador ajusta gradualmente su fase con respecto a la de la fuerza impulsora. Después de un tiempo suficientemente largo, el oscilador permanece en estado de vibración estacionario sin pulsaciones, oscilando exactamente a la frecuencia impulsora ω , con la fase relativa entre el oscilador y la fuerza impulsora estabilizada, de manera que la energía entregada al oscilador en cada empuje (cada ciclo) de la fuerza impulsora debido al rozamiento. Entonces, la energía del oscilador permanece constante, y la fase relativa entre ésta y la fuerza impulsora permanece también constante. El crecimiento transitorio de energía se muestra en la Fig. 3.2.

Deducción cualitativa de la forma de la resonancia. Utilicemos la experiencia acumulada en el estudio de la respuesta transitoria del oscilador, para pensar en la relación entre la amplitud de oscilación estacionaria exactamente en resonancia y la correspondiente a otras frecuencias. Comencemos con el oscilador en reposo y llevémoslo exactamente a su frecuencia de resonancia. Si no hubiese amortiguación, la amplitud de oscilación crecería linealmente con el tiempo permanentemente [Véase ec. (45).] En realidad, *comienza* a aumentar linealmente con el tiempo porque al principio, cuando la velocidad media es pequeña, la amortiguación es despreciable. Sin embargo, a causa de la amortiguación, eventualmente alcanza un valor igual al de la amplitud que podría “adquirir” en un tiempo del orden de τ . Debido al amortiguamiento, sólo puede retener el movimiento que ha adquirido “recientemente”, o sea, dentro de un intervalo de tiempo del orden de τ . Podemos imaginar esta amplitud pensando que la fuerza máxima F_0 está empujando durante un tiempo τ como para impartir a la masa un momento máximo $F_0\tau$. Pero el momento máximo de la masa oscilante es M veces su velocidad máxima, que es $\omega_0 A(\omega_0)$. Por lo tanto, $F_0\tau \approx M\omega_0 A(\omega_0)$ y tenemos

$$A(\omega_0) \approx \frac{F_0\tau}{M\omega_0}, \quad (47)$$

como resultado de nuestra conjetura para la amplitud estacionaria a $\omega = \omega_0$

Llevemos ahora el oscilador a una frecuencia ω que difiera mucho de la frecuencia de resonancia ω_0 . Si no hubiese amortiguación, la amplitud oscilaría siempre a la frecuencia de modulación $\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)$, y la energía lo haría a la frecuencia de pulsación $\omega_0 - \omega$. Ahora “conectemos” la amortiguación. La energía perdida para amortiguar es al cuadrado de la velocidad. En consecuencia, en los tiempos en que la energía es máxima, la amortiguación también lo es. Cuando es nula, no hay amortiguación. La amortiguación tiende, por lo tanto, a “cortar las cimas” en un gráfico de energía en función del tiempo (también tiende a

“llenar los valles”). Eventualmente son amortiguadas las pulsaciones. Podemos conjeturar que la amplitud se amortigua alrededor de la mitad del valor máximo que alcanza al principio, cuando están presentes las pulsaciones. Por lo tanto, podemos reemplazar $\sin \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t$ en la ecuación (43), por $\frac{1}{2}$. En consecuencia, para ω lejano de ω_0 obtenemos, a partir de la ecuación (43).

$$A(\omega) \approx \frac{F_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (48)$$

Dicho de otro modo, podemos suponer que $A(\omega)$ corresponde al momento máximo que puede imprimir la fuerza F_0 que empuja durante una cierta fracción f de un período de pulsación. Este momento es el producto de M por la amplitud $A(\omega)$ por la frecuencia angular media $\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$. El período de pulsación T_{puls} es igual a $2\pi/(\omega_0 - \omega)$. Por lo tanto, podemos suponer

$$\frac{F_0 f 2\pi}{(\omega_0 - \omega)} \approx MA(\omega) \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega).$$

Esto da la ecuación (48) si somos lo suficientemente listos como para conjeturar $f = \frac{1}{4}\pi$. (Yo no lo fui.)

Sabemos, a partir de nuestra solución exacta que, justo en la resonancia, la amplitud de oscilación es $A_{ab}(\omega_0)$, puesto que A_{el} es nula. La amplitud $A(\omega_0)$ conjeturamos que es igual a $A_{ab}(\omega_0)$, como puede verificarse comparando las ecuaciones (47) y (16). Sabemos que, lejos de la resonancia, la solución exacta nos dice que la amplitud de oscilación es esencialmente $A_{el}(\omega)$. La amplitud $A(\omega)$ que la supusimos para ω lejos de ω_0 , es igual a $A_{el}(\omega)$, lejos de la resonancia, como puede verificarse comparando las ecuaciones (48) y (17).

3.3 *Resonancias en sistemas con dos grados de libertad*

En el Capítulo 1 encontramos que cada modo de un sistema que oscila libremente con más de un grado de libertad se comporta de forma muy análoga a un oscilador armónico simple. La diferencia principal es que el sistema ocupa una región finita del espacio y, por lo tanto, el “oscilador armónico” está distribuido en la región ocupada por el sistema, en lugar de estar confinado a una masa puntual. En consecuencia, cada modo tiene una “forma” característica, concepto que no es necesario para un oscilador armónico unidimensional.

En el Capítulo 1 despreciamos el amortiguamiento en el estudio de los sistemas que oscilan libremente. Cuando es tomado en cuenta se encuentra (como veremos) que cada modo es similar a un oscilador armónico unidimensional amortiguado. Por lo tanto, tienen su propio mecanismo y constante de amortiguamiento Γ ; y, por consiguiente, su propio

y característico tiempo de decaimiento τ . Para algunos sistemas, los mecanismos de amortiguación pueden estar asociados con las “partes móviles individuales” y, entonces, todos los modos pueden tener groseramente las mismas constantes de amortiguación y tiempos de decaimiento. Un ejemplo es el de un sistema de dos péndulos idénticos acoplados mediante un resorte, en el cual el amortiguamiento es producido por algún tipo de rozamiento en cada una de las cuerdas o bien en cada una de las pesas. Puesto que ambas pesas se mueven igual en cada modo, los modos tienen el mismo tiempo de decaimiento. Para otros sistemas, los mecanismos de amortiguación están asociados con los modos. Por ejemplo, el resorte que acopla dos péndulos puede tener pegada alguna cinta elástica, de manera que experimente un amortiguamiento friccional cuando es estirado o comprimido. Si ése es esencialmente el único mecanismo de amortiguación, entonces el modo 2 (en el cual el resorte es estirado y comprimido) tiene una constante de amortiguación mucho más grande que el modo 1, o sea, $\Gamma_2 \gg \Gamma_1$, y, por lo tanto, tiene un tiempo de decaimiento mucho menor: $\tau_2 \ll \tau_1$.

Cuando se impulsa un sistema de varios modos, se encuentra resonancia, toda vez que la frecuencia impulsora es cercana a la de un modo. Sucede que *las amplitudes elástica y absorbente para una parte móvil dada son simplemente superposiciones de las contribuciones de amplitudes provenientes de cada resonancia* (cada modo del sistema no impulsado). Cada una de estas contribuciones tiene forma similar a la encontrada en la Sección 3.2 para un sistema con un único grado de libertad.

Si variamos (lentamente) la frecuencia impulsora y hacemos una gráfica de la velocidad de absorción de energía por una parte móvil dada como función de la frecuencia impulsora ω , encontramos una resonancia cada vez que ω pasa por la vecindad de la frecuencia de un modo. (Usaremos “frecuencia de resonancia” y “frecuencia de un modo” como expresiones intercambiables, a pesar de que una se refiere a oscilaciones forzadas y la otra a oscilaciones libres.) Cada resonancia exhibe un ancho completo de frecuencia dado por [véase ec. (28)]

$$\Delta\omega = \Gamma = \frac{1}{\tau},$$

donde $\Delta\omega$ es el ancho completo para consumo de potencia semimáximo y Γ y τ son la constante de amortiguación y el tiempo de decaimiento para oscilaciones libres de ese modo particular. Esta relación se cumple si el amortiguamiento es lo suficientemente débil y las resonancias individuales están separadas por intervalos de frecuencia amplios, comparados con sus semianchos. En ese caso, tenemos como máximo un modo contribuyendo a la amplitud absorbente en cada punto del gráfico de frecuencias. Por otro lado, surge que ordinariamente no podemos despreciar *ninguna* de las contribuciones elásticas. (Véase prob. 3.20.)

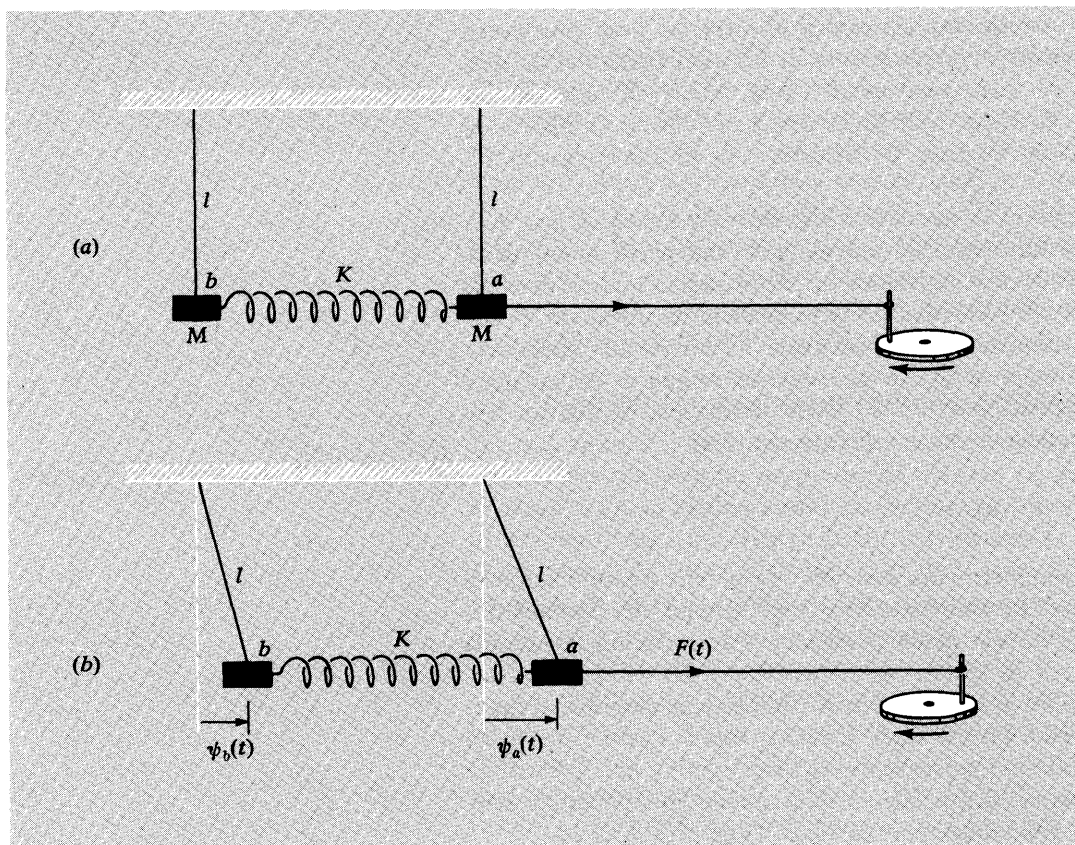
Ejemplo 2: Oscilaciones forzadas de dos péndulos acoplados

Se muestra el sistema en la Fig. 3.3 y también se describe en el Experimento casero 3.8 (donde las pesas del péndulo son latas de conserva, el resorte es un “slinky”, la fuerza impulsora está suministrada por un tocadiscos acoplado al sistema por 10 pies de banda de goma y la amortiguación se consigue haciendo que las cuerdas rocen contra algo). Para simplificar, suponemos que cada péndulo tiene la misma constante, Γ . Fácilmente se ve que las ecuaciones de movimiento son

$$M\ddot{\psi}_a = -\frac{Mg}{l}\psi_a - K(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\dot{\psi}_a + F_0 \cos \omega t, \quad (49)$$

$$M\ddot{\psi}_b = -\frac{Mg}{l}\psi_b + K(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\dot{\psi}_b. \quad (50)$$

Fig. 3.3 Oscilaciones forzadas de péndulos acoplados. (a) equilibrio. (b) Configuración general.



Ya hemos estudiado las oscilaciones libres de este sistema en ausencia de amortiguación. En consecuencia, sabemos que si F_0 y Γ son nulos los modos están dados por

$$\text{Modo 1: } \psi_a = \psi_b, \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \psi_1 = \frac{1}{2}(\psi_a + \psi_b), \quad (51)$$

$$\text{Modo 2: } \psi_a = -\psi_b, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M}, \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\psi_a - \psi_b), \quad (52)$$

donde las superposiciones ψ_1 y ψ_2 son las coordenadas normales.

Cada modo actúa como oscilador forzado. Transformemos a las coordenadas normales ψ_1 y ψ_2 . Si sumamos las ecuaciones (49) y (50) obtenemos

$$M\ddot{\psi}_1 = -\frac{Mg}{l}\psi_1 - M\Gamma\dot{\psi}_1 + \frac{1}{2}F_0 \cos \omega t. \quad (53)$$

Restando la ecuación (50) de la (49) da

$$M\ddot{\psi}_2 = -M\left[\frac{g}{l} + \frac{2K}{M}\right]\psi_2 - M\Gamma\dot{\psi}_2 + \frac{1}{2}F_0 \cos \omega t. \quad (54)$$

Observe que las ecuaciones (53) y (54) están desacopladas. Por comparación con la ecuación (1) vemos que (53) y (54) son de la forma apropiada a un oscilador armónico amortiguado, forzado. Por lo tanto la coordenada normal ψ_1 , se comporta como un oscilador armónico simple con masa M constante de resorte $M\omega_1^2$, constante de amortiguamiento Γ y fuerza impulsora $\frac{1}{2}F_0 \cos \omega t$. La coordenada normal ψ_2 se comporta análogamente, con los valores $M, M\omega_2^2, \Gamma$ y $\frac{1}{2}F_0 \cos \omega t$. Las dos oscilaciones son *independientes*, de manera que podemos escribir las soluciones estacionarias para ψ_1 y ψ_2 separadamente. Cada modo actúa como un oscilador armónico unidimensional forzado. Por consiguiente, tiene sus propias amplitudes elástica y absorbente con frecuencia resonante correspondiente a la frecuencia del modo igual que para un oscilador unidimensional.

Cada parte se mueve como superposición de modos forzados. Consideremos ahora el movimiento de las dos partes móviles a y b . De acuerdo con las ecuaciones (51) y (52) tenemos

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_b = \psi_1 - \psi_2. \quad (55)$$

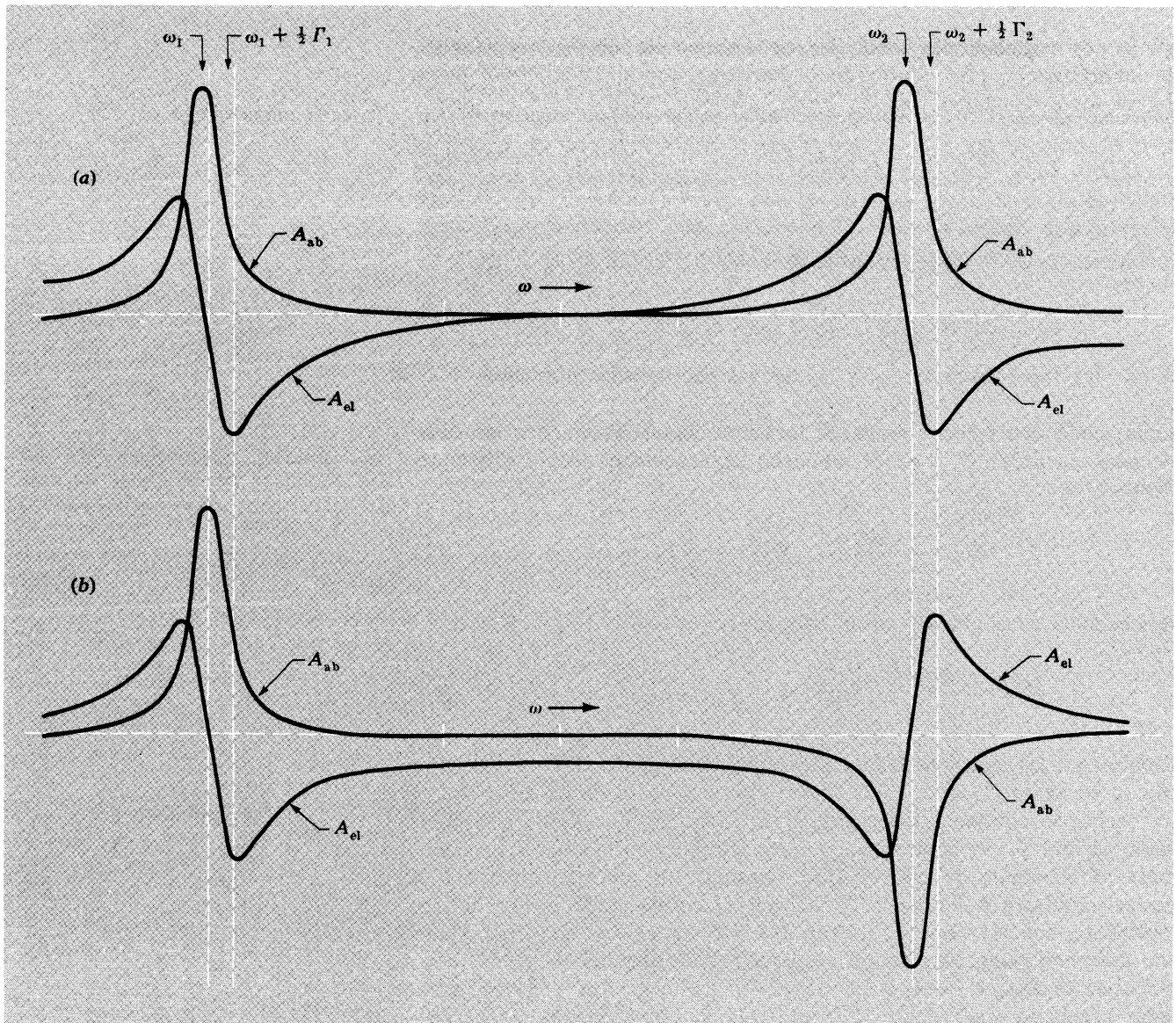


Fig. 3.4 Resonancias en un sistema con dos grados de libertad. Gráfico de las amplitudes absorbente y elástica en función de la frecuencia para (a) el péndulo directamente acoplado a la fuerza impulsora y (b) el péndulo más alejado de la fuerza impulsora. La separación de frecuencia angular $\omega_2 - \omega_1$ se toma como treinta veces $1/2 \Gamma$, el semiancho de resonancia de uno y otro modo.

De acuerdo con la ecuación (55), la amplitud absorbente de la parte *a* es la suma de la amplitud absorbente de los dos modos. La de *b* es la diferencia. Análogamente, la amplitud elástica de *a* es la suma de las amplitudes elásticas de ambos modos, y la de *b* su diferencia.

Cuando la frecuencia impulsora es igual a la de uno de los modos, el movimiento de *a* y *b* es esencialmente el que ocurriría en ese modo (para oscilaciones libres).

En la Fig. 3.4 damos una gráfica de las amplitudes elástica y absorbente para ψ_a y ψ_b . En este ejemplo encontramos el resultado general de que la amplitud estacionaria para cada parte móvil puede escribirse como superposición de contribuciones de cada resonancia, o sea, de cada modo del sistema oscilando libremente. Cada contribución a la superposición tiene la forma apropiada al oscilador forzado correspondiente a ese modo. La contribución de cada modo depende de cómo está acoplada la fuerza impulsora al sistema. Para la configuración de la Fig. 3.3, encontramos que cada parte móvil recibe contribuciones iguales (excepto en el signo) de cada uno de los modos. Sin embargo, si hubiésemos atado a la banda de goma el centro del resorte en lugar de a una de las pesas, hubiéramos encontrado proporciones muy distintas de los dos modos. En consecuencia, la contribución relativa de cada modo depende de los detalles acerca de cómo es aplicada la fuerza impulsora.

Oscilaciones forzadas de un sistema de muchos péndulos acoplados.

Suponga que en lugar de dos péndulos tenemos muchos, acoplados en una disposición lineal. Si aplicamos una fuerza impulsora armónica al sistema y variamos la frecuencia (con la lentitud suficiente para que permanezcamos en el “estado estacionario”), obtendremos una resonancia cada vez que la frecuencia impulsora pase por una de las frecuencias de modos. (Por supuesto, la fuerza impulsora puede estar acoplada en forma tal que, como vimos antes, algunos modos no se exciten. Entonces no hay resonancias en las frecuencias de esos modos.) Como encontramos para sistemas de dos grados de libertad, la amplitud estacionaria para cada parte móvil será una superposición de contribuciones de cada uno de los modos del sistema.

Una buena forma de seguir la pista de las frecuencias resonantes y sus correspondientes números de onda es llevar a una gráfica la relación de dispersión (que es independiente de las condiciones de contorno y del número de grados de libertad) y poner en la curva un punto para cada resonancia del sistema particular en cuestión. La relación de dispersión para péndulos acoplados se muestra gráficamente en la Fig. 2.18. La volvemos a indicar en la Fig. 3.5 con dos puntos, correspondientes a los modos determinados por las condiciones de contorno del sistema de dos péndulos que hemos considerado.

3.4 Filtros

Cuando llevamos un sistema a cierta frecuencia ω el movimiento estacionario de cada parte móvil es una superposición de contribuciones de cada una de las resonancias. En particular, la fuerza restauradora por unidad de desplazamiento por unidad de masa, ω^2 , que en el estado estacionario es la misma para cada parte móvil, está provista de una superposición de las configuraciones correspondientes a los distintos

modos. Considere cualitativamente qué ocurre cuando variamos ω^2 . Suponga primero que ω está en algún lugar entre las frecuencias de modo mínima y máxima, pero no cae cerca de ninguna resonancia particular. Entonces, la amplitud de una parte móvil dada es esencialmente la de las contribuciones de todos los modos. Los modos diferentes contribuyen con signos distintos en dependencia de la parte móvil que estamos considerando. [Véase la Ec. (55) y compare las contribuciones del modo 2 a ψ_a y ψ_b .] A medida que aumentamos ω^2 , podemos aproximarnos a una frecuencia de resonancia. Cuando pasamos de abajo arriba de la resonancia, se invierte el signo de la contribución elástica de ese modo. A medida que seguimos aumentando la frecuencia, varias partes móviles aumentan o disminuyen sus amplitudes de una manera más o menos complicada según vamos pasando por las frecuencias de los modos. Finalmente, pasamos la frecuencia más alta. Después de ello no hay más cambio de signo en las contribuciones; o sea, el signo de cada contribución a la amplitud elástica de una parte móvil dada se conserva a medida que aumentamos la frecuencia por encima de la resonancia más alta. Por consiguiente, las partes móviles, mantienen más o menos la forma del modo más alto (pero, por supuesto, no exactamente). Ocurre algo muy interesante. Si el sistema es un arreglo lineal y lo impulsamos

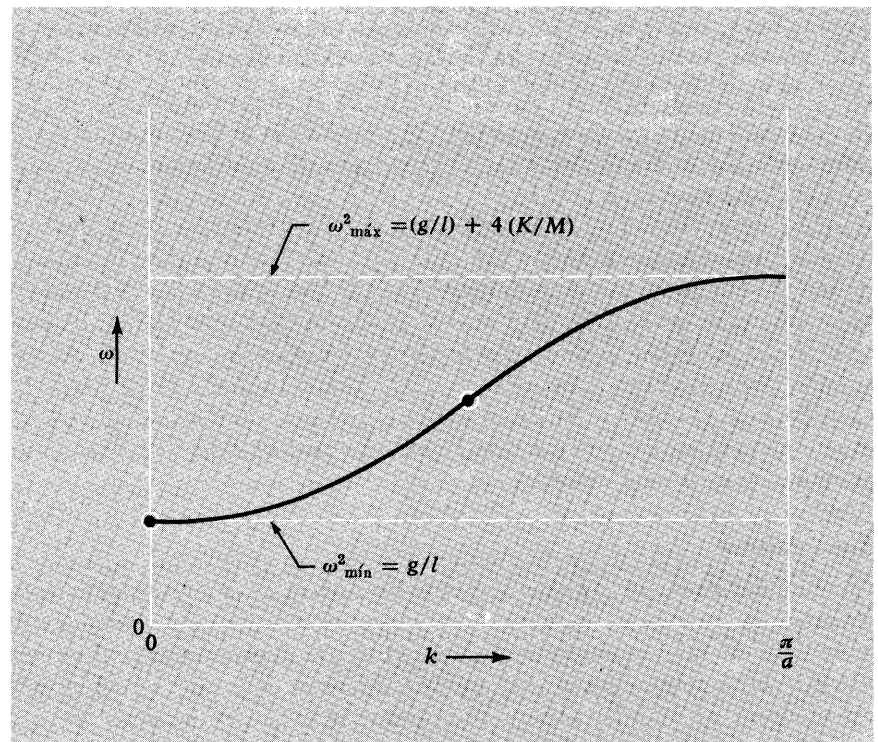


Fig. 3.5 Relación de dispersión para péndulos acoplados. Los dos puntos corresponden a las dos resonancias para dos péndulos acoplados. Por medio de puntos apropiados en el mismo diagrama, pueden representarse resonancias en sistemas similares con más de dos péndulos acoplados. El número de puntos es igual al número de resonancias, que, a su vez, es igual al número de modos de oscilación libre.

desde un extremo a una frecuencia por encima de la del modo más alto, la parte móvil más cercana al extremo impulsado tiene la amplitud más grande, su vecina tiene una amplitud menor, la tercera la tiene menor todavía, etc. La amplitud se *atenúa* con el aumento de distancia al extremo de *entrada* del sistema. Entonces se le denomina *filtro*.

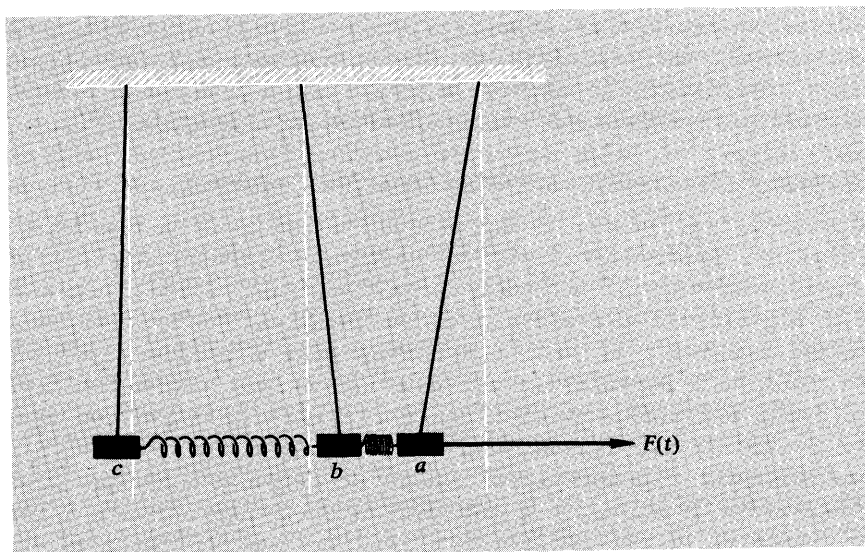
Ejemplo 3: Dos péndulos acoplados como filtro mecánico

Considere, por ejemplo, los dos péndulos acoplados de la Fig. 3.3. Suponga que impulsamos el extremo de entrada (péndulo *a*) a una frecuencia mayor que la frecuencia de modo ω_2 . Ahora bien, el péndulo *a* está directamente acoplado a la fuerza impulsora. Por lo tanto, en el estado estacionario la fuerza restauradora sobre el péndulo *a* proviene, en parte, de la fuerza impulsora. No es éste el caso para el péndulo *b*. Su fuerza restauradora proviene sólo del resorte y de la gravedad, como en el caso de oscilaciones libres. En un modo de oscilación libre, la mayor fuerza restauradora por unidad de desplazamiento que pueda proporcionar el resorte (y la gravedad) es la correspondiente a la configuración del modo más alto, en el que las pesas se mueven en oposición. Pero ahora eso no alcanza para igualar ω^2 si la configuración es precisamente la del modo más alto, donde la magnitud $|B|$ de la oscilación del péndulo *b* es la misma que $|A|$, la del péndulo *a*. La única manera de que el péndulo *b* pueda tener la misma fuerza restauradora por unidad del desplazamiento, por unidad de masa que el péndulo *a*, es que su desplazamiento sea menor: $|B| < |A|$. Cuanto mayor sea ω respecto a ω_2 , menor será el correspondiente desplazamiento de *b* relativo al de *a*. Para decirlo de otra manera, *b* no puede correr parejo con *a* salvo que viaje menos.

Si en lugar de dos péndulos tenemos tres o más arreglados linealmente, y si los impulsamos en un extremo a una frecuencia mayor que la del modo más alto, ocurre una situación análoga. La configuración en el estado estacionario se asemeja a la del modo más alto; o sea, cada pesa se mueve con una fase opuesta a la de su vecina de cualquiera de los dos lados. Esto proporciona la mayor fuerza restauradora posible por unidad de masa y desplazamiento para cada pesa. Pero esto es todavía insuficiente para igualar ω^2 , salvo que cada pesa sucesiva tenga un desplazamiento menor que el de la siguiente más cercana al extremo de entrada (el impulsado). Así, la amplitud de movimiento de pesas sucesivas decrece a medida que nos vamos alejando del extremo impulsado del sistema.

Corte de alta frecuencia. En consecuencia, tenemos un ejemplo de *filtro mecánico*. Si usted empuja el extremo de entrada con una fuerza igual a $F_0 \cos \omega t$, la amplitud de movimiento en el extremo de salida (el más alejado de la fuerza impulsora) es mucho menor que en el extremo de entrada, a condición de que ω sea mucho más grande que

Fig. 3.6 Filtro mecánico. La frecuencia impulsora excede a la del modo más alto. La configuración es tal que las fases relativas de las pesas son las mismas que en el modo más alto. La amplitud de “salida” (la de la pesa c) es menor que la amplitud de “entrada” (de la pesa a).



la frecuencia del modo más alto del sistema. La configuración del sistema es similar a la del modo más alto, excepto en la disminución progresiva de la amplitud a medida que nos alejamos del extremo impulsado. La frecuencia del modo más alto (para oscilación libre) se llama frecuencia de corte (para oscilación forzada). Una fuerza impulsora con frecuencia superior a la de corte actuando en un extremo da un movimiento que no “pasa” a través del filtro — es “cortada”. Decimos que el sistema está siendo “impulsado por encima del corte”. En la Fig. 3.6 mostramos un sistema de péndulos acoplados que está siendo impulsado por encima del corte. (Puede establecerse fácilmente esta situación con un “slinky” y tres latas de conserva. Vea Exp. casero 3.16.)

Corte de baja frecuencia. Consideremos ahora qué sucede si impulsamos al sistema a una frecuencia menor que la frecuencia natural más baja (o sea, la frecuencia del modo más bajo para oscilaciones libres). Mostraremos que si la frecuencia impulsora es mucho menor que la natural más baja, la amplitud de salida (o sea la correspondiente a la pesa más alejada de la fuerza impulsora) es mucho menor que la amplitud de entrada (la correspondiente a la pesa impulsada). Por lo tanto, la frecuencia del modo más bajo también es una frecuencia de corte.

Considere nuestro sistema de dos péndulos acoplados (Fig. 3.3). El modo más bajo corresponde a una configuración en que ambos péndulos oscilan en fase y con igual amplitud. Los resortes no están estirados ni comprimidos; la fuerza restauradora se debe solamente a la grave-

dad. Es, por lo tanto, $\omega_1 = \sqrt{g/l}$. Supongamos ahora que impulsamos el sistema a una frecuencia ω menor que ω_1 . Entonces, en el estado estacionario la fuerza restauradora por unidad de masa y desplazamiento, ω^2 , debe ser menor que g/l para toda pesa. La pesa en el extremo de entrada tiene parte de su fuerza restauradora provista por el acoplamiento directo a la fuerza impulsora. La segunda pesa tiene que conformarse solamente con la fuerza provista por la gravedad y el resorte. La única forma en que su fuerza restauradora por unidad de masa y desplazamiento puede reducirse por debajo de g/l es que el resorte contribuya con una fuerza de signo opuesto a la proveniente de la gravedad. Es fácil ver que el desplazamiento de la pesa b debe, por lo tanto, ser menor que el de a , pero en la misma dirección. (Entonces el resorte está estirado.) Así, las fases relativas son las mismas que para el modo más bajo, pero las amplitudes relativas, no. (La pesa b tiene menos amplitud que la a .)

El mismo resultado se cumple si tenemos tres o más péndulos acoplados impulsados por debajo de la frecuencia del modo más bajo. Las fases relativas son las mismas que las del modo más bajo, pero las amplitudes crecen progresivamente a medida que nos vamos alejando del extremo de entrada. Esta situación se muestra en la Fig. 3.7. La manera más fácil de entenderla es pensar que la frecuencia impulsora es nula. Entonces tiene una fuerza estacionaria, los péndulos están en reposo y su situación le dice inmediatamente que la configuración de los péndulos se parece mucho a la Fig. 3.7.

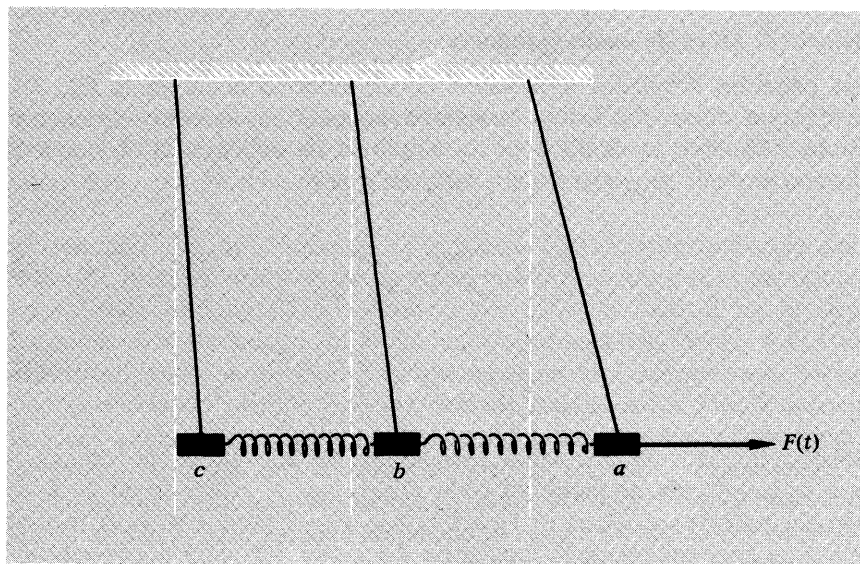


Fig. 3.7 Filtro mecánico. La frecuencia impulsora es menor que la del modo más bajo. La configuración es tal que las fases relativas son las mismas que para el modo más bajo. La amplitud de salida (la de la pesa c) es menor que la de entrada (de la pesa a).

Nomenclatura: La banda de frecuencias entre los cortes de alta y baja frecuencia se llama banda de paso del filtro. Para frecuencias impulsoras que caigan dentro de la banda de paso, la amplitud en el extremo de salida es comparable con la del extremo de entrada. Para frecuencias que caen fuera, la amplitud de salida es menor que la de entrada. El sistema se llama, por consiguiente, *filtro de banda*. Si el corte de baja frecuencia es cero (o sea, si el modo más bajo tiene frecuencia cero) el sistema se denomina filtro pasabajos. Por ejemplo, si en el sistema de péndulos acoplados hacemos infinita la longitud de la cuerda del péndulo, entonces las cuerdas están siempre verticales y no dan ninguna fuerza restauradora. (Las cuerdas soportan las pesas como una “mesa sin fricción”.) Entonces la frecuencia del modo más bajo es cero (correspondiente a movimiento de translación). Si impulsamos el sistema en un extremo, tenemos un filtro pasabajos que permite pasar frecuencias de cero hasta el corte de alta frecuencia.

Si la frecuencia del modo más bajo es mayor que cero pero la del más alto es “infinita”, el sistema se llama *filtro pasaaltos*. Por ejemplo, Si hacemos tender K/M a infinito en el sistema de péndulos acoplados, obtenemos un filtro pasaaltos. Los resortes están tan rígidos (o las masas son tan pequeñas) que siempre pueden proporcionar suficiente fuerza restauradora por unidad de masa y desplazamiento sin requerir amplitudes sucesivamente decrecientes, no importando la altura de la frecuencia impulsora.

Un sistema formado por dos o tres (o más) péndulos hechos con latas y acoplados con “slinkies” impulsado en un extremo por tocadiscos, puede demostrar muy bien las propiedades de un filtro de banda. (Véase Exp. casero 3.16.)

Ejemplo 4: Filtro de banda mecánica

Dos péndulos acoplados impulsados en un extremo como en la Fig. 3.3, forman un filtro de banda mecánico simple. Le haremos demostrar (Prob. 3.28) que la relación de la amplitud de salida a la de entrada (despreciando la amortiguación), está dada por:

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2}, \quad (56)$$

con:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{K}{M}. \quad (57)$$

Observe que cuando ω es igual a cualquiera de los valores de resonancia ω_1 o ω_2 la relación de amplitud es la misma que si estuviese en el modo correspondiente: ψ_b/ψ_a es $+1$ para $\omega = \omega_1$ y -1 para $\omega = \omega_2$. A medida que ω se hace inferior a la frecuencia del modo más bajo, ω_1 , la relación

de amplitud permanece positiva mientras decrece de $+1$, su valor a $\omega = \omega_1$ y a $(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(\omega_2^2 + \omega_1^2)$, su valor a $\omega = 0$. En consecuencia, las oscilaciones con frecuencias impulsoras bien inferiores respecto al corte de baja frecuencia son fuertemente atenuadas al pasar a través del filtro, siempre que el rango de frecuencias de la banda sea pequeño comparada con su frecuencia media. A medida que ω aumenta por encima de la frecuencia del modo más alto, ω_2 , la relación de amplitud permanece negativa. Disminuye en magnitud con el aumento de ω y se hace $-(\omega_2^2 - \omega_1^2)/2\omega^2$ para frecuencias suficientemente altas. Por lo tanto, las frecuencias impulsoras bien por encima del corte de alta frecuencia son fuertemente atenuadas.

Ejemplo 5: Filtro pasabajos mecánico

Suponga que comenzamos con los dos péndulos acoplados de la Fig. 3.3. Aumentamos la altura de los soportes de las cuerdas y las alargamos (de manera que las pesas quedan donde estaban). Cuando las cuerdas se hacen "infinitamente largas", permanecen verticales para cualquier desplazamiento finito de las pesas. Por consiguiente, la gravedad no ejerce ninguna fuerza restauradora y las cuerdas actúan nuevamente como soportes equivalentes a una mesa sin rozamiento. Entonces $\omega_1^2 = g/l$, la frecuencia del modo más bajo, tiende a cero. Así, tenemos un filtro de bajos que permite pasar frecuencias entre cero y el corte de baja frecuencia, $\omega_2^2 = 2K/M$. (Éste es también el resultado para dos masas acopladas por un resorte que yacen sobre una mesa sin fricción y son impulsadas por una fuerza impulsora armónica.) La relación de atenuación de amplitud ψ_b/ψ_a está dada por la ecuación (56) con ω_1 igualado a cero:

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - 2\omega^2} = \frac{K/M}{(K/M) - \omega^2}. \quad (58)$$

Vemos que la relación de atenuación es $+1$ a la frecuencia cero. Es infinita (significando que ψ_a es cero) a $\omega^2 = \frac{1}{2}\omega_2^2$. Es -1 en el corte de alta frecuencia. Se hace muy pequeña (y negativa) para frecuencias muy altas.

He aquí una aplicación de la ecuación (58). Supongamos que tenemos una pieza delicada de un aparato, que no funciona si es sometida a un estirado horizontal; sin embargo, el estirado vertical no la daña. La montamos en una plataforma plana que está en reposo sobre una superficie plana, horizontal y sin rozamiento (el soporte sin fricción podría quizás ser logrado con una delgada capa de aire). Para evitar que la placa vaya derivando sobre la mesa, debemos colocar algún soporte horizontal. Suponga que las paredes, piso y cielo raso vibran con componentes de frecuencia de 20 cps o más. Suponga también que si se sujeta la placa a las paredes por medio de soportes rígidos, la vibración es 100 veces mayor (en amplitud) que la tolerable; suponga que el

aparato más la placa pesan 10 kg. ¿Qué hacer? Acoplemos a las paredes, el aparato y su plataforma por intermedio de un filtro pasabajos consistente en un resorte en la dirección x y otro en la y . Cada resorte tiene una constante K (a determinar). Los grados de libertad x e y son independientes, de manera que sólo necesitamos considerar el movimiento según x . Designamos como “parte móvil a ” el lugar de la pared al que está conectado el resorte; y el aparato como “parte móvil b ”. Ahora bien, al obtener la ecuación (58) considerábamos dos masas F acopladas por un resorte, siendo la masa a impulsada por una fuerza $F_0 \cos \omega t$. Pero por supuesto, la masa b no sabe qué cosa está empujando a la a ; sólo sabe que está acoplada a una parte móvil por medio de un resorte K y que en el estado estacionario hay una cierta relación entre su movimiento y el de a , relación que está dada por la ecuación (58). Por lo tanto, podemos usar la ecuación (58) aun cuando la masa a sea reemplazada por una pared que vibra, dando ψ_a el movimiento del extremo del resorte sujeto a la pared. Queremos que ψ_b/ψ_a sea menor que 10^{-2} para frecuencias de 20 cps o mayores:

$$\frac{\psi_a}{\psi_b} = 1 - \frac{\omega^2}{K/M} = -100,$$

es decir,

$$\frac{K}{M} = \frac{\omega^2}{101}, \quad \sqrt{\frac{K}{M}} \approx \frac{\omega}{10}.$$

Para una pared fija, la frecuencia angular natural de oscilación del aparato y plataforma es $\sqrt{K/M}$. Vemos que si queremos atenuar frecuencias ν y superiores en por lo menos un factor $f = 10^{-2}$, la constante K del resorte debe ser lo suficientemente débil como para que la frecuencia de oscilación natural del aparato sea menor que $f^{1/2}\nu$. En nuestro ejemplo, debe ser menor que $20/10 = 2$ cps.

He aquí otro ejemplo. Supongamos que estamos incómodamente sentados sobre el piso porque éste oscila verticalmente a 20 cps. (Quizá es el piso de un aeroplano o algo así.) En consecuencia, nos sentiremos sobre un cojín. Éste atenúa la amplitud de vibración vertical en un factor de 100. (Entonces estaremos cómodos.) ¿Cuánto se hunde el cojín al sentarnos encima? (Prob. 3.12.)

Ejemplo 6: Filtro de banda eléctrica

Encontramos una analogía eléctrica para el ejemplo mecánico de los dos péndulos acoplados de la Fig. 3.3. Sustituimos cada masa M por una inductancia L . Sustituimos el resorte de la constante K por un capacitor de capacitancia inversa C^{-1} . Ahora bien, la fuerza restauradora gravitacional sobre cada péndulo depende del desplazamiento del péndulo en cuestión, pero no de su acoplamiento al otro. Análogamente queremos conseguir una fem que impulse cada inductancia indepen-

diente de su acoplamiento a la otra. Hacemos esto dividiendo la inductancia en dos mitades e insertando un capacitor C_0 en serie entre ellas. Finalmente, despreciamos el hecho de que cada inductancia tiene una resistencia R (proveniente del rollo de alambre que la forma). Cualquier otra resistencia es también despreciable. Se muestra el sistema en la Fig. 3.8.

Le haremos trabajar en las ecuaciones de movimiento y en hallar las coordenadas normales y los modos (Prob. 3.29). Aquí, simplemente conjeturamos los resultados por analogía con los péndulos acoplados:

$$\begin{aligned} \text{Modo 1: } I_a &= I_b, & \omega_1^2 &= \frac{C_0^{-1}}{L} \\ \text{Modo 2: } I_a &= -I_b, & \omega_2^2 &= \frac{C_0^{-1}}{L} + \frac{2C^{-1}}{L}. \end{aligned} \quad (59)$$

La atenuación obtenida por el filtro de banda está dada por la ecuación (56), si despreciamos el amortiguamiento (o sea, la resistencia de las espiras):

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2} = \frac{1/LC}{(1/LC_0) + (1/LC) - \omega^2}. \quad (60)$$

Ejemplo 7: Filtro pasabajos eléctrico

Si cortocircuitamos el capacitor C_0 en la Fig. 5.8, su capacitancia se hace efectivamente infinita. La frecuencia del modo más bajo se anula, correspondiendo a una cc estacionaria (corriente continua). La relación de

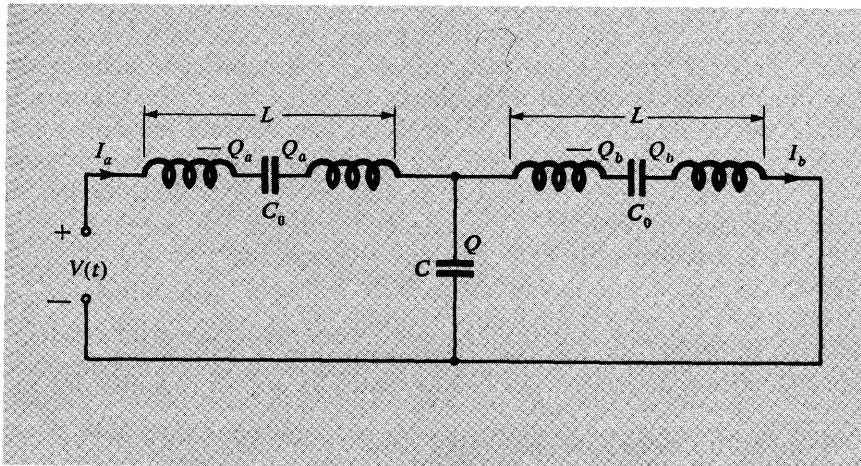
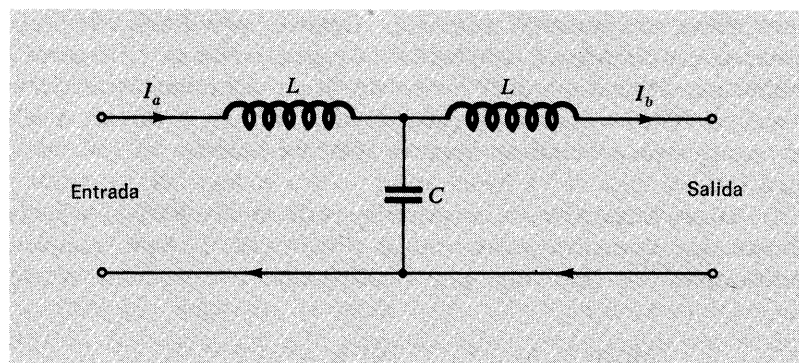


Fig. 3.8 Circuitos LC acoplados impulsados en un extremo por un voltaje $V(t)$. Este circuito es el análogo eléctrico de los dos péndulos acoplados de la Fig. 3.3.

Fig. 3.9 Filtro pasabajos eléctrico.

atenuación de corriente está dada por la ecuación (60) con $1/C_0$ igualado a cero:

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - 2\omega^2} = \frac{1/LC}{(1/LC) - \omega^2}. \quad (61)$$

Ejemplo 8: Filtro pasabajos para una fuente de corriente continua

Ésta es una aplicación muy práctica de la ecuación (61). En una fuente típica de corriente continua (cc), se comienza desde una ficha de pared que proporciona potencia a una frecuencia de 60 cps y a un voltaje (raíz cuadrática media) de alrededor de 110 volts *. Este voltaje se aplica a la bobina de entrada de un transformador. La bobina de salida del transformador tiene más vueltas que la de entrada (elevador) o menos vueltas (reductor), dependiendo del voltaje de la cc que queramos obtener eventualmente. La bobina de salida se conecta a través de un diodo que permite pasar corriente en un solo sentido. Esto dará una cc “rectificada de media onda”. En la práctica se usan dos diodos con una bobina de salida soldada en el centro, para obtener una “rectificación de onda completa”. Esta corriente se usa para cargar un capacitor, que luego actúa como una fuente de tensión estacionaria. La carga (y en consecuencia, el voltaje) del condensador no es, sin embargo, exactamente constante. Está dada con buena aproximación por una constante más un pequeño “murmullo” que oscila a una frecuencia de 120 cps ** (para rectificación de onda completa). (*Pregunta:* ¿Por qué la frecuencia del murmullo es el doble de la frecuencia de la ca con que comenzamos?) Si este capacitor cargado se usa como fuente de tensión continua para alimentar las válvulas de una radio o fonógrafo, la salida de la radio incluirá un fastidioso “zumbido” de 120 cps. (Para oírlo, preste atención a la radio inmediatamente después de encendida, antes de que se calienten las vál-

* En EE. UU. 50 cps y 220 volts en otros países.

** 100 cps si la frecuencia es 50 cps.

vulas. Por supuesto, una radio a pilas no tiene ese “zumbido”. O bien, consiga un reloj eléctrico o una “lámpara de alta intensidad”, de las usadas en los faros de 12 volts de los automóviles. Ambas tienen filamentos inductivos y se puede oír el murmullo debido a la tensión mecánica en las espiras. (¿Por qué este “zumbido” tiene 120 cps en lugar de 60?)

Para evitar el zumbido de 120 cps, conectamos el capacitor a través de las terminales de entrada del filtro pasabajos de la Fig. 39 y usamos la salida del filtro como fuente de tensión continua. Los valores de L y C usados en un filtro típico son (véase cualquier manual de radioaficionados) $L = 10h$, $C = 6\mu f$. Entonces el corte de alta frecuencia está dado por

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{LC}} = \frac{1}{6.28} \sqrt{\frac{2}{10 \times 6 \times 10^{-6}}} = 29.1 \text{ cps.}$$

El factor de atenuación para el componente de corriente de 120 cps está dado por la ecuación (61):

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{\nu_2^2}{\nu_2^2 - 2\nu^2} = \frac{(29.1)^2}{(29.1)^2 - 2(120)^2} = -0.030.$$

En consecuencia, la componente murmullo se reduce en un factor de alrededor de 30. La componente cc no se afecta por el filtro.

3.5 Oscilaciones forzadas de sistemas cerrados con muchos grados de libertad

En esta sección estudiaremos el comportamiento de un sistema de péndulos acoplados idénticos que experimenta oscilaciones estacionarias bajo la influencia de una fuerza impulsora de frecuencia arbitraria ω . Inicialmente no especificaremos las condiciones de contorno; ni tampoco cuál o cuáles de las partes móviles está directamente acoplada a la fuerza impulsora. (Las especificaciones posteriores pueden considerarse como parte de las condiciones de contorno.) Nos fijaremos solamente en la ecuación de movimiento de una pesa de péndulo que no esté acoplada directamente a ninguna fuerza impulsora. Haciendo esto podremos encontrar la solución general para el movimiento de la pesa sin condiciones de contorno específicas. Por supuesto, en cualquier situación determinada es necesario especificar completamente las condiciones del sistema —si los extremos están fijos o libres (o ni lo uno ni lo otro), dónde están aplicadas las fuerzas, etc.

Inobservancia del amortiguamiento. Omitiremos los términos de amortiguamiento en las ecuaciones de movimiento. ¿Limitará esto la generalidad de nuestros resultados? Sí, pero no muy seriamente. Recuerde que en la Sección 3.3 encontramos que, en tanto ω no esté cerca de ninguna resonancia (frecuencia de cualquier modo del sistema en oscilación li-

bre), el desplazamiento de cada parte móvil es una superposición de una y sólo una contribución elástica de cada modo. Las amplitudes absorbentes no contribuyen, debido a que decrecen con la variación de frecuencia mucho más rápidamente que la amplitud elástica. En tanto ω esté alejada 5 ó 10 semianchos de cualquier frecuencia de resonancia, podemos despreciar los términos absorbentes. Pondremos $\Gamma = 0$ en las ecuaciones de movimiento, pero no obstante supondremos que hay cierto amortiguamiento, de manera que el sistema alcanza un estado de oscilación estacionario a la frecuencia impulsora ω . Sabemos que si realmente no hubiese amortiguación, el sistema no alcanzaría ningún estado estacionario, pero continuará permanentemente efectuando “pulsaciones interminables”. Estamos suponiendo que *hay* amortiguamiento, pero evitaremos describir el comportamiento cuando ω está cerca de una resonancia. (Ya conocemos ese comportamiento en base a los resultados de la Sec. 3.3.)

Fases relativas de las partes móviles. Una consecuencia importante que resulta de despreciar la contribución de los diferentes modos a las amplitudes absorbentes, es que todo modo tiene una contribución (al desplazamiento de una parte móvil dada) que está en fase o bien desfasada 180° , respecto a la fuerza impulsora $F_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ como mostramos en la Sección 3.3. Otra manera de obtener este resultado sin volver a la Sección 3.3 es la siguiente: Suponga que no hay amortiguamiento, pero no obstante se ha llevado el sistema a un estado estacionario de oscilación a la frecuencia impulsora ω . Puesto que no hay amortiguamiento, no hay disipación de energía. En consecuencia, la fuerza impulsora no está realizando trabajo, positivo o negativo, sobre *ninguna* parte móvil (de otra manera la fuerza impulsora realizaría cierto trabajo neto en cada ciclo de oscilación.) Esto implica que el desplazamiento de cada parte móvil está en fase o defasado 180° con la fuerza impulsora, o sea, tenemos, amplitudes puramente elásticas.

Tenemos por lo tanto, el importante resultado de que *en estado estacionario* (y para ω no cercano a una resonancia) *toda parte móvil tiene la misma constante de fase*, que es igual a la de la fuerza impulsora. (Permitimos que la amplitud de cada parte sea positiva o negativa, así que no tenemos que hallar constante de fase sobre 180° .) También tenemos como resultado que *la fuerza restauradora por unidad de masa y desplazamiento, ω^2 , es la misma para todas las partes móviles*, puesto que cada una de ellas oscila a la misma frecuencia. (Observe que éstas son las condiciones que se cumplen también para un modo normal de un sistema no amortiguado que oscila libremente.) Ya estamos listos para considerar un sistema específico.

Ejemplo 9: Péndulos acoplados

No le sorprenderá, por ahora, aprender que, por un mero cambio de nombres (por ejemplo, “longitud de la cuerda” por “capacitancia” y

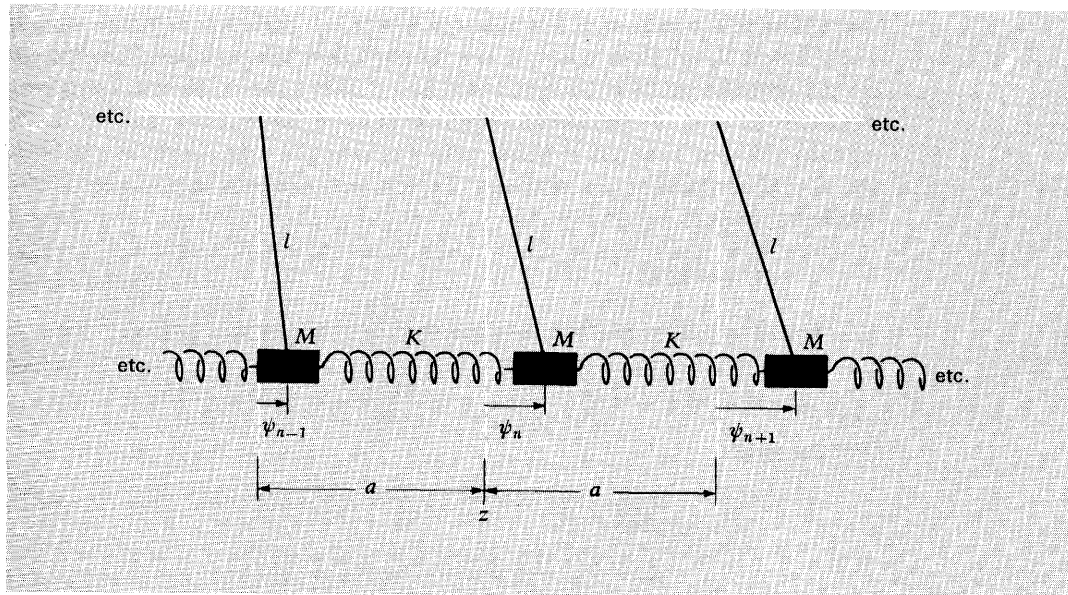


Fig. 3.10 Péndulos acoplados con condiciones de contorno no especificadas.

“masa” por “inductancia”) y dibujando nuevos esquemas se puedan obtener los resultados para muchos sistemas físicos diferentes a partir de los resultados finales para péndulos acoplados, sin repetir los detalles matemáticos. (Hicimos esto a menudo en el Cap. 2.) Por ahora pretendemos interesarnos solamente en péndulos acoplados.

En la Fig. 3.10 se muestran tres de los péndulos idénticos acoplados en un arreglo lineal (dejando sin especificar el número total de péndulos y las condiciones de contorno). La ecuación de movimiento para el desplazamiento $\psi_n(t)$ de la pesa n es (para pequeñas oscilaciones)

$$M\ddot{\psi}_n = -M\omega_0^2\psi_n + K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1}), \quad (62)$$

donde

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Antes de intentar la solución exacta de la ecuación (62) estudiaremos sus soluciones por la aproximación continua. Esto significa que no obtendremos ninguna información acerca del movimiento para configuraciones como la del modo de oscilación libre más alto, en el cual las pesas sucesivas tienen una configuración de “vaivén”. (Vaivén es el análogo longitudinal del “zigzag” transversal.) Por lo tanto, nos limitaremos (por ahora) a frecuencias bien por debajo del corte superior. Sólo cuando volvamos y resolvamos la ecuación exactamente, podremos discutir el movimiento para frecuencias impulsoras en la parte superior de la banda y por encima de la frecuencia de corte superior.

Aproximación continua. Suponemos que $\psi_n(t)$ varía suavemente con el aumento de la n . Esto equivale a suponer que todas las pesas en un pequeño entorno de la n con posición de equilibrio en z , tienen aproximadamente el mismo movimiento que la pesa n , de manera que el movimiento de una pesa en z puede ser descrito por una función continua $\psi(z, t)$. Desarrollemos en serie de Taylor los términos apropiados de la ecuación (62):

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= \psi(z, t), \\ \psi_{n+1}(t) &= \psi(z + a, t) = \psi(z, t) + a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} + \dots, \\ \psi_{n-1}(t) &= \psi(z - a, t) = \psi(z, t) - a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} + \dots.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\psi_{n+1} - \psi_n &= a \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \dots, \\ \psi_n - \psi_{n-1} &= a \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \dots.\end{aligned}$$

Insertando luego estas expresiones (y también $\ddot{\psi}_n(t) = \partial^2 \psi(z, t) / \partial t^2$) en la ecuación (62), obtenemos:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi(z, t) + \frac{Ka^2}{M} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}.} \quad (63)$$

Ecuación de ondas de Klein-Gordon. La ecuación (63) es una famosa ecuación de ondas. No es la clásica, excepto cuando ω_0 es nula. Se la llama algunas veces “ecuación de ondas de Klein-Gordon”. (Se rompe para las ondas de de Broglie de partículas libres relativistas.) (Véase el Tema suplementario 2.)

Suponemos que todas las partes móviles están en oscilación en estado estacionario a la frecuencia impulsora ω , que la fuerza impulsora esté realizando trabajo y, por lo tanto, con la misma constante de fase para todas las partes móviles. Entonces,

$$\psi(z, t) = \cos(\omega t + \varphi) A(z), \quad (64)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) A(z), \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \cos(\omega t + \varphi) \frac{d^2 A(z)}{dz^2}. \quad (66)$$

Insertando las ecuaciones (64), (65) y (66) en la (63) y simplificando el factor común $\cos(\omega t + \psi)$, obtenemos la ecuación diferencial para la

configuración espacial de los péndulos cuando éstos son impulsados en estado estacionario a la frecuencia ω

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = \frac{M}{Ka^2} (\omega_0^2 - \omega^2) A(z). \quad (67)$$

Las oscilaciones de la ecuación (67) tienen dependencias de z muy distinta para los casos $\omega^2 > \omega_0^2$ y $\omega^2 < \omega_0^2$. En el primer caso obtenemos ondas sinusoidales del tipo estudiado anteriormente (Sec. 2.2) para la cuerda continua:

$\omega^2 > \omega_0^2$: **Ondas sinusoidales.** Para $\omega^2 > \omega_0^2$, la ecuación (67) tiene la forma

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -k^2 A(z), \quad (68)$$

donde k^2 es la constante positiva

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_0^2) \frac{M}{Ka^2}. \quad (69)$$

La ecuación (69) es la relación de dispersión para ondas del sistema con $\omega^2 > \omega_0^2$. La solución general de la ecuación (68) es

$$A(z) = A \sen kz + B \cos kz, \quad (70)$$

donde A y B son constantes determinadas por las condiciones de contorno. Según las condiciones de contorno, habrá ciertas longitudes de onda (y sus correspondientes frecuencias impulsoras) que corresponden a una "resonancia". Las frecuencias de resonancia son las mismas que las frecuencias de los modos normales (ondas estacionarias) del sistema oscilando libremente.

Vamos ahora a algo nuevo e importante:

$\omega^2 < \omega_0^2$: **Ondas exponenciales.** Si ω^2 es menor que ω_0^2 , definimos la constante positiva κ (kappa) como la raíz positiva de la cantidad positiva

$$\kappa^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{M}{Ka^2}. \quad (71)$$

(No confunda kappa con la K mayúscula, de apariencia similar.) La ecuación (71) es la relación de dispersión para el caso $\omega^2 < \omega_0^2$. Entonces, la ecuación (67) tiene la forma

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = \kappa^2 A(z). \quad (72)$$

La frecuencia de un signo más, a la derecha de la ecuación (72), da a sus soluciones una forma completamente distinta a las soluciones sinusoidales de la ecuación (68) de apariencia similar. Debido al signo menos en la ecuación (68), su solución, la función sinusoidal $A(z)$, dada por la ecuación (70), se va inclinando siempre hacia el eje z . Después de atravesarlo, se vuelve a torcer y, eventualmente, lo vuelve a cruzar, etcétera, dando, en consecuencia, oscilaciones en el espacio. Por consiguiente, el signo más a la derecha de la ecuación (72) significa que su solución $A(z)$ se inclina siempre *alejándose* del eje z . Por lo tanto si $A(z)$ tiene valor y pendiente positivos (o valor y pendiente negativos), no retornará nunca al eje z . Si tiene valor positivo y pendiente negativa, se aproximará al eje z cada vez más lentamente a medida que crezca z . Si eventualmente cruza el eje z con pendiente negativa (puede hacerlo, pero no necesariamente), continuará tomando valores más y más negativos de $A(z)$ con el aumento de z y no volverá a cruzar el eje z .

La solución general de la ecuación (72) es una superposición de dos funciones exponenciales:

$$A(z) = Ae^{-\kappa z} + Be^{+\kappa z}. \quad (73)$$

Para ver que esta $A(z)$ es una solución diferenciada:

$$\begin{aligned} \frac{dA(z)}{dz} &= -\kappa Ae^{-\kappa z} + \kappa Be^{+\kappa z}, \\ \frac{d^2A(z)}{dz^2} &= (-\kappa)^2 Ae^{-\kappa z} + (\kappa)^2 Be^{+\kappa z} = \kappa^2 A(z), \end{aligned}$$

de manera que la ecuación (73) satisface la (72). Las constantes A y B están determinadas por las condiciones de contorno. En consecuencia, para $\omega^2 < \omega_0^2$, la solución general $\psi(z, t)$, es

$$\psi(z, t) = (Ae^{-\kappa z} + Be^{+\kappa z}) \cos(\omega t + \varphi). \quad (74)$$

Péndulos acoplados como filtros pasaaltos. La ecuación (74) da la forma general de una *onda exponencial*. La frecuencia $\omega_0^2 = g/l$ actúa como *corte de baja frecuencia*. Esto era de esperar puesto que encontramos ese mismo valor para el corte de baja frecuencia para el sistema simple de dos péndulos acoplados. A esa frecuencia (del modo más bajo), todos los péndulos se balancean en fase, con una fuerza restauradora dada solamente por la gravedad. Los resortes no están estirados ni comprimidos. La longitud de onda es “infinita”, o sea, k es nula. Si el sistema es impulsado por debajo del corte, no puede mantener una dependencia sinusoidal para las amplitudes relativas de las pesas oscilantes. En cambio, las amplitudes relativas de las pesas dependen exponencialmente de la distancia, como se desprende de la ecuación (74). Por lo tanto, el

sistema actúa como filtro pasaaltos. (En realidad, es un filtro de banda, pero estamos tratando el sistema solamente en la aproximación continua y debemos evitar la consideración de la respuesta del sistema cerca de los modos más altos con configuración en "zigzag".)

Suponga que el sistema es impulsado en $z = 0$ y se extiende desde $z = 0$ a $z = L$, punto en el cual el último resorte está sujeto a una pared rígida. Debiera ser intuitivamente evidente que si impulsamos el sistema por debajo del corte la amplitud $A(z)$ debe decrecer con el aumento de z , que es la distancia al extremo impulsado. Si el sistema es muy largo, o sea si L es grande, la amplitud debe hacerse muy pequeña en el tiempo que alcanzamos la pared en $z = L$. En el límite para L "infinito", la amplitud en $z = L$ debe ser nula. Esto implica que la contribución $Be^{+\kappa z}$ en la ecuación (74) debe anularse, o sea que B debe ser cero. Esta conjetura es correcta. (Véase Prob. 3.30.)

En la Fig. 3.11 mostramos un ejemplo de esta situación. Observe que para el ejemplo mostrado en la figura, produce muy poca diferencia sujetar o no el extremo en $z = L$. Si tenemos $\kappa L \gg 1$, la amplitud de oscilación es esencialmente nula antes de alcanzar $z = L$. En consecuencia, podemos simular experimentalmente una longitud "infinita" con una longitud finita L grande comparada con $1/\kappa$. (Véase Exp. casero 3.16.)

Nomenclatura para ondas exponenciales. La constante κ (kappa) se llama *constante de atenuación de amplitud*, o simplemente *constante de atenuación*. Sus unidades son *fracción de atenuación de amplitud por unidad de longitud*, o simplemente *atenuación por unidad de longitud*. Se llega a estas unidades considerando una amplitud producida por una fuerza impulsora en el extremo izquierdo de un largo sistema, o sea, lo suficientemente largo como para que tengamos la exponencial decreciente:

$$\psi(z, t) = A(z) \cos \omega t, \quad (75)$$

con

$$A(z) = Ae^{-\kappa z}. \quad (76)$$

La fracción de atenuación por unidad de longitud de $A(z)$ se define como

$$-\frac{1}{A(z)} \frac{dA(z)}{dz} = \text{fracción de atenuación por unidad de longitud} \quad (77)$$

Esto es igual a κ en el caso que $A(z)$ esté dada por la ecuación (76). Por otro lado, si $A(z)$ viene dada por $A(z) = B \exp(+\kappa z)$, la amplitud se atenúa cuando z decrece, más bien que cuando crece. Sin embargo,

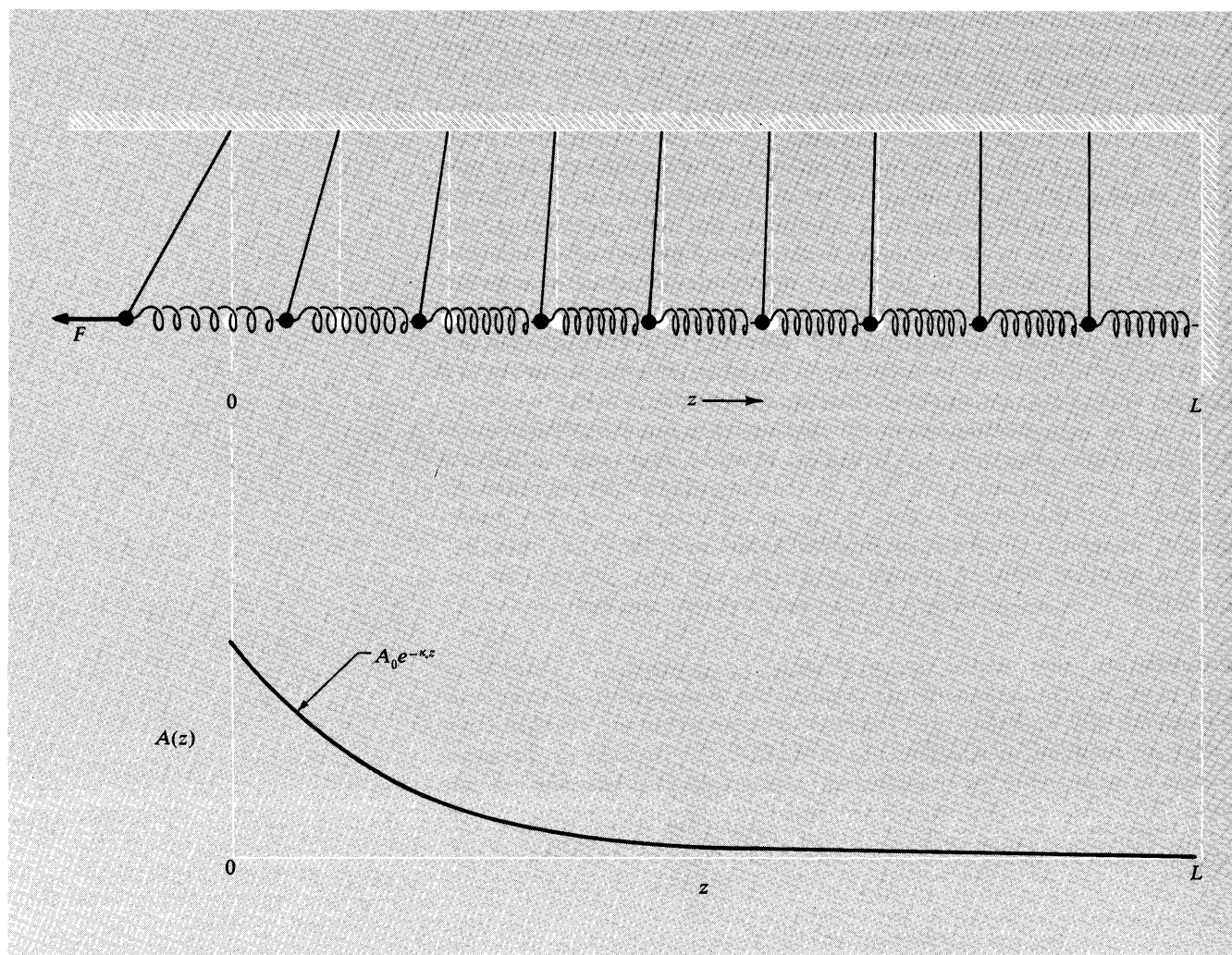


Fig. 3.11 Péndulos acoplados impulsados por la izquierda a una frecuencia de corte ω_0 . (a) Configuración instantánea del sistema. (b) Gráfica de $A(z)$.

esto no causa confusión, y podemos continuar llamando κ la constante de tensión. Cuando tenemos la solución general $A \exp(-\kappa z) + B \exp(+\kappa z)$, seguimos reteniendo la misma denominación para κ a pesar de que $A(z)$ puede estar aumentando para ciertos rangos de z y decreciendo para otros. Simplemente decimos que $A(z)$ es una superposición de dos términos, uno de los cuales es atenuado con el aumento de z y el otro con su disminución.

La inversa de κ es una longitud, δ , que es la distancia sobre la cual la amplitud $e^{-\kappa z} = e^{-z/\delta}$ es atenuada en un factor $e = 2,718 \dots$ Se llama

longitud de atenuación de amplitud, o *longitud de atenuación*, e-veces, o simplemente *longitud de atenuación*:

$$\frac{1}{\kappa} = \delta = \text{longitud de atenuación} \quad (78)$$

Hay cierto paralelismo entre la constante de atenuación κ para ondas atenuadas exponencialmente y el número de onda k para ondas sinusoidales: κ es la fracción de atenuación por unidad de distancia. Análogamente, la longitud de atenuación δ y la longitud de onda λ guardan cierta similitud: δ es la distancia para una atenuación en un factor e^{-1} ; λ es la distancia para un aumento de fase en 2π .

Relaciones de dispersión. Para ω por encima del *corte de baja frecuencia*, tenemos ondas sinusoidales. La frecuencia y el número de onda están relacionados por la ecuación (69) que reescribimos

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \left(\frac{Ka^2}{M}\right)k^2. \quad (79)$$

Para ω por debajo del corte de baja frecuencia ω_0 , no hay ondas sinusoidales (son “cortadas”). En su lugar, tenemos ondas exponenciales. La frecuencia ω y constante de atenuación κ están relacionadas por la ecuación (71) que reescribimos:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{Ka^2}{M}\right)\kappa^2. \quad (80)$$

Las ecuaciones (79) y (80) constituyen la relación de dispersión completa para el sistema (en la aproximación continua).

Para el rango de frecuencias, en el cual las oscilaciones *forzadas* son ondas sinusoidales, la relación de dispersión (79) para oscilaciones *forzadas* es igual a la que encontraríamos para los modos de oscilación *libre*. [Véase Sec. 2.4, ecs. (2.90), (2.91) y (2.92)]. Esto no es accidental. En ambas deducciones encontramos la ecuación de movimiento de la cuenta n y después introducimos la suposición de que todas las partes móviles se movían en oscilación armónica con la misma frecuencia ω (la frecuencia de su modo en un caso, la frecuencia de oscilación en estado estacionario, en el otro) y la misma constante de fase. La relación de dispersión se obtenía en base a estas suposiciones. Ése es generalmente el caso: *La relación de dispersión para oscilaciones sinusoidales forzadas es la misma que para oscilaciones libres*

Medio dispersivo o reactivo. En el ejemplo que estamos considerando, el “medio” en el cual tienen lugar las ondas está formado por el sistema de péndulos acoplados. Un medio que puede mantener oscilaciones sinu-

soidales se denomina medio *dispersivo*. Esto significa que ω no está por debajo de la frecuencia del corte, ω_0 . Un medio que no puede mantener oscilaciones sinusoidales pero que, en cambio, da ondas exponenciales (sin disipación de energía) se denomina medio *reactivo*. El mismo medio puede, por supuesto, ser reactivo en ciertas frecuencias y dispersivo en otras, como ocurre con nuestros péndulos acoplados.

Ejemplo 10: La ionosfera

La ionosfera terrestre es un ejemplo de medio (para ondas electromagnéticas) dispersivo para frecuencias superiores a una de corte (llamada frecuencia de oscilación del plasma ν_p) y reactivo para frecuencias inferiores a ese corte. La relación de dispersión para oscilaciones forzadas en la ionosfera es muy similar a la de péndulos acoplados. Está dada por

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad \omega > \omega_p, \quad (81)$$

y

$$\omega^2 = \omega_p^2 - c^2 \kappa^2, \quad \omega < \omega_p.$$

La frecuencia de oscilación del plasma es la del modo de oscilación más bajo de los electrones “libres”, que dedujimos en la ecuación (2.99), Sección 2.4. Las frecuencias diurnas típicas $\nu_p (= \omega_p/2\pi)$ son de 10 a 30 Mc. Si la ionosfera es impulsada “en un extremo” por una radioemisora que emite frecuencias típicas de radiodifusión AM, digamos $\nu = 1000$ Kc, se comporta como medio reactivo, puesto que $\nu \ll \nu_p$. Las ondas están atenuadas exponencialmente como es el caso para nuestros péndulos acoplados en la Fig. 3.11. Ningún trabajo se hace sobre la ionosfera en este proceso, puesto que la velocidad de cualquier electrón está $\pm 90^\circ$ fuera de fase respecto del campo eléctrico en su entorno. Ahora bien, en el caso de los péndulos de la Fig. 3.11, la salida promedio de energía de la fuerza impulsora es nula (despreciando la amortiguación). La energía entregada instantáneamente a los péndulos es devuelta a la fuerza impulsora más tarde en el ciclo. En el caso del problema tridimensional de la estación radial y la ionosfera, no es esto lo que ocurre. La estación recibe de vuelta una parte muy pequeña de la energía que propaga. La ionosfera no absorbe energía, sino que las ondas son reflejadas sobre la tierra en una región amplia y no van exactamente de vuelta al transmisor. Esta *reflexión total* desde la capa inferior de la ionosfera permite una técnica para transmitir a receptores distantes que están “fuera de la visual” por la curvatura de la superficie terrestre: Simplemente se hacen rebotar las señales contra la ionosfera. Esto funciona cuando ω está por debajo de la frecuencia de corte ω_p .

Las frecuencias típicas de emisoras de TV y de radio FM son de alrededor de 100 Mc. Esta frecuencia es mayor que la frecuencia de corte de la ionosfera que vale de 10 a 30 Mc. En consecuencia, la ionos-

fera se comporta como medio dispersivo a frecuencias FM y TV. Esto significa que es “transparente”. No hay atenuación exponencial para las ondas; son sinusoidales. Por lo tanto, no hay reflexión total de las ondas electromagnéticas hacia la tierra, y no se puede usar la ionosfera como ayuda para transmitir señales de la misma forma que para frecuencias $\nu = 10^{15}$ cps, orden de magnitud de la frecuencia de la “luz visible”.

Sabemos que la ionosfera no es reactiva a $\nu \approx 10^{15}$ cps, porque si no fuera así no veríamos las estrellas o el sol. (Sin embargo, nuestra visión evolucionaría para ver todas las frecuencias que atravesasen e iluminasen los objetos de manera que en cambio podríamos ver las estrellas ultravioleta.) En un capítulo posterior deduciremos la relación de dispersión para la ionosfera.

Penetración de ondas en una región reactiva. Cuando la ionosfera es impulsada por una estación radial a una frecuencia inferior al corte, las ondas de radio son *totalmente reflejadas* hacia la tierra. Pero, por así decir, esto no ocurre todo en un solo lugar. Consideremos un problema análogo para péndulos acoplados (que tienen la misma forma de relación de dispersión que la ionosfera) en la aproximación continua. Suponga que la primera pesa, en $z = 0$, es impulsada por la fuerza necesaria para producir el movimiento $\psi_1(t) = A_0 \cos \omega t$. En la región entre $z = 0$ y $z = L$ tenemos un número de péndulos acoplados, cada uno con una longitud l_1 tal que

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l_1} < \omega^2. \quad (82)$$

Por lo tanto, esta región (que llamaremos 1) es dispersiva. (La fuerza impulsora es la “radioemisora”. La región desde $z = 0$ a $z = L$ es “aire ordinario”, no “plasma”.) En $z = L$, las cuerdas de los péndulos se hacen repentinamente más cortas teniendo cada una una longitud l_2 tal que

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l_2} > \omega^2. \quad (83)$$

Por lo tanto, esta región (llamada 2) es reactiva (la región 2 es el “plasma”). Se extiende hasta $z = \infty$. Se muestra el sistema en la Fig. 3.12.

Encontramos $\psi(z, t)$, dado que $z = 0$, es igual a $A_0 \cos \omega t$. Para todo z tendremos

$$\psi(z, t) = A(z) \cos \omega t, \quad (84)$$

con $A(z)$ a determinar. En 2, la región reactiva entre $Z = L$ e infinito, $A(z)$ debe estar dado por

$$A_2(z) = C e^{-\kappa(z-L)}, \quad (85)$$

donde C es una constante desconocida y κ está dada por

$$\kappa^2 = \frac{M}{Ka^2} \left(\frac{g}{l_2} - \omega^2 \right), \quad (86)$$

suponiendo que ω^2 es menor que el corte g/l_2 . En la región dispersiva entre $z = 0$ y $z = L$, $A(z)$ está dado por

$$A_1(z) = A \operatorname{sen} k(z - L) + B \cos k(z - L), \quad (87)$$

con A y B desconocidas y k dada por

$$k^2 = \frac{M}{Ka^2} \left(\omega^2 - \frac{g}{l_1} \right), \quad (88)$$

suponiendo que ω^2 es mayor que g/l_1 . Impondremos las condiciones de contorno: En $z = L$ las funciones $A_1(z)$ y $A_2(z)$ deben reunirse suavemente, o sea, sus valores y pendientes deben ser iguales en $z = L$. Igualando las pendientes en $z = L$ da $kA = -\kappa C$. Por lo tanto, tenemos en la región 1

$$A_1(z) = C \left[\frac{-\kappa}{k} \operatorname{sen} k(z - L) + \cos k(z - L) \right]. \quad (89)$$

La condición de contorno en $z = 0$ es que $A_1(z) = A_0$ en $z = 0$. Entonces, la ecuación (89) da

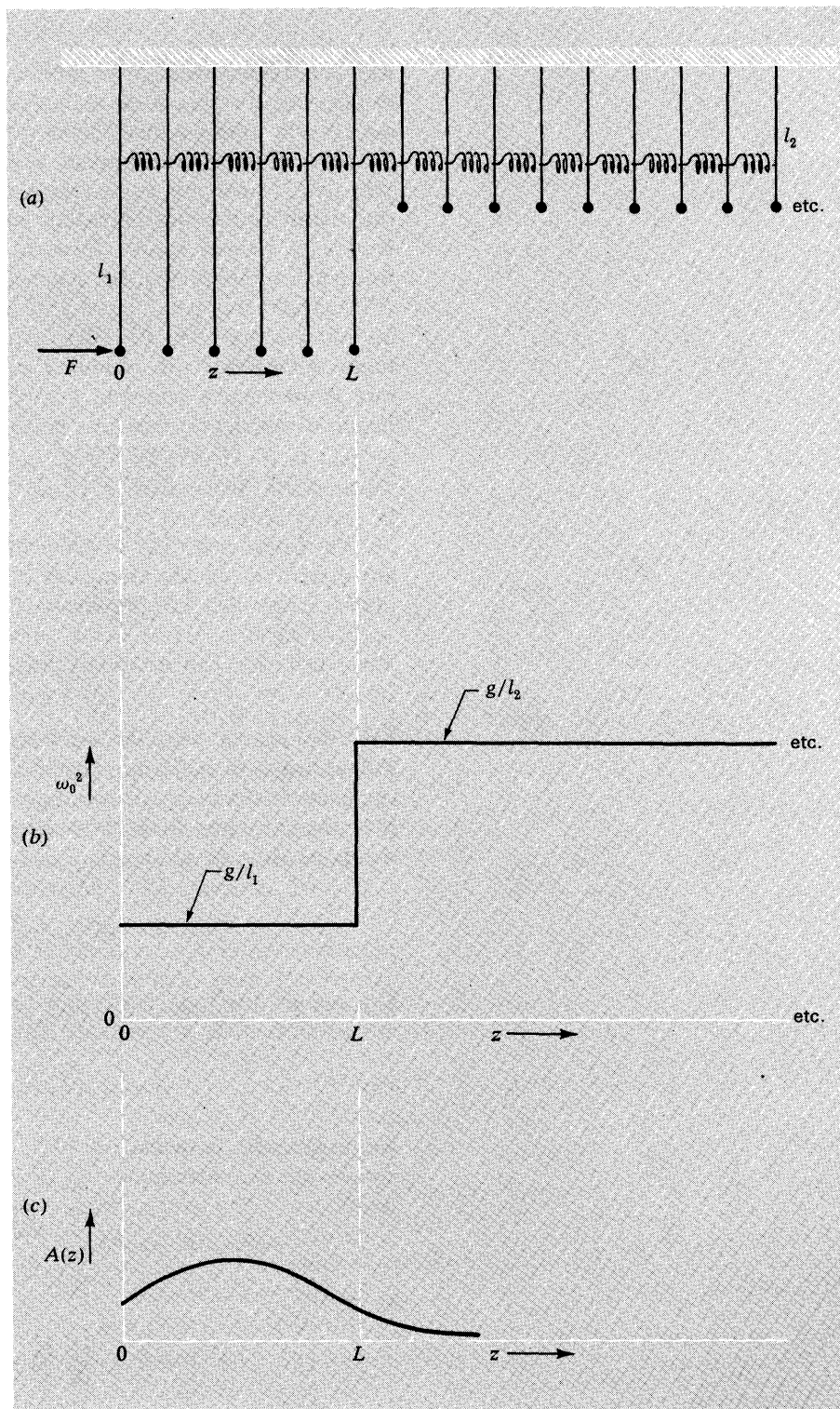
$$C = \frac{A_0}{\frac{\kappa}{k} \operatorname{sen} kL + \cos kL}. \quad (90)$$

La solución completa está dada por las ecuaciones (84), (85), (89) y (90) más las relaciones de dispersión (86) y (88).

Resonancia. El denominador de la ecuación (90) tiende a cero para ciertos valores de kL , dando amplitud “infinita” C . (Cuando el amortiguamiento no es despreciado, no tenemos amplitudes infinitas.) Estos valores de kL determinan la frecuencia de resonancia del sistema. Para hallar la frecuencia de resonancia, se deben usar las relaciones de dispersión así como también la ecuación (90). (Véase Prob. 3.31.) La amplitud $A(z)$ para ω cerca de la resonancia menor está dada en la Fig. 3.12 con C tomado grande, pero no infinito.

Modos ligados. Se ve de la Fig. 3.12c, que una región reactiva que se extiende una gran distancia (a $L' = \infty$ en nuestro ejemplo) actúa como una “pared gradual”. La pesa en $z = L$ no se mantiene fija, como en

Fig. 3.12 Péndulos acoplados con un cambio brusco en ω_0^2 en $z = L$. (a) El sistema. El péndulo en $z = 0$ está acoplado a una fuerza impulsora exterior. (b) Gráfica de ω_0^2 en función de z . Para frecuencias impulsoras ω , entre $\sqrt{g/l_1}$ y $\sqrt{g/l_2}$, la región 1 (desde $z = 0$ hasta L) es dispersiva, y la región 2 (desde $z = L$ hasta ∞) es reactiva. (c) Gráfica de la amplitud $A(z)$ en función de z para la frecuencia impulsora ω cercana a la frecuencia de resonancia más baja del sistema.



una pared; no obstante el movimiento de la pesa es despreciable fuera de algunas distancias de atenuación δ más allá de $z = L$. Esto sugiere que si encerramos una región dispersiva, rodeándola con una región reactiva infinitamente gruesa, podemos tener *modos* (de oscilación libre) de los péndulos en la región dispersiva, como si, de alguna manera, estuvieran contenidos entre dos paredes. Esa conjetura es correcta. Los modos se llaman *modos ligados*. Tienen lugar aproximadamente a las frecuencias resonantes del sistema de la Fig. 3.12.

Una característica interesante de los modos ligados es que hay sólo un número limitado de ellos para un sistema dado, aun habiendo un número “infinito” de péndulos en la región dispersiva. Esto se debe a que la frecuencia aumenta a medida que vamos pasando de un modo ligado al siguiente más alto hasta que finalmente alcanzamos uno para el cual la frecuencia es mayor que $\sqrt{g/l_2}$. Para $\omega^2 > g/l_2$ las regiones exteriores son dispersivas, y ya no sirven para “contener” oscilaciones en la región central.

En física cuántica, se encuentra que las ondas de de Broglie para los electrones en los átomos se comportan como modos ligados de péndulos acoplados. Los modos de oscilación de los electrones se llaman *estados ligados*. En el Tema suplementario 3 se da un ejemplo de sistema cuántico con estados ligados.

Solución exacta para las oscilaciones forzadas de un sistema de péndulos acoplados. Hemos estado examinando las propiedades de las oscilaciones forzadas de péndulos acoplados en la aproximación continua. Encontramos ahora la solución exacta de la ecuación de movimiento de un péndulo en el arreglo lineal, ecuación (62), que reescribimos aquí:

$$\ddot{\psi}_n = -\omega_0^2 \psi_n + \frac{K}{M} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}). \quad (91)$$

Suponemos que toda parte móvil oscila en movimiento armónico con la misma frecuencia y constante de fase:

$$\psi_n = A_n \cos \omega t. \quad (92)$$

Reemplazando la ecuación (92) en la (91) y simplificando el factor común $\cos \omega t$, obtenemos

$$-\omega^2 A_n = -\omega_0^2 A_n - \frac{2K}{M} A_n + \frac{2K}{M} \left(\frac{A_{n+1} + A_{n-1}}{2} \right),$$

es decir

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}(A_{n+1} + A_{n-1})}{A_n} \right). \quad (93)$$

Rango de frecuencias dispersivo. (Es el “paso de banda” en la terminología de filtro.) En la región dispersiva, las oscilaciones son sinusoidales en el espacio. Supongamos, por lo tanto, una solución de la forma

$$A_n = A \sen kna + B \cos kna. \quad (94)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A \sen(kna + ka) + B \cos(kna + ka), \\ A_{n-1} &= A \sen(kna - ka) + B \cos(kna - ka). \end{aligned} \quad (95)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A_{n+1} + A_{n-1} &= 2A \sen kna \cos ka + 2B \cos kna \cos ka \\ &= 2 \cos ka (A \sen kna + B \cos kna) = 2 \cos ka A_n \end{aligned} \quad (96)$$

Insertando este resultado en la ecuación (93) se obtiene

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M} (1 - \cos ka), \quad (97)$$

es decir:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \sen^2 \frac{ka}{2}. \quad (98)$$

La ecuación (98) es la ley de dispersión para el rango de frecuencias dispersivo. Da frecuencias desde $\omega^2 = \omega_0^2$ hasta $\omega^2 = \omega_0^2 + 4K/M$, correspondientes a valores de ka entre $ka = 0$ y $ka = \pi$. La ecuación (98) es exactamente la misma ley de dispersión que obtuvimos para péndulos acoplados oscilando libremente en la ecuación (2.90), Sección 2.4.

Rango reactivo bajo. Usando nuestra experiencia con la aproximación continua vamos a conjeturar que la solución general para frecuencias por debajo del corte de baja frecuencia ω_0 tiene la forma de una *onda exponencial*

$$A_n = A e^{-\kappa na} + B e^{+\kappa na}. \quad (99)$$

Entonces

$$A_{n+1} + A_{n-1} = (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}) A_n. \quad (100)$$

Entonces la ecuación (93) da la ley de dispersión

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \left[1 - \frac{1}{2} (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}) \right]. \quad (101)$$

La ecuación (101) puede ponerse en forma parecida a las ecuaciones (97) y (98). Usando la definición de seno y coseno hiperbólico [ecs. (11) y (12) del apéndice], encontramos

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}(1 - \cosh \kappa a) \quad (102)$$

o

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4K}{M} \sinh^2 \frac{1}{2} \kappa a. \quad (103)$$

$\omega = \omega_0$, la solución dispersiva (98) da $k = 0$, y la solución reactiva (103) da $\kappa = 0$. Ambas son “ondas planas”, y por lo tanto coinciden.

Rango reactivo alto. Este rango está formado por todas las frecuencias por encima del recorte de alta frecuencia $\omega_{\text{máx}}$, donde $\omega_{\text{máx}}^2 = \omega_0^2 + 4K/M$. Para este rango, nos guiamos por nuestro estudio de filtros de dos grados de libertad. Allí encontramos que las oscilaciones impulsadas a una frecuencia por encima del corte de alta frecuencia tienen forma de zigzag como la del modo más alto, pero también tienen una atenuación de amplitud con el aumento de la distancia al extremo de entrada. (Véase Fig. 3.6.) Conjeturemos que la forma de A_n está dada por la onda *exponencial en zigzag*

$$A_n = (-1)^n (Ae^{-\kappa na} + Be^{+\kappa na}). \quad (104)$$

Entonces obtenemos (por los mismos pasos que dieron la ec. (100), excepto los de signo menos)

$$A_{n+1} + A_{n-1} = -A_n(e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}).$$

Entonces, la ecuación 93 da la ley de dispersión

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}) \right\} \\ &= \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \{ 1 + \cosh \kappa a \} \end{aligned} \quad (105)$$

$$= \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \cosh^2 \frac{1}{2} \kappa a. \quad (106)$$

En $\kappa = 0$, ω^2 es $\omega_0^2 + 4K/M = \omega_{\text{máx}}^2$. Por lo tanto, exactamente en el corte de alta frecuencia $\omega_{\text{máx}}$ no hay atenuación.

En la figura 3.13 se da en forma gráfica la ley de dispersión exacta para todas las frecuencias, como viene dada por las ecuaciones (98), (103) y (106).

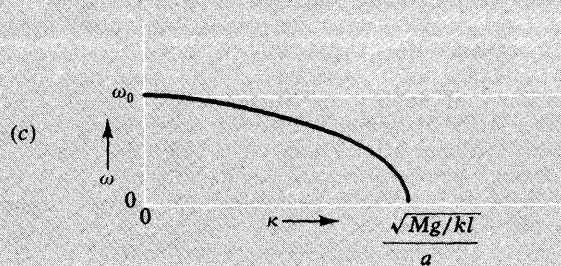
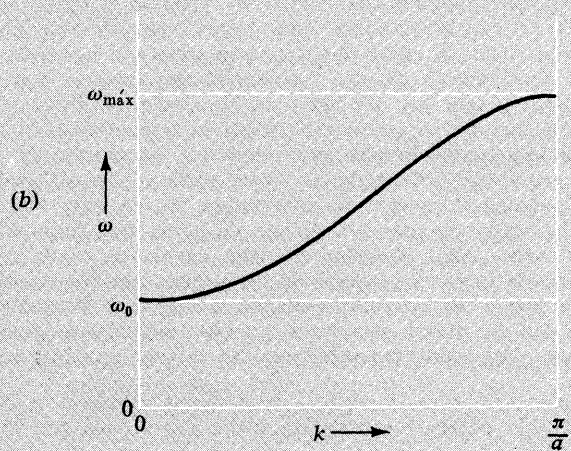
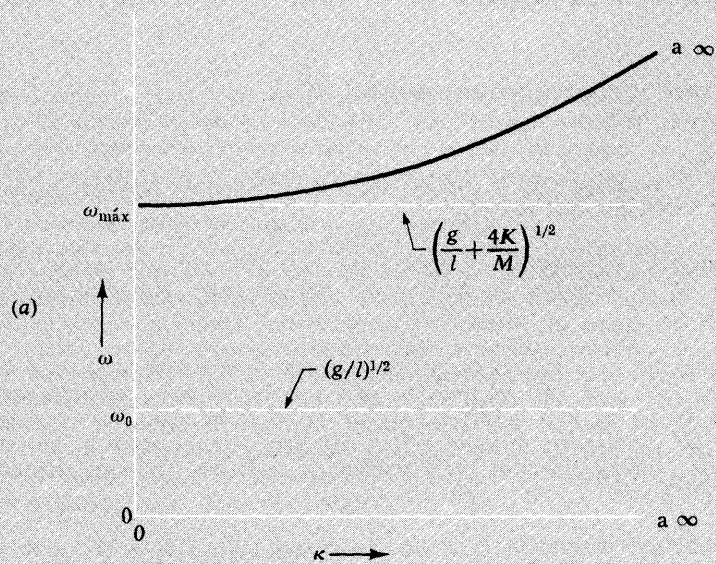


Fig. 3.13 Relación de dispersión completa para péndulos acoplados. (a) Por encima del corte de alta frecuencia: las ondas son exponenciales en zigzag. (b) Rango de frecuencias dispersivo: ondas sinusoidales. (c) Por debajo del corte de baja frecuencia: ondas exponenciales.

Problemas y experimentos caseros

3.1 Vea la ecuación (10) y cumpla los pasos algebraicos omitidos en la obtención del resultado $E = E_0 e^{-t/\tau}$.

3.2 Demuestre por sustitución directa que $x_1(t)$ dada por la ecuación (3), es una solución de la ecuación de movimiento del oscilador armónico amortiguado, ecuación (2).

3.3 Demuestre que, si $x_1(t)$ es una solución de la ecuación (1) para una fuerza impulsora $F_1(t)$ y si $x_2(t)$ es solución para una fuerza impulsora diferente $F_2(t)$, entonces la fuerza $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ da la solución $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, siempre que las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ para la superposición sean también las sumas correspondientes de condiciones iniciales, o sea, siempre que $x(0) = x_1(0) + x_2(0)$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)$.

3.4 Pruebe por sustitución que las ecuaciones (15), (16) y (17) dan una solución a la ecuación (14).

Experimento casero

3.5 Pulsaciones transitorias. Para éste y algunos experimentos posteriores necesitará un tocadiscos. En el presente experimento debe impulsar un péndulo por medio del plato del tocadiscos. Una velocidad conveniente es 45 rpm. (¿Cuál es la correspondiente longitud de cuerda de péndulo?) Pegue sobre el plato una caja liviana de cartón y, sobre ésta, pegue verticalmente un lápiz. Póngale un anillo de hilo. Sujete al anillo el extremo de unos 6 a 8 pies de bandas de goma atadas una a continuación de otra y sujete el otro extremo a la cuerda del péndulo. Mida la frecuencia del péndulo para oscilaciones libres (todo lo que necesita es un reloj común con segundero). Mida la frecuencia de pulsación cuando el péndulo es impulsado. Pruebe con diferentes longitudes de cuerda. Agregue cierto amortiguamiento colocando un libro, tabla o algo así, que roce contra la cuerda del péndulo (lo mejor es una ranura, o sea, una tabla o un libro de cada lado). La razón de usar una banda de goma tan larga es lograr un resorte lo suficientemente débil. También es mejor acoplar la banda de goma lo suficientemente cerca de la parte superior de la cuerda para que la amplitud de movimiento en ese punto sea considerablemente menor que la amplitud de movimiento del lápiz (en el plato), aun para grandes amplitudes pendulares. Esto asegura una fuerza impulsora independiente de la amplitud del péndulo.

3.6 Verifique la ecuación (22) para la pérdida de potencia debida a la fricción. Verifique que es igual a la potencia consumida según viene dada por la ecuación (21).

Experimento casero

3.7 Resonancia en un "slinky" amortiguado. Estire el "slinky" hasta 8 pies más o menos y sujételo en ambos extremos. Uno de los extremos debe estar sujeto de manera que el "slinky" pueda ser soltado y vuelto a sujetar fácilmente con un número de vueltas distinto entre soportes. Impulse el "slinky" con el plato del tocadiscos del Experimento casero 3.5, usando una larga banda acopladora de goma. Use la velocidad de 45 rpm. Mida la frecuencia de oscilación libre del "slinky". (Las unidades más convenientes son rpm.) Esta frecuencia puede ser variada cambiando el número de vueltas entre los soportes fijos. (Véase el Exp. casero 2.1.) *Mida el tiempo medio de decaimiento τ .* Aumente la amortiguación agregando una larga cinta elástica a lo largo del "slinky", como para tener un tiempo de amortiguamiento conveniente (digamos 10 a 20 seg.) *Dibuje una curva de resonancia*, es decir, represente $|A|^2$ vs. ω_0^2 , con ω fija en 45 rpm. Tome nota de las relaciones de fase y asegúrese de entenderlas. Una manera de medir $|A|$ es usar una luz que proyecte sombras nítidas (lám-

para transparente en lugar de opal, o sea, una fuente puntual); medir la posición de la sombra de un trozo de cinta del "slinky" sobre la pared o el piso, calcular el ancho completo a semimáximo, medido en vueltas de "slinky", mientras está realizando el experimento. (Puede decidirse a acortar el tiempo de amortiguamiento si encuentra que le da una resonancia limitada, o que las pulsaciones transitorias tardan demasiado en desaparecer.)

Posibles fuentes de problemas: Si la banda de goma se relaja siempre completamente y luego "chasquea", el análisis de Fourier de la fuerza ejercida por la goma contendrá armónicos de 45 rpm. Éstos excitarán armónicos del "slinky". Es, en definitiva, un problema interesante. *Otra:* Excite la banda de goma y obsérvela oscilar. Asegúrese que las oscilaciones sean bien rápidas comparadas con una o dos veces 45 rpm; de otra manera ocurren cosas raras. Trate de ver la desaparición de la amplitud elástica y aparición de la absorbente cuando está exactamente en la resonancia, es decir, fíjese en la fase relativa del tocadiscos (lápiz) y el "slinky". ¿Qué obtiene como producto del ancho completo de resonancia por el tiempo medio de decaimiento? ¿Coincide su resultado (dentro del error experimental) con la ecuación (28)?

3.8 Oscilaciones forzadas en un sistema de dos latas acopladas. Se muestra la disposición en la Fig. 3.3 y se da la teoría en las Secciones 3.3 y 3.4. Las cuerdas deben estar sujetas a estacas en las cuales puedan ser enrolladas para variar las frecuencias. Fije las estacas a estantería, mesa o algo así. Las longitudes de cuerda deben variar en un rango de 30 a 70 cm. A medida que se varían las longitudes de cuerda, van variando ω_1^2 y ω_2^2 , de tal modo que sus diferencias permanecen constantes. Por consiguiente, varían la cuerda mientras se mantiene constante la frecuencia impulsora es casi equivalente a variar la frecuencia impulsora manteniendo constante a ω_1^2 y ω_2^2 . Para longitudes de cuerda dadas, mida las frecuencias de los dos modos (con el tocadiscos desacoplado). Impulse luego el sistema a 45 rpm. Impulse las oscilaciones longitudinales (principalmente) alineando la dirección de acoplamiento según la dirección del "slinky". Los modos longitudinales y transversales tienen los mismos conjuntos de frecuencias, como fácilmente puede determinar. Esto puede llevar a efectos que distraen, a pesar de ser interesante, especialmente cerca de una resonancia. Hay cinco frecuencias interesantes para excitar, a saber las dos frecuencias resonantes y las regiones por debajo, intermedia y por encima. Fíjese en las características de filtro por encima y por debajo del corte. Estudie las relaciones de fase, fíjese solamente y vea si lo entiende. Las pulsaciones transitorias pueden durar mucho tiempo si no hay amortiguación. Lo mejor es amortiguar las cuerdas haciéndolas rozar contra algo. Probablemente lleva mucho tiempo hacer gráficos de las curvas resonantes. No se moleste. (Ya lo hizo una vez, así lo esperamos, en el Exp. casero 3.7.) Mida, en cambio, los tiempos de amortiguación de los dos modos y calcule los anchos completos de resonancia esperados, Γ , usando $\Delta\omega\tau = 1$. ¿Hasta qué punto, se asemejan, su situación y la descrita en la Fig. 3.4? ¿Sirven las ecuaciones para filtros mecánicos de la Sec. 3.4?

Otra manera de variar las frecuencias relativas es, por supuesto, usar las otras posiciones del tocadiscos 78, 33 y 16 rpm. Desgraciadamente esto no produce una variable continua.

3.9 Un martillo neumático machaca el pavimento a, aproximadamente, 20 cps. La manija golpea la mano del operador a la misma frecuencia. Diseñe un filtro pasabajos para ser incorporado a la manija a fin de reducir allí la amplitud de vibración, en un factor de 10. Una manera (llamada "fuerza bruta") es simplemente aumentar 10 veces la masa del cuerpo de la herramienta (la parte contra la cual retrocede el martillo). Puesto que la herramienta ya pesa alrededor de 50 lbs, intente un dispositivo de resortes y masas.

Experimento casero

160 Oscilaciones forzadas

3.10 Verifique que el promedio temporal de energía almacenada E para oscilación en estado estacionario está dado por la ecuación (23).

3.11 Verifique que los puntos de semipotencia para la curva de resonancia en estado estacionario están dados por las ecuaciones (25) y (26).

3.12 Filtro mecánico. (Véase Secc. 3.4.) Una parte de un aparato delicado está apoyada sobre un piso que tiene una vibración vertical de alrededor de 20 cps y se desea atenuar esta vibración en un factor de 100, para lo que se coloca el aparato sobre un amortiguador. ¿Cuánto se hundirá aproximadamente la cabeza del amortiguador cuando se coloque el aparato encima? (*Sugerencia:* Vea el ejemplo que sigue a la ecuación (58), Sec. 3.4. Asimismo, aproxime el amortiguador por un resorte perfecto de Hooke.)

Res.: Alrededor de 6 cm.

3.13 Demuestre que la ecuación (31) da la solución estacionaria exacta para la ecuación (14) del oscilador forzado para el caso en que la constante de amortiguación Γ es nula.

3.14 Demuestre que si los péndulos de la Fig. 3.10 están acoplados por "slinkies" tienen la misma ecuación de movimiento para oscilaciones horizontales transversales que para el movimiento longitudinal mostrado.

3.15 Esquematice un sistema de inductancias y capacitancias que tenga ecuación de movimiento de forma similar a la (62), y deduzca sus ecuaciones de movimiento.

Experimento casero

3.16 Filtro pasabandas mecánico. Con sólo dos péndulos acoplados no podemos apreciar el carácter exponencial del comportamiento de filtración, cualquier curva puede pasar por dos puntos. Ponga una tercera lata dentro de su "slinky", a medio camino entre las otras dos, y suspéndala como para tener un sistema similar al de las Figs. 3.6 y 3.7. Impulse el sistema por debajo y por encima del corte con el tocadiscos. Mida las relaciones ψ_a/ψ_b y ψ_a/ψ_c . ¿Son iguales?

3.17 Suponga que la ionosfera comienza repentinamente en una frontera en la cual la frecuencia ν_p aumenta repentinamente de cero a 20 Mc. Encuentre la distancia de atenuación de amplitud δ para ondas de radio AM de frecuencia 1000 Kc.

Resp. Alrededor de 2,5 metros, independiente de la frecuencia, en tanto ésta esté bien por debajo del corte.

3.18 Usando los péndulos acoplados como guía, escriba la relación de dispersión completa para el sistema análogo de inductancias y capacitancias acopladas. Queremos la relación de dispersión en la banda y en las dos regiones de frecuencia de corte.

3.19 Demuestre que si usamos la aproximación de acoplamiento débil y si permanecemos razonablemente cerca de una resonancia, las amplitudes elástica y absorbente pueden escribirse (con una adecuada elección de unidades) en la forma

$$A_{ab} = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad A_{el} = \frac{-x}{x^2 + 1},$$

Donde

$$x = (\omega - \omega_0)/\frac{1}{2}\Gamma.$$

3.20 Suponga que tenemos un sistema con dos resonancias a las frecuencias ω_1 y ω_2 , que contribuyen igualmente a la amplitud elástica de alguna parte móvil. Para ω alejado de ω_1 y ω_2 , podemos escribir (en algún tipo de unidades).

$$A_{el} = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}.$$

Demuestre que si ω difiere de ω_1 y ω_2 en mucho más que su diferencia, entonces A_{el} es (en una buena aproximación) el doble que cualquiera de las dos contribuciones. Esto es, pruebe que

$$A_{el} = \left(\frac{2}{\omega_{pro}^2 - \omega^2} \right) (1 + \epsilon^2 + \dots),$$

donde

$$\omega_{pro}^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2), \quad \epsilon = \frac{1}{2} \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{\omega_{pro}^2 - \omega^2}.$$

3.21 Comience con la ley de dispersión exacta para los péndulos acoplados dada por las ecuaciones (98), (103) y (106). Suponga que $a/\lambda \ll 1$ y $a/\delta \ll 1$. Entonces, la aproximación continua será buena. (¿Por qué?) Desarrolle las fórmulas de dispersión en serie de Taylor y mantenga solamente los primeros términos significativos. Compare su resultado con el obtenido en la Sección 3.5 en la aproximación continua.

3.22 Pulsaciones transitorias interminables. (Véase la Sec. 3.2.) Verifique la forma de "oscilación casi armónica modulada en amplitud" del desplazamiento del oscilador para oscilación transitoria con amortiguamiento nulo, o sea, verifique la ecuación (43). Demuestre que, para amortiguamiento nulo y para frecuencia impulsora exactamente en resonancia, la amplitud modulada crece linealmente con el tiempo [Ec.(45)].

3.23 Penetración exponencial en una región reactiva. Aúne un sistema de "slinkies" y latas como el de la Fig. 3.12. Acople su sistema de impulsión (tocadiscos) a un extremo de la región dispersiva. Disponga las longitudes de manera que 78 rpm esté por encima del corte de frecuencia superior, 45 rpm esté en la banda, y 33 rpm (y 16 rpm) por debajo del corte. Si puede idear una manera rápida y sencilla de cambiar todas las longitudes de cuerda al mismo tiempo y en la misma cantidad, puede variar ω_0^2 (y por lo tanto todas las frecuencias resonantes) continuamente, manteniendo constante la frecuencia impulsora, y buscar resonancias.

Experimento casero

3.24 Pulsaciones transitorias. Verifique la ecuación (46), que da la dependencia temporal de la energía almacenada en un oscilador forzado que comienza con energía cero al tiempo cero. Suponga acoplamiento débil. Suponga que la frecuencia impulsora es cercana (pero no exactamente igual) a ω_1 . Por lo tanto, tome $\omega/\omega_1 = 1$ donde sea apropiado. (No es apropiado tomar $\omega = \omega_1$ en una expresión como $\cos \omega t - \cos \omega_1 t$, puesto que por pequeña que sea la diferencia entre ω y ω_1 , conduce a un efecto grande, es decir, a un conocimiento de fase relativamente grande.)

3.25 Demuestre que el resultado para el oscilador "sobreamortiguado" dado por la ecuación (9) se sigue de las ecuaciones (7) y (8). (Sugerencia: verifique primero las identidades $\cos ix = \cosh x$, $\sin ix = i \sinh x$; luego úselas.)

3.26 Amortiguamiento crítico. Comenzando con la ecuación (7) para las oscilaciones libres subamortiguadas, muestre que para amortiguamiento crítico la solución se hace

$$x_1(t) = e^{-(1/2)\Gamma t} \{x_1(0) + [\dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\Gamma x_1(0)]t\}.$$

Muestre que también se obtiene este resultado comenzando con la ecuación (9) para oscilaciones sobreamortiguadas.

Experimento casero

3.27 Ancho de frecuencia resonante para un tubo de embalaje. Lea los párrafos que siguen a la ecuación (28). En el modo normal más bajo de las ondas acústicas en un tubo de embalaje abierto en ambos extremos, la longitud del tubo es esencialmente una semilongitud de onda. (Hay una pequeña corrección terminal, de manera que en realidad el largo del tubo es alrededor de un diámetro menor que una semilongitud de onda.) La velocidad del sonido es aproximadamente 330 m/seg. Si su diapasón es un C523 cps, el tubo resonará si su longitud es de unos 32 cm.

(a) Verifique esta afirmación. La frecuencia resonante ν_0 de un tubo de longitud L está, por lo tanto, dada por

$$\nu_0 = \frac{523}{(L/L_0)} = \frac{\omega_0}{2\pi},$$

con L_0 alrededor de 32 cm. (L_0 no será exactamente 32 cm debido al efecto terminal ya mencionado.)

(b) Verifique la fórmula. Corte ahora 5 ó 6 tubos con valores de L cuidadosamente elegidos para "cubrir" el pico de la curva de resonancia y los 2 puntos de semipotencia en cada costado del pico. Se espera que la intensidad del sonido I tenga una forma resonante dada por

$$I = \frac{(\frac{1}{2}\Gamma)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2},$$

Donde hemos normalizado I igual a 1,0 para $\omega = \omega_0$. En sus experiencias, la frecuencia de excitación ν es la del diapasón y, por lo tanto, constante. La frecuencia de resonancia ν_0 es variada cambiando la longitud del tubo. Deberá encontrar la longitud L_0 de resonancia, incluyendo la corrección final (esto se hace más fácilmente con el oído, ajustando el tubo sobre su cabeza y comparando el tono con el del diapasón), y debe encontrar las dos longitudes del tubo que corresponden a los puntos de potencia media. Así, encontrará el ancho total Γ . Esto le dará, indirectamente, el tiempo de decaimiento de la oscilación libre. Su principal problema experimental es hallar un método razonablemente simple de estimar un decrecimiento de la intensidad sonora en un factor dos.

3.28 Dos péndulos acoplados como filtro mecánico pasabanda. Consideremos el sistema mostrado en la Fig. 3.3, y descrito en la Sección 3.3. Desprecie el amortiguamiento. Muestre que

$$\psi_a \approx \frac{F_0}{2M} \cos \omega t \left\{ \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right\},$$

$$\psi_b \approx \frac{F_0}{2M} \cos \omega t \left\{ \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right\},$$

y

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2},$$

donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y ω es la frecuencia de excitación.

3.29 Filtro pasabanda eléctrico. Consideremos el filtro mostrado en la Fig. 3.8. Encuentre la ecuación diferencial que satisfacen I_a y para I_b . Demuestre que las coordenadas normales son $I_a + I_b$ e $I_a - I_b$, y que los modos están dados por las ecuaciones (59).

3.30 Péndulos acoplados. Consideremos un arreglo lineal de péndulos acoplados excitados cuyo extremo inferior está en $z = 0$ y unidos a una pared rígida en $z = L$, como se muestra en la Fig. 3.11. Demuestre que si $\psi(z, t)$ es igual a $A_0 \cos \omega t$ en $z = 0$, entonces $\psi(z, t) = A(z) \cos \omega t$, donde

$$A(z) = A_0 \frac{[e^{-\kappa z} - e^{-\kappa L} e^{-\kappa(L-z)}]}{1 - e^{-2\kappa L}}.$$

Obsérvese que para $L \rightarrow \infty$ esto se hace simplemente $A_0 e^{-\kappa z}$.

3.31 Resonancia en un sistema de péndulos acoplados. Lea la discusión que sigue a la ecuación (90). Encuentre los valores resonantes de ω^2 como sigue: (a). Demuestre que en la resonancia se tiene

$$k \cot kL = -\kappa.$$

Esto demuestra que los valores resonantes de $\theta \equiv kL$ deben estar en el cuadrante 2 (90 grados a 180 grados), cuadrante 4 (270 grados a 360 grados), cuadrante 6, cuadrante 8, etc. (b) Sea Ka^2/ML^2 igual a "una unidad" de fuerza restauradora por unidad de desplazamiento y por unidad de masa, esto es, de ω^2 . Sea $g/l_1 = \omega_1^2$, $g/l_2 = \omega_2^2$. Pruebe entonces que los valores de resonancia de ω^2 se obtienen llevando a un gráfico en función de θ las dos funciones.

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_1^2 + \theta^2 \\ \omega^2 &= \omega_2^2 - \theta^2 \cot^2 \theta.\end{aligned}$$

Las resonancias están dadas por la mitad de los puntos de intersección de las dos curvas. ¿Por qué solamente la mitad? (Nota: ω^2 , ω_1^2 y ω_2^2 son dimensionales en las ecuaciones anteriores, esto es, están dadas en unidades de Ka^2/ML^2 .) Realice un esquema que muestre un gráfico típico que dé las frecuencias de resonancia. ¿Qué sucede para frecuencias muy altas?

3.32 Reflexión total de la luz visible en un espejo plateado. Supongamos que el electrón de "valencia" de un átomo de plata se convierta en un electrón "libre" en plata sólida. Buscar (por ejemplo, en el *Handbook of Physics and Chemistry*), la valencia de la plata, su peso atómico y su densidad. Encuentre así la densidad N de electrones libres por unidad de volumen de plata sólida. Suponga que la relación de dispersión para luz en plata tiene la misma forma que para luz (u otras ondas electromagnéticas) en la ionosfera, es decir, suponga que:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_p^2 + c^2 k^2, & \text{si } \omega^2 \geq \omega_p^2, \\ \omega^2 &= \omega_p^2 - c^2 \kappa^2, & \text{si } \omega^2 \leq \omega_p^2,\end{aligned}$$

donde $\omega_p^2 = 4\pi Ne^2/m$, siendo e la carga y m la masa del electrón, respectivamente.

(a) Calcule la frecuencia de corte ν_p para plata sólida. Demuestre que para luz visible la frecuencia ν de la luz está por debajo del corte. Por consiguiente, esperamos que una capa de plata de espesor suficientemente grande dará reflexión total para luz visible que incida normalmente. Esto es lo que da la apariencia “plateada” a un espejo con depósito de plata.

(b) Calcule la distancia media de atenuación δ para luz roja de longitud de onda en el vacío de $0,65 \times 10^{-4}$ cm y para luz azul de longitud de onda en el vacío de $0,45 \times 10^{-4}$ cm. Un espejo “semiplateado” es una plancha de vidrio con una capa de plata que es algo más fina que una distancia de atenuación, de manera tal que aproximadamente la mitad de la luz penetra (es decir, la reflexión no es total). Supongamos que se observa un bulbo de luz “blanca” a través de un trozo de espejo semiplateado. (La luz “blanca” contiene en realidad todos los colores visibles.) ¿Esperaríamos que la luz transmitida fuera blanca? ¿Tiene un tinte azulado? ¿O quizá un tinte rojizo? ¿Qué diríamos con respecto a la luz reflejada?

(c) ¿De qué espesor debe ser la capa de plata para reducir la intensidad (que es proporcional al cuadrado de la amplitud) de la luz azul en el extremo final de la lámina en un factor 100? Tal espejo debe reflejar el 99 % de la luz incidente. (En realidad, la reflectividad es alrededor de 95 % para luz visible. Hemos despreciado la pérdida de energía debida a la resistividad de la plata. También puede empañarse la superficie, adquiriendo una capa de óxido de plata con propiedades muy diferentes a la de la plata metálica.)

(d) ¿Para qué frecuencia la capa de plata se volverá transparente? (Dé también la longitud de onda en el vacío. Ésta se denomina luz “ultravioleta”).

Experimento casero

3.33 Ondas estacionarias diente de sierra en agua poco profunda. Éstas fueron descritas en el Problema 2.13. Deseamos ahora aprender cómo excitar los modos dientes de sierra inferiores en un recipiente de agua. El modo diente de sierra más bajo es el modo “sloshing” y hay solamente medio “diente”. La superficie es lisa. La longitud del recipiente es media longitud de onda. El próximo modo diente de sierra debería tener un diente completo, es decir, la longitud del recipiente debería ser una longitud de onda (de la componente de Fourier inferior del diente de sierra). Este modo *no* resulta excitado si se excitan las oscilaciones sacudiendo el recipiente. *Explique por qué no resulta excitado.* El modo siguiente tiene 1 diente y medio, es decir, tres regiones planas. Así, la longitud del recipiente es tres semilongitudes de onda. Este modo *sí* puede ser excitado. Para esto sacuda suavemente el recipiente, y, cuando piense que lo ha conseguido, deposite el recipiente y déjelo oscilar libremente. Luego de practicar un poco podrá reconocer el modo y excitarlo. A continuación se da un método más sistemático: Consiga un metrónomo, o construya uno, colgando un peso de un hilo (un péndulo), de manera que el extremo golpee un trozo de papel o algo que haga ruido. Para una disposición dada del metrónomo, sacuda suavemente el recipiente al compás del metrónomo para encontrar la resonancia. Cuando esté cerca de la resonancia observe los batidos transitorios. Esto no es sólo atractivo, sino que también le dice cuán cerca está de la resonancia. Calcule la frecuencia de resonancia esperada, usando $v = \sqrt{gh}$. Haga esto *mientras* está realizando la experiencia, de modo que pueda aproximarse rápidamente a cero en la resonancia. Cuando alcance la resonancia, déjelo oscilar libremente y tome el tiempo de las oscilaciones libres.

Si se utiliza un recipiente suficientemente liviano, tal que la masa se debe en su mayor parte al agua y no al recipiente, y si se tiene una masa total suficientemente grande para dar un empuje por reacción sobre las masas, podemos mantenernos sobre la resonancia mediante una combinación de sensación manual y de observación. Entonces no será necesario el metrónomo. Se pueden ver “puntos” cimeros si se excitan ondas dientes de sierra en ambas direcciones horizontales. Cuando éstas se rompen y salpican agua, puede el lector estar seguro que ninguna teoría ondulatoria lineal podrá explicarlos nunca.

3.34 Ondas superficiales estacionarias rectangulares bidimensionales. Obtenga una batea para hielo de forma rectangular (no de Lucite rígido, sino de la clase de polietileno que es más flexible). Llene hasta el borde con agua, luego sobrellene de forma tal que la superficie del agua se redondee en la parte de arriba. (Esto reduce el amortiguamiento por los costados.) Golpee suavemente y observe la red de ondas estacionarias que oscilan libremente. Consiga un giróscopo de juguete (en cualquier juguetería, o bien, vea el catálogo de Edmund Scientific Co, Barrington, New Jersey 08007). Mantenga el giróscopo girando contra el costado de la cubeta (o, por ejemplo, acóplelo mediante un molde para tarta invertido, sobre el cual se han puesto ambos). Se puede ver la longitud de onda de las oscilaciones forzadas (las ondas estacionarias) creciendo gradualmente a medida que el giróscopo se detiene. Probablemente se notará también el efecto del pasaje a través de la resonancia.

Experimento casero

3.35 Ondas estacionarias en agua. (a) Sumerja en agua un diapasón vibrando y observe las ondas, especialmente entre los brazos de la horquilla.

Experimento casero

(b) Mantenga un diapasón horizontalmente sobre una superficie de agua (como dos brazos flotantes paralelos) y observe entre ambos brazos. (Algunos de los modos del diapasón son rápidamente amortiguados. Hay uno que persiste por varios segundos.) Iluminando con una pequeña fuente luminosa, desde varios ángulos (paralela y perpendicularmente a los brazos del diapasón), trate de ver la sorprendente cantidad de formas.

3.36 Armónicas y subarmónicas. Dado un oscilador armónico con una frecuencia natural de oscilación $\nu_0 = 10$ cps y un tiempo de decaimiento muy largo. Si este oscilador es alimentado con una fuerza armónicamente oscilante y con una frecuencia de 10 cps, adquirirá una gran amplitud, es decir, "resonará" en la frecuencia de excitación. Ninguna otra fuerza motriz oscilante *en forma armónica* producirá una gran amplitud (una resonancia).

(a) Justifique el enunciado anterior. Luego suponga que el oscilador está sujeto a una fuerza que es una pulsación cuadrada repetida periódicamente y cuya duración es 0,01 seg, repetidos una vez por segundo.

(b) Describa cualitativamente el análisis de Fourier de la pulsación cuadrada repetitiva.

(c) ¿"Resonará" el oscilador armónico (adquirirá una gran amplitud) bajo la influencia de esta fuerza motriz?

(d) Suponga que la fuerza motriz es la misma pulsación cuadrada (de ancho 0,01 seg) pero repetida dos veces por segundo. ¿Resonará el oscilador? Responder a la misma pregunta para velocidades de repetición de 3 seg, 4 seg, 5 seg, 6 seg, 7 seg, 8 seg y 9 seg.

(e) Vamos a ver ahora algo nuevo. ¿Qué pasa si alimentamos el mismo oscilador con igual pulsación cuadrada con una repetición de 20 seg? ¿Resonará el oscilador? Obsérvese que la frecuencia del oscilador en este caso es un *subarmónico* de la velocidad de repetición fundamental de la pulsación cuadrada motriz.

(f) Consideremos, de la misma manera, fuerzas motrices consistentes en pulsaciones cuadradas repetidas a 3, 4, etc., veces la frecuencia del oscilador. ¿Resuena el oscilador? Explíquelo.

(g) Ahora llegamos nuevamente a algo diferente. Supongamos que la fuerza motriz está acoplada al oscilador sólo cuando el desplazamiento del oscilador con respecto a la posición de equilibrio es positiva. Por ejemplo, éste es el caso cuando se empuja a un niño en una hamaca. Solamente se le empuja cuando su desplazamiento le pone al alcance de las manos (la fuerza motriz). Reconsideremos la cuestión de si se pueden excitar subarmónicos en este caso de "acoplamiento asimétrico". Supongamos que la "hamaca" oscila a 1 cps. Si se empuja (a ciegas, esté o no la hamaca allí) a 2 cps, ¿resonará la hamaca? ¿qué pasa si se empuja a 3 cps? ¿o a 3,5 cps? Explíquelo. Exponga ahora cómo es que una fuerza motriz de alta frecuencia de (por ejemplo) un motor de avión puede

excitar una resonancia a una frecuencia mucho menor que es un subarmónico de la frecuencia motriz, es decir, es $1/2$, $1/3$, etc., de la frecuencia motriz. ¿Es de esperar comúnmente la excitación de subarmónicos en sistemas que pueden sacudirse y chirriar? Explíquelo.

Capítulo 4

Ondas de propagación

4.1 Introducción 168

- Sistemas abiertos 168
- Relaciones de amplitud 169
- Relaciones de fase 169

4.2 Ondas progresivas armónicas en una dimensión y velocidad de fase 169

- Velocidad de fase 170
- ¿Tienen las ondas de propagación la misma relación de dispersión que las ondas estacionarias? 173
- Ley de dispersión para una disposición lineal de péndulos acoplados 173
- Onda de propagación sinusoidales 174
- Ondas exponenciales en un sistema abierto 175
- Ondas exponenciales en zigzag 175
- Ondas sinusoidales dispersivas y no dispersivas 175
- Ondas exponenciales reactivas 176
- Ejemplo 1: Ondas transversales en una cuerda con cuentas 176

- Ejemplo 2: Ondas longitudinales en un resorte con cuentas 177
- Velocidad de fase del sonido — Modelo de Newton 178
- Corrección al error de Newton 181
- Ejemplo 3: Ondas electromagnéticas en la ionosfera terrestre y velocidades de fase mayores que c 183
- Ejemplo 4: Línea de transmisión — filtro pasabajos 185
- ¿Puede la velocidad de fase de esta línea de transmisión pasabajos ser mayor que c ? 186
- Velocidad de fase de líneas de transmisión rectoparalelas 187
- Ejemplo 5: Línea de transmisión de placas paralelas 187

4.3 Índice de refracción y dispersión 190

- Tabla 4.1: Índices de refracción de materiales comunes 191
- Variación del índice de refracción con el color — dispersión 192
- Refracción y ley de Snell 192
- Dispersión del vidrio 194
- Tabla 4.2: Dispersión del índice de refracción del vidrio 194
- ¿Por qué el índice de refracción varía con la frecuencia? 195
- Ejemplo 6: Modelo simple de «molécula de vidrio» 196
- Velocidades de fase mayores que c 198

- Ondas exponenciales — rango de frecuencia reactiva 198
- Ejemplo 7: Dispersión de la ionosfera 199
- Explicación cualitativa de la frecuencia de corte inferior 201
- Discusión cualitativa del índice de refracción en un rango de frecuencias dispersivas 204
- Nomenclatura: ¿Por qué consideramos siempre a E y despreciamos a B ? 206

4.4 Impedancia y flujo de energía 207

- Ejemplo 8: Ondas de propagación transversales en una cuerda continua 208
- Impedancia característica 208
- Potencia de salida del transmisor 210
- Energía transportadora por una onda de propagación 211
- Ejemplo 9: Radiación de ondas longitudinales sobre un muelle 212
- Ejemplo 10: Ondas de sonido 213
- Patrón de intensidad de sonido 215
- Nomenclatura — decibel 215
- Aplicación: Valor medio cuadrático de la presión para intensidad de sonido dolorosa 216
- Aplicación: Amplitud para sonido dolorosamente elevado 216
- Aplicación: Amplitud para un sonido escasamente audible 216
- Aplicación: Salida de audio de un parlante típico de alta fidelidad 217
- Aplicación: Suma de dos sonidos dolorosamente cercanos 217

- Ejemplo 11: Ondas de propagación en una línea de transmisión pasabajos 218
- Ejemplo 12: Línea de transmisión de placas paralelas 220
- Ondas electromagnéticas planas en medios transparentes 221
- Ondas electromagnéticas planas en vacío no acotado 222
- Aplicación: Búsqueda de la constante solar 224
- Medición de flujo de energía de radiación electromagnética 226
- Intensidades normales para luz visible — potencia en candelas 228
- Brillo superficial 228
- ¿Por qué la luna no se ve más brillante cuando está más cerca? 229
- Iluminación — candela-pie 231
- Tabla 4.3: Brillo superficial 231
- Aplicación: Comparación entre una lámpara de 40 watios y la luna 231
- Aplicación: Satélite especular a modo de luna 231

Problemas y experimentos caseros 232

Capítulo 4 Ondas de propagación

4.1 Introducción

Los sistemas considerados en los Capítulos 1, 2 y 3, eran sistemas *cerrados*, es decir, sistemas encerrados en circuitos definidos, de manera que toda la energía permanece dentro de los confines del sistema. Encontramos que las oscilaciones libres de un sistema cerrado pueden ser descritas en función de una superposición de ondas estacionarias, es decir, modos, y que las oscilaciones forzadas en el estado estacionario pueden ser descritas en función de una superposición de contribuciones de ondas estacionarias que surgen de los modos. El carácter de los modos presentes está determinado por las condiciones de contorno.

Sistemas abiertos. En el Capítulo 4, consideraremos oscilaciones forzadas de *sistemas abiertos*, es decir, sistemas que no *tienen límite exterior*. Por ejemplo, si se suspende a un hombre, que está haciendo sonar una trompeta mediante una larga cuerda unida a la góndola de un globo situada a una altura considerable de la superficie de la tierra, el aire actúa para las ondas sonoras como un sistema abierto o semiabierto, al menos en la medida en que nos permite desprestigiar ecos (reflejos desde la tierra hacia el trompetista). Si el mismo trompetista toca, en cambio, en una habitación cerrada con pisos, paredes y cielo raso de madera dura, el efecto será completamente diferente. En este caso, el aire de la habitación actúa como un sistema cerrado y resonará en sus frecuencias modales, si éstas son apropiadamente excitadas. En cambio, si las paredes de la habitación están recubiertas por un material perfectamente absorbente del sonido, tal que no se reflejen ondas hacia el transmisor (la trompeta), entonces la habitación se comporta como si fuera un sistema completamente abierto, sin límites exteriores. De esta manera es innecesario que el medio se extienda realmente hasta el infinito para que sea un sistema abierto.

Las ondas producidas por una fuerza motriz que está acoplada a un medio abierto se llaman *ondas de propagación*— que se propagan desde la perturbación que las crea. Las ondas de propagación tienen la importante propiedad de transportar energía e impulso. Así, si se arroja una piedra a un estanque quieto, las ondas circulares que se expanden desde el lugar de caída de la piedra, pueden entregar energía cinética a un corcho flotando distante o pueden aumentar la energía potencial gravitacional de una varilla colocada mitad dentro y mitad fuera del agua, en el borde de una playa, empujándola sobre esta última.

Si una fuerza motriz (acoplada al medio abierto) oscila con movimiento armónico, las ondas de propagación que produce se denominan

ondas armónicas de propagación. En el estado estacionario, todas las partes móviles del sistema oscilan con movimiento armónico a la frecuencia motriz.

Relaciones de amplitud. Si las ondas se esparcen en dos o tres dimensiones, la amplitud del movimiento es menor en las partes más alejadas de la fuente (suponiendo que la fuente sea pequeña). Por otra parte, si el medio es unidimensional (como por ejemplo, en una cuerda estirada excitada en un extremo y que se extiende hasta el infinito o que termina en un dispositivo absorbente de las ondas), entonces la amplitud del movimiento armónico no disminuye con la distancia a la fuente (suponiendo que el medio es homogéneo). Éste es el caso no sólo para ondas unidimensionales (como en la cuerda), sino también para “ondas rectas” bidimensionales (oleaje producido por una tormenta en un lugar lejano) y “ondas planas” tridimensionales (ondas de radio provenientes de una estrella lejana).

Relaciones de fase. La fase relativa entre dos partes móviles diferentes en un medio abierto que transporta una onda de propagación armónica es muy diferente de cuando se trata de una onda estacionaria en un sistema cerrado. En el caso de una onda estacionaria, la cual puede ser un modo normal u oscilación libre de un sistema cerrado, o una oscilación forzada de un sistema cerrado, todas las partes móviles oscilan en fase unas con otras (salvo por los posibles signos menos). No es éste el caso en una onda de propagación. En cambio, si la parte móvil, b está más lejos de la fuerza motriz que la parte móvil a , entonces b tiene el mismo movimiento que a a raíz del tiempo que emplea la onda en propagarse en de a hasta b . Es así que b tiene una fase constante que difiere de la de a en una cantidad igual a la frecuencia multiplicada por el tiempo de retardo.

4.2 Ondas progresivas armónicas en una dimensión y velocidad de fase

Supongamos que tenemos un sistema unidimensional consistente de una cuerda continua, homogénea, estirada desde $z = 0$ hasta el infinito. La cuerda está sujeta en $z = 0$ al terminal de salida de algún dispositivo (“transmisor”) que puede sacudir la cuerda y así “irradiar” ondas de propagación a lo largo de la cuerda. Supongamos que el desplazamiento $D(t)$ del terminal de salida está dado por la oscilación armónica

$$D(t) = A \cos \omega t. \quad (1)$$

Deseamos encontrar el desplazamiento $\psi(z, t)$ de una parte móvil localizada en la posición z , donde z puede tomar cualquier valor entre 0 e infinito. Podemos hallar fácilmente $\psi(z, t)$ en $z = 0$. Como la cuerda está

unida directamente al terminal de salida del transmisor, el desplazamiento de la cuerda en $z = 0$ es igual a $D(t)$:

$$\psi(0,t) = D(t) = A \cos \omega t. \quad (2)$$

Velocidad de fase. De nuestra experiencia diaria en la observación de ondas de propagación en el agua, sabemos que viajan con velocidad constante mientras las propiedades del medio (profundidad del agua, por ejemplo) se mantienen constantes. Cuando las ondas de propagación son armónicas, esta velocidad se denomina *velocidad de fase* v_ϕ . También reconocemos que el movimiento de una parte móvil en la posición z al tiempo t es el mismo que de la parte móvil en $z = 0$ a un tiempo anterior t' , donde t' difiere de t en la cantidad de tiempo que tarda la onda en recorrer la distancia z a la velocidad v_ϕ :

$$t' = t - \frac{z}{v_\phi}. \quad (3)$$

Así tenemos la forma de una onda de propagación sinusoidal,

$$\begin{aligned} \psi(z,t) &= \psi(0,t') \\ &= A \cos \omega t' \\ &= A \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_\phi} \right) \\ &= A \cos \left(\omega t - \frac{\omega z}{v_\phi} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Obsérvese que para un z fijo, $\psi(z,t)$ es una oscilación armónica en el tiempo, además, para t fijo, $\psi(z,t)$ es una oscilación sinusoidal en el espacio. Por supuesto, ambos enunciados valen también para una onda sinusoidal estacionaria, que puede tener, por ejemplo, la forma,

$$\psi(z,t) = B \cos \omega t \cos (\alpha - kz), \quad (5)$$

donde α es una constante. Para tiempo fijo, la dependencia de la onda de propagación dada por la ecuación (4), tiene la misma forma que la de la onda estacionaria de la ecuación (5). Así, si escribimos la onda de propagación en la forma

$$\psi(z,t) = A \cos (\omega t - kz), \quad (6)$$

entonces podemos usar el mismo concepto de número de ondas k (y longitud de onda λ) para una onda de propagación sinusoidal para un tiempo fijo como lo hemos estado usando para una onda estacionaria. Comparando las ecuaciones (4) y (6), vemos que para una onda sinu-

soidal de propagación a un tiempo fijo, la variación de incremento de ángulo de fase por unidad de longitud k , está dada por

$$k = \frac{\omega}{v_\varphi}, \quad (7)$$

es decir, la velocidad de fase está dada por

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}, \quad (8a)$$

o, como $\omega = 2\pi\nu$ y $k = 2\pi/\lambda$

$$v_\varphi = \lambda\nu, \quad (8b)$$

o, como $\nu = 1/T$

$$v_\varphi = \frac{\lambda}{T}. \quad (8c)$$

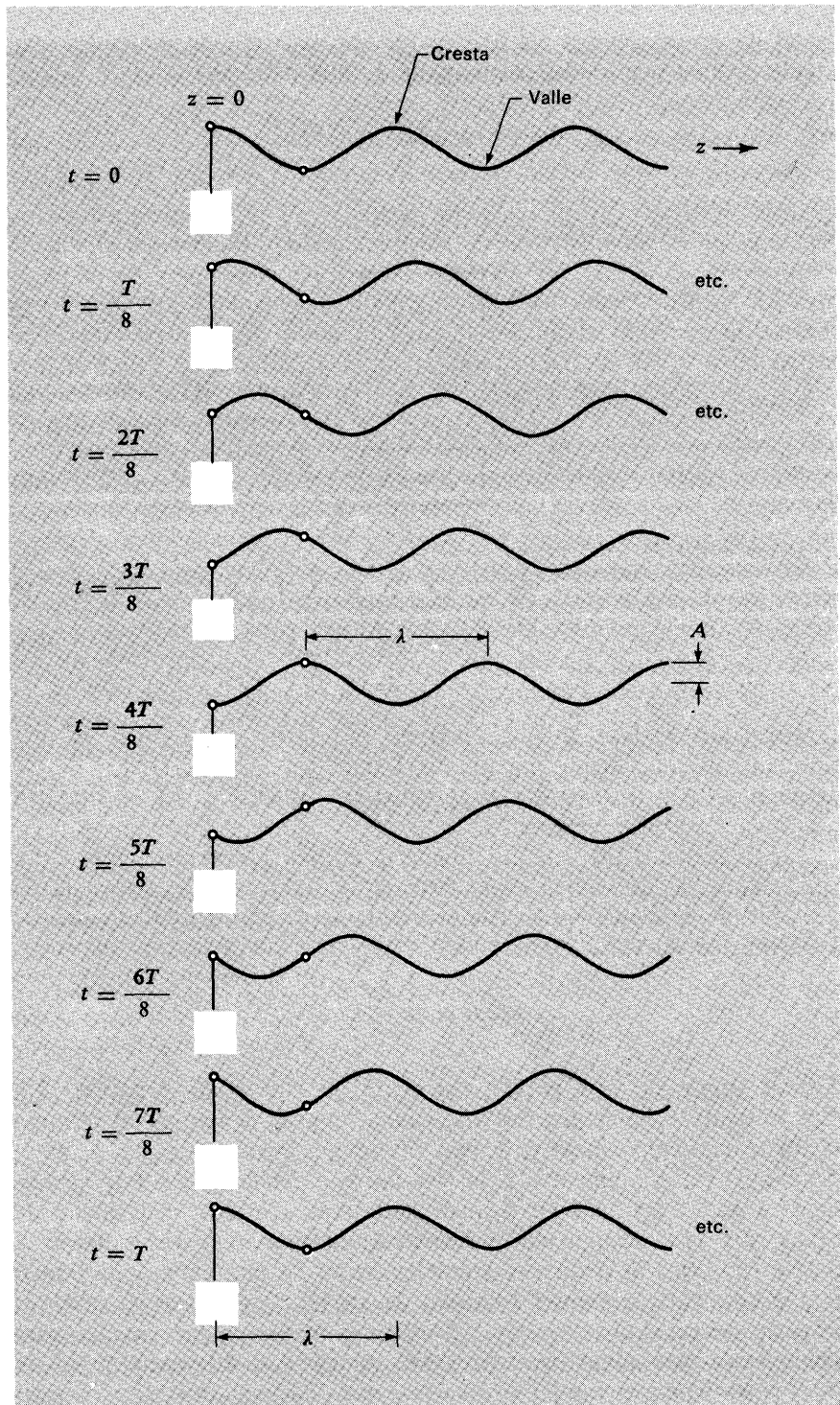
La velocidad de fase de una onda de propagación sinusoidal es una cantidad extremadamente importante. Damos las distintas formas de las ecuaciones (8) y le instamos a aprenderlas. En la Fig. 4.1 se muestra una onda sinusoidal progresiva.

Las ecuaciones (8) son tan importantes que proporcionamos ahora otra deducción. Definimos *como función de fase* $\varphi(z,t)$ de una onda de propagación sinusoidal propagándose en la dirección $+z$, al argumento de la función de onda $\cos(\omega t - kz)$:

$$\varphi(z,t) = \omega t - kz. \quad (9)$$

[Hemos suprimido una posible constante de fase en la ecuación (9)]. Para un z dado, la fase crece linealmente con el tiempo en el término ωt . Para un tiempo dado t , la fase disminuye linealmente con z , en el término $-kz$. Al aumentar z , la fase decrece debido a que ésta corresponde a ondas emitidas en tiempos anteriores. (Nuestra convención de signos para fase positiva no es universal; se prefiere a veces llamar a la fase $kz - \omega t$.) Si deseamos seguir la cresta de una onda dada [máximo de $\cos\varphi(z,t)$] o vientre [mínimo de $\cos\varphi(z,t)$] mientras la onda se propaga, debemos observar los distintos z a medida que t cambia, para mantener la fase $\varphi(z,t)$ constante. Así, tomando el diferencial total de $\varphi(z,t)$ y haciendo el resultado igual a cero, podemos encontrar la rela-

Fig. 4.1 La fuerza en $z = 0$ describe un movimiento armónico de período T . La onda sinusoidal se propaga en la dirección $+z$. La longitud de onda es λ . La velocidad de fase es $\lambda/T = \omega/k = \lambda v$. Cada punto de la cuerda sufre el mismo movimiento que el $z = 0$, pero en un instante posterior.



ción entre z y t para un punto de fase constante. El diferencial total de $\varphi(z,t)$ está dado por

$$d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dt + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dz = \omega dt - k dz, \quad (10)$$

que se anula si dt y dz están relacionados por

$$v_\varphi \equiv \left(\frac{dz}{dt}\right)_{[d\varphi=0]} = \frac{\omega}{k}, \quad (11)$$

que es la ecuación (8a).

¿Tienen las ondas de propagación la misma relación de dispersión que las ondas estacionarias? En el Capítulo 2 encontramos que la relación de dispersión que da a ω como función de k para ondas estacionarias que oscilan libremente en un medio dado, no depende de las condiciones de contorno, aunque en particular los valores de k sí. En el Capítulo 3, encontramos que las ondas estacionarias que resultan de las oscilaciones forzadas de un sistema cerrado satisfacen la misma ley de dispersión que las ondas estacionarias que oscilan libremente con valores particulares de k que dependen de las condiciones de contorno (También descubrimos un nuevo tipo de onda, la onda exponencial para un sistema excitado por arriba o por debajo de sus frecuencias modales máxima y mínima.) En nuestro estudio presente de ondas progresivas en sistemas abiertos, no hay otras condiciones de contorno, excepto las del extremo conectado al transmisor. Esperamos que la relación de dispersión sea (como antes) independiente de las condiciones de contorno. Sin embargo, hay algo con respecto a las ondas de propagación que es completamente distinto a lo correspondiente a ondas estacionarias debidas a oscilaciones libres o forzadas de un sistema cerrado, y esto es la fase relativa de las distintas partes móviles. En el caso de ambas oscilaciones, libres y forzadas (despreciando el amortiguamiento), todas las partes móviles tienen la misma fase. Esto no es así para ondas de propagación. ¿No debería esto afectar la relación de dispersión? No, como demostraremos ahora.

Ley de dispersión para una disposición lineal de péndulos acoplados.

Consideremos un ejemplo específico, pero que es suficientemente general para convencernos de que, realmente, todas las relaciones de dispersión tienen la misma forma para ondas de propagación que para ondas estacionarias. Cuando introducimos el concepto de onda de propagación, usamos la cuerda continua como ejemplo simple. Pero por supuesto podemos tener ondas de propagación en sistemas de parámetros concentrados así como en sistemas continuos, siendo también esto cierto

para ondas estacionarias. Por lo tanto, para obtener un resultado muy general, consideramos el riquísimo sistema de los péndulos acoplados. Encontraremos *la ley de dispersión exacta para un arreglo lineal infinito de péndulos acoplados* excitado en $z = 0$. Le pedimos que observe la Fig. 3.10, Sección 3.5, que muestra una configuración general de tres péndulos acoplados sucesivos y que se convenza a sí mismo que la ecuación de movimiento exacta para la pesa n es la que se da en la ecuación (3.62), Sección 3.5, que reproducimos aquí:

$$\ddot{\psi}_n = -\frac{g}{l}\psi_n + \frac{K}{M}(\psi_{n+1} - \psi_n) - \frac{K}{M}(\psi_n - \psi_{n-1}). \quad (12)$$

Como todas las partes móviles deben oscilar con movimiento armónico para ondas de propagación en el estado estacionario, así como para oscilaciones forzadas en estado estacionario en un sistema cerrado, sabemos que cualquiera que sea la constante de fase debemos tener para ψ_n

$$\ddot{\psi}_n = -\omega^2\psi_n. \quad (13)$$

Insertando la ecuación (13) en la (12), ordenando los términos y dividiendo por $\psi_n(t)$, encontramos

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M} - \frac{K}{M} \frac{(\psi_{n+1} + \psi_{n-1})}{\psi_n}. \quad (14)$$

Ondas de propagación sinusoidales. Supongamos ahora que tenemos una onda de propagación sinusoidal de la forma

$$\psi_n = A \cos(\omega t + \varphi - kz), \quad z = na;$$

entonces, como puede demostrarse fácilmente

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = 2\psi_n \cos ka.$$

Así, la ecuación (14)

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M}(1 - \cos ka), \quad (15)$$

es decir,

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{1}{2}ka. \quad (16)$$

Ésta es exactamente la misma ley de dispersión que encontramos en la Sec. 3.5 ecuaciones (3.91) hasta (3.98), para oscilaciones forzadas. Ve-

mos que el rango de frecuencia para ondas sinusoidales es el mismo para ondas de propagación y para ondas estacionarias, y se extiende desde ω_{\min} a ω_{\max} , donde

$$\omega_{\min}^2 = \frac{g}{l} \equiv \omega_0^2, \quad \omega_{\max}^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M}. \quad (17)$$

Ondas exponenciales en un sistema abierto. Para frecuencias de excitación por debajo de la frecuencia de corte inferior ω_0 , podemos sospechar que la ley de dispersión para un sistema abierto excitado será nuevamente la misma que para un sistema cerrado. Esto es correcto. Así, para un sistema abierto de péndulos acoplados que se extiende desde $z = 0$ a $z = +\infty$ y excitado en $z = 0$ con una frecuencia $\omega < \omega_0$, tenemos,

$$\psi(z, t) = Ae^{-\kappa z} \cos \omega t, \quad z = na, \quad (18)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4K}{M} \sinh^2 \frac{1}{2} \kappa a. \quad (19)$$

Ondas exponenciales en zigzag. De la misma manera, para una frecuencia de excitación por arriba de la frecuencia de corte superior, obtenemos las *ondas exponenciales en zigzag*

$$\psi(z, t) = A(-1)^n e^{-\kappa z} \cos \omega t, \quad z = na, \quad (20)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \cosh^2 \frac{1}{2} \kappa a. \quad (21)$$

Así, una onda exponencial en un sistema abierto excitado, difiere de la del caso general del sistema cerrado excitado, solamente en que debemos descartar la solución $e^{+\kappa z}$, que tiende a infinito para $z = +\infty$. Obsérvese que en una onda exponencial todas las partes móviles oscilan con la misma constante de fase [véanse ecs. (18) y (20)]; no existe algo como la velocidad de fase porque no hay forma de onda que se propague sin cambiar su aspecto, ni aun una forma de onda que se propague sin cambio de aspecto pero con crestas y depresiones reconocibles.

Hemos demostrado así, con el ejemplo de los péndulos acoplados, que para un medio dado, la ley de dispersión, que relaciona ω con k , es la misma para ondas de propagación que para ondas estacionarias debidas a oscilaciones libres o a oscilaciones forzadas estacionarias de un sistema cerrado.

Ondas sinusoidales dispersivas y no dispersivas. Cuando la ley de dispersión tiene la forma simple:

$$v(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \text{constante, independiente de } k, \quad (22)$$

las ondas se llaman *no dispersivas*; en cualquier otro caso se llaman *dispersivas*. (El uso del símbolo k implica en cualquier caso que son sinusoidales.) Una onda dispersiva, que es una superposición de ondas de propagación con diferentes números de onda, cambiará su forma a medida que la superposición progrese en el espacio, debido a que las componentes de distintas longitudes de onda viajan a distintas velocidades. Las componentes de la distinta frecuencia de la superposición son entonces, “dispersadas”. *Las ondas dispersivas son ondas sinusoidales para las cuales la velocidad de fase $v_\varphi = \omega/k$ varía con la longitud de onda.*

Ondas exponenciales reactivas. Cuando la frecuencia de excitación ω no está en la “banda pasante” entre la frecuencia de corte inferior (que puede ser cero en algunos casos) y la frecuencia de corte superior (que puede ser infinita en algunos ejemplos), entonces, como hemos visto, las ondas son exponenciales (no sinusoidales) en su dependencia espacial. Esta clase de onda exponencial se denomina a veces como “reactiva”, mientras que una onda sinusoidal se dice que es “dispersiva”. A veces se habla de “medio reactivo” o de “medio dispersivo”. Por supuesto, el mismo medio puede ser dispersivo en un rango de frecuencia (la banda pasante) y reactivo en otro rango (fuera de la banda pasante).

En los siguientes ejemplos trabajamos con velocidades de fase de ondas dispersivas.

Ejemplo 1: Ondas transversales en una cuerda con cuentas

La relación de dispersión* para ondas transversales en una cuerda con tensión de equilibrio T_0 , masa de cuenta M y espacio entre cuentas a es [véase ec. (2.70), sec. 2.4)]

$$\omega^2 = \frac{4T_0}{Ma} \sin^2 \frac{1}{2} ka, \quad 0 \leq k \leq \frac{\pi}{a}. \quad (23)$$

Por lo tanto, la velocidad de fase para ondas de propagación transversales está dada por

$$v_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{4T_0}{Ma} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} ka}{k^2}, \quad (24)$$

para $0 \leq ka \leq \pi$. Para frecuencias superiores a la de corte superior que es $\omega_0 = \sqrt{4T_0/Ma}$, las ondas son exponenciales en zigzag, y no hay nada semejante a la velocidad de fase. Para las frecuencias entre cero y ω_0 , las ondas son ondas dispersivas, ya que la velocidad de fase no es una

* Una demostración experimental muy elegante de esta relación de dispersión, ecuación (23), es la dada por J. M. Fowler, J. T. Brooks y E. D. Lambe, “One-dimensional Wave Demonstration”, *Am. J. Phys.* 35, 1065 (1967).

constante sino que depende de k . En el límite de longitudes de onda larga (o espacio entre cuentas pequeño), donde tenemos $a/\lambda \ll 1$, la velocidad de fase se hace esencialmente independiente de la longitud de onda, de manera que dichas ondas se hacen no dispersivas. Podemos ver esto desarrollando $\sin \frac{1}{2}ka$ en serie de Taylor:

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M} \frac{\sin(\frac{1}{2}ka)}{(\frac{1}{2}ka)}} \\ &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M} \frac{(\frac{1}{2}ka) - \frac{1}{6}(\frac{1}{2}ka)^3 + \dots}{(\frac{1}{2}ka)}} \\ &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M} \left[1 - \frac{1}{24}(ka)^2 + \dots \right]}. \end{aligned} \quad (25)$$

Entonces, definiendo ρ_0 como la masa promedio por unidad de longitud en el equilibrio, es decir, $\rho_0 \equiv M/a$, tenemos para la *cuerda continua* que

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}. \quad (26)$$

Así la velocidad de fase para ondas de propagación transversales sobre una cuerda continua es una constante independiente de la frecuencia. La ecuación (26) es idéntica al resultado para ω/k que obtuvimos en el Capítulo 2 para la ley de dispersión de ondas estacionarias sobre la cuerda continua [ec. (2.22), sec (2.2)].

Ejemplo 2: Ondas longitudinales en un resorte con cuentas

La ley de dispersión puede obtenerse a partir de las ondas transversales simplemente reemplazando la tensión T_0 por la constante del resorte K multiplicada por la distancia entre cuentas a [véase ec. (2.78), Sec. 2.4]. En el límite continuo, obtenemos [substituyendo Ka por T_0 en la ecuación (26)]

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{Ka}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{K_L L}{\rho_0}}, \quad (27)$$

donde escribimos $Ka = K_L L$ para recordarle que si se colocan resortes en serie para hacer un resorte largo de longitud total L , la constante total del resorte K_L es justamente a/L veces la constante K de un segmento de resorte de longitud a . De acuerdo con la ecuación (27), las ondas longitudinales en un resorte continuo son no dispersivas. En la Fig. 4.2 mostramos un “paquete de ondas progresivas” que consiste en una “comprensión” y una “rarificación” que viaja sobre el resorte.

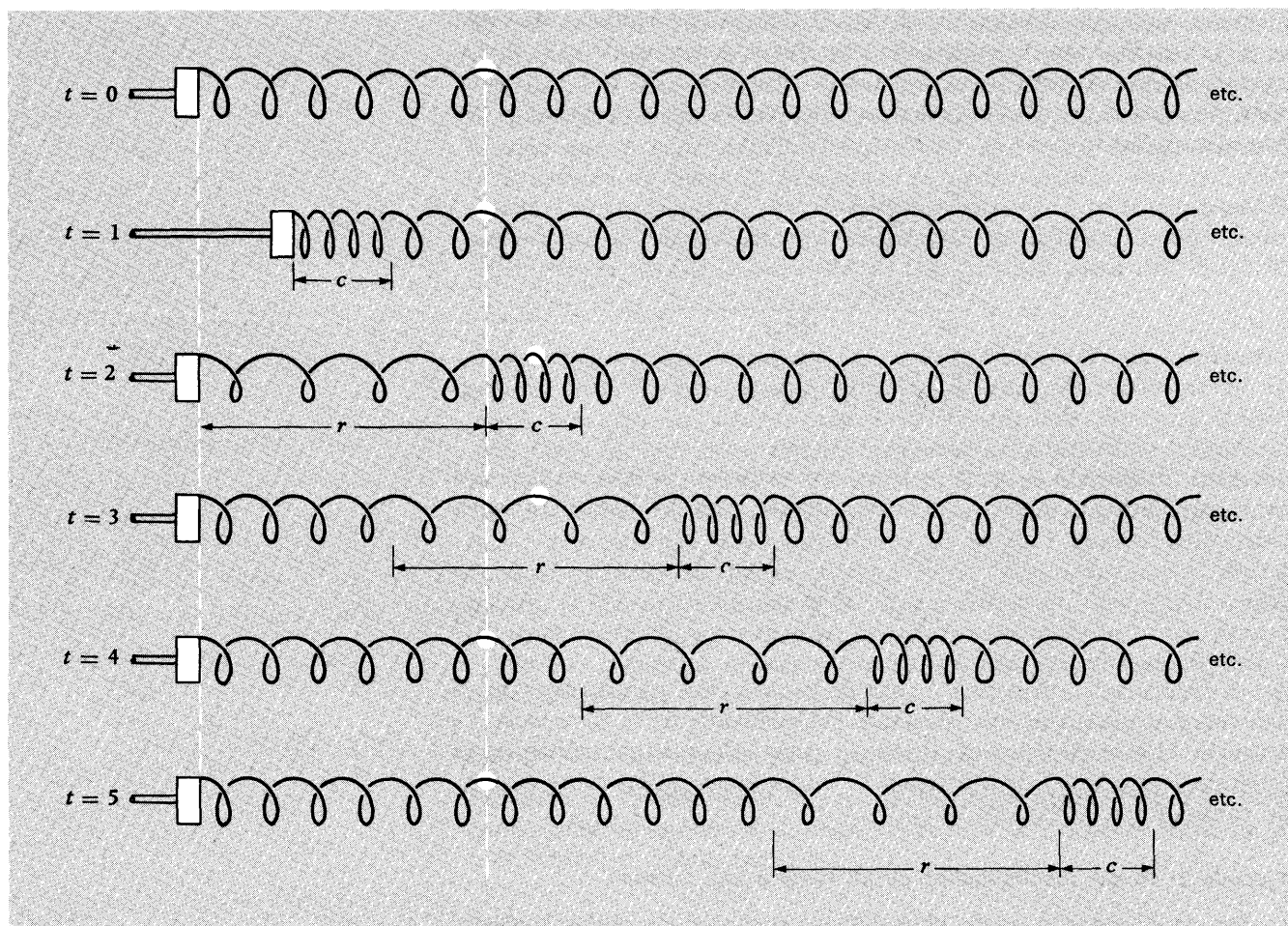


Fig. 4.2 Onda longitudinal que consiste en una compresión simple c y en una rarefacción simple r , propagándose en un resorte. La sexta espira tiene una marca para poder seguir su movimiento.

Velocidad de fase del sonido — Modelo de Newton. Newton fue el primero en deducir una expresión para la velocidad de las ondas sonoras en el aire. La fórmula de Newton da una respuesta errónea ya que predice una velocidad de aproximadamente 280 m/seg, mientras que la velocidad observada es 332 m/seg [a TPN (temperatura y presión normal), es decir, a una atmósfera de presión y a una temperatura de 0°C]. Su deducción es muy simple, y la razón por la cual dio un resultado erróneo es muy interesante, por cuyo motivo la damos a continuación.

Si se confina aire en un recipiente cerrado, éste ejerce una presión hacia afuera sobre las paredes del recipiente. Así, el aire actúa como un resorte *comprimado* que tiende a estirarse. Supongamos que el recipiente es un cilindro largo con un extremo cerrado por una pared y el otro cerrado por un pistón móvil sin masa. Entonces el aire es como

un resorte comprimido colocado a lo largo del cilindro y que trata de empujar el pistón hacia afuera con una fuerza de magnitud F . En el equilibrio, una fuerza externa F sobre el pistón balancea la fuerza del aire.

Para un resorte de longitud L_1 en reposo, longitud de compresión L (con $L < L_1$) y constante de resorte K_L , F está dada por

$$F = K_L(L_1 - L).$$

Si la longitud del resorte L es cambiada, el cambio en F se obtiene diferenciando esta expresión para obtener.

$$dF = -K_L dL. \quad (28)$$

De la misma manera, el aire ejerce una fuerza sobre el pistón dada por

$$F = pA,$$

donde p es la presión y A es el área transversal del cilindro. Si el pistón es desplazado levemente de su posición de equilibrio, tal que la longitud L del cilindro cambie en dL , entonces el volumen varía en $AdL = dV$. Así F cambia en

$$dF = A dp = A \left(\frac{dp}{dV} \right)_0 dL, \quad (29)$$

donde el subíndice cero significa que dp/dV debe calcularse con el volumen de equilibrio. Comparando las ecuaciones (28) y (29), vemos que la "constante del resorte equivalente" del aire en el tubo está dada por

$$K_L = -A^2 \left(\frac{dp}{dV} \right)_0. \quad (30)$$

Supongamos que tenemos un resorte comprimido con una constante K_L , mantenido en equilibrio con una longitud L_0 y una densidad de masa (lineal) ρ_0 . Entonces la velocidad de fase para ondas longitudinales está dada por [véase ec. (27)]

$$v^2 = \frac{K_L L_0}{\rho_0 (\text{lineal})}. \quad (31)$$

En la adaptación de la ecuación (31) para sonido, usamos la ecuación (30) para K_L . Tenemos también que $AL_0 = V_0$, el volumen de equilibrio y que la densidad de la masa lineal está dada por

$$\rho_0 (\text{lineal}) L_0 = \rho_0 (\text{volumen}) AL_0, \quad (32)$$

donde ρ_0 (volumen) es la densidad volumétrica de masa en el equilibrio. Reemplazando las ecuaciones (30) y (32) en la (31), y eliminando el calificativo "volumen" de la densidad de masa volumétrica en el equilibrio ρ_0 obtenemos para la *velocidad del sonido*,

$$v^2 = - \frac{V_0(dp/dV)_0}{\rho_0}. \quad (33)$$

Debemos encontrar aún, la variación de la presión con el volumen dp/dV . Aquí Newton usó la *ley de Boyle*, que dice que a temperatura constante el producto de la presión por el volumen es constante:

$$pV = p_0V_0, \quad p = \frac{p_0V_0}{V}, \quad (34)$$

donde p_0 es la presión de equilibrio. Diferenciando obtenemos

$$\frac{dp}{dV} = - \frac{p_0V_0}{V^2},$$

es decir, en equilibrio con $V = V_0$, tenemos:

$$V_0 \left(\frac{dp}{dV} \right)_0 = -p_0. \quad (35)$$

Así, la ecuación (33) se transforma en *el resultado de Newton*

$$v_{\text{Newton}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (36)$$

Para aire TPN, tenemos

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^6 \text{ dina/cm}^2 \\ \rho_0 &= \frac{29 \text{ g/mol}}{22,4 \text{ litro/mol}} = 1,29 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3. \end{aligned} \quad (37)$$

De esta manera Newton encuentra para la velocidad del sonido

$$v_{\text{Newton}} = \sqrt{\frac{1,01 \times 10^6}{1,29 \times 10^{-3}}} = 2,80 \times 10^4 \text{ cm/seg} = 280 \text{ metros/seg}$$

La velocidad *experimental* (que debiera recordar) es, para aire a TPN

$$\begin{aligned} v &= 332 \text{ metros/seg} \\ &= 745 \text{ millas/h} \\ &= 1 \text{ milla/4,8 seg} \end{aligned} \quad (39)$$

[Quizás le resulta familiar el método de estimar la distancia a un relám-

pago, contando el número de segundos entre el relámpago y el trueno. En este caso, “una milla es igual a cinco segundos”, aproximadamente. De igual forma puede calcularse la velocidad del sonido usando un cronómetro y un petardo (colocado por un ayudante).]

Corrección del error de Newton. Se plantea ahora una pregunta interesante: ¿cómo pudo Newton llegar tan cerca de la respuesta correcta (lo cual muestra que hay algo correcto en su deducción), y, sin embargo, equivocarse en un 15 % (que muestra que hay algo de erróneo en su deducción)? La dificultad surge de utilizar la ley de Boyle, que es válida sólo a temperatura constante. La temperatura en una onda sonora *no* permanece constante. El aire localizado (en un instante dado) en una región de compresión, ha recibido trabajo y está levemente más caliente que su temperatura de equilibrio. Las regiones vecinas, alojadas en una semilongitud de ondas, son regiones de rarefacción y se han enfriado levemente en la expansión. (La energía se conserva; el exceso de energía en una compresión es igual al déficit de energía en una rarefacción.) A raíz del incremento de temperatura en una compresión, la presión en la compresión *es mayor* que la predicha por la ley de Boyle, y la presión en una rarefacción *es menor* que la predicha. Este efecto produce una fuerza de retorno mayor que la esperada y por esto una velocidad de fase mayor.

Resulta entonces que en lugar de la ley de Boyle (que se cumple a temperaturas constantes) debemos utilizar *la ley de los gases adiabáticos*, que da la relación entre p y V cuando no se permite el flujo de calor. No hay tiempo suficiente para que el calor fluya, desde las compresiones a las rarefacciones, de manera que se iguale la temperatura. Antes de que esto pueda suceder, ha transcurrido medio ciclo y una primera región de compresión se ha convertido en una región de rarefacción. Así el resultado es el mismo que el que se obtendría si hubiese “paredes” que impidieran el flujo de calor de una región a otra. Puede demostrarse que esta relación está dada por

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma, \quad p = p_0V_0^\gamma V^{-\gamma}, \quad (40)$$

donde γ es una constante llamada “razón de calor específico a presión constante a calor específico a volumen constante” y tiene el valor numérico

$$\gamma = 1,40 \text{ para el aire a TPN}$$

Diferenciando la ecuación (40) y haciendo $V = V_0$ se obtiene:

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma p_0 V_0^\gamma V^{-\gamma-1},$$

$$V_0 \left(\frac{dp}{dV} \right)_0 = -\gamma p_0.$$

Y reemplazando esto en la ecuación (33) se obtiene el resultado correcto para la velocidad del sonido:

$$\begin{aligned} v_{\text{sonido}} &= \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \\ &= \sqrt{1.40} v_{\text{Newton}} = 332 \text{ metros/seg.} \end{aligned} \quad (41)$$

Examinemos por qué el calor no tiene tiempo de fluir de una compresión a una rarefacción y así igualar la temperatura. Para que el calor fluya, y se pueda mantener así la temperatura constante en todas partes, tendría que hacerlo una distancia de media longitud de onda (de una compresión a una rarefacción) en un lapso corto comparado con la mitad de un período de oscilación (después de medio período, las compresiones y rarefacciones habrán intercambiado lugares). Así, para que el flujo de calor fuera suficientemente rápido, sería necesario que:

$$v(\text{flujo de calor}) \gg \frac{\frac{1}{2}\lambda}{\frac{1}{2}T} = v_{\text{sonido}}. \quad (42a)$$

El flujo de calor es, en gran parte, debido a la conducción, es decir, debido a la transferencia de energía cinética de traslación de una molécula de aire de masa M , a temperatura absoluta T , la velocidad cuadrática media (velocidad de traslación debida a la energía calórica) en una dirección dada, z , es

$$v_{\text{cm}} = \langle v_z^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{kT}{M}}, \quad (42b)$$

donde k es una constante llamada constante de Boltzmann. La velocidad del sonido puede también expresarse en términos de T y M . Está dada por

$$v_{\text{sonido}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma kT}{M}}. \quad (42c)$$

Así, excepto por la constante $\sqrt{\gamma}$, la velocidad del sonido es igual a la velocidad cuadrática media térmica de una molécula, a lo largo del eje z . De este modo, si las moléculas viajaran en línea recta una distancia del orden de $(1/2)\lambda$ en vez de chocar, lo harían "justamente" a tiempo para transferir calor. En promedio no satisfarían la ecuación (42a), pero sí lo harán algunas excepcionalmente rápidas. Puede, por consiguiente, haber una transferencia de calor significativa en medio período. Pero en lugar de viajar en línea recta distancias del orden de $(1/2)\lambda$, las moléculas zigzaguean en forma aleatoria recorriendo entre choques distancias de sólo 10^{-5} cm (para aire a TPN). En la medida en que la lon-

gitud de onda es larga, comparada con 10^{-5} cm, la ley adiabática es entonces una muy buena aproximación. (La longitud de onda más corta para ondas sonoras audibles corresponde a $\nu \approx 20\,000$ cps, de donde $\lambda = v/\nu \approx 3,32 \times 10^4/2 \times 10^4 = 1,6$ cm.)

Ejemplo 3: Ondas electromagnéticas en la ionosfera terrestre y velocidades de fase mayores que c

La relación de dispersión para ondas electromagnéticas en la ionosfera resulta ser (aproximadamente)

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad (43)$$

donde c es la velocidad de la luz y $\omega_p = 2\pi\nu_p$ es la frecuencia angular de oscilaciones naturales de los electrones de plasma. Para frecuencias de excitación ω por encima de la frecuencia de corte ω_p , la ionosfera es un medio dispersivo, y entonces las ondas electromagnéticas son sinusoidales. Éste es el caso para frecuencias típicas de FM o TV del orden de 100 Mc. La velocidad de fase para una onda progresiva de frecuencia ω está dada por:

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}. \quad (44)$$

Pero esta velocidad excede a c , la velocidad de la luz en el vacío (y la de todas las demás ondas electromagnéticas, incluyendo las ondas de TV de 100 Mc que estamos considerando ahora).

La velocidad de fase *realmente* excede a c , pero esto *no* significa que esté en conflicto con la teoría de la relatividad. Recuérdese que una velocidad de fase v_ϕ da simplemente la relación de fase entre la oscilación armónica en el *estado estacionario* de una parte móvil (un electrón en la ionosfera) en la posición z_1 y la de otra parte móvil en la posición z_2 . En el estado estacionario de oscilación armónica no hay información sobre qué oscilación en z_2 es el “resultado” de una oscilación particular z_1 . No es ninguna. Todo el sistema está en estado estacionario, el cual ha sido observado después de un largo tiempo en el que los transitorios han desaparecido. Encontraremos (en el Cap. 6) que si *se modula* la onda variando su amplitud, enviando de ese modo información (por ejemplo: un espectáculo de TV) mediante ondas electromagnéticas, *entonces las modulaciones no se propagan con la velocidad de fase*. Éstas se propagan a una velocidad diferente, llamada velocidad de grupo. La velocidad de grupo es siempre menor que c , la velocidad de la luz en el vacío.

Tratamos de entender cómo podemos obtener una fase de velocidad mayor que c . Nótese que la fuente del “problema” está en la constante ω_p^2 que aparece en la relación de dispersión. Si ω_p^2 fuese cero, la velo-

cidad de fase sería igual a c en lugar de excederla. Esta constante es la fuerza de retorno sobre un electrón por unidad de desplazamiento y por unidad de masa, lo cual nos lleva a las oscilaciones libres de los electrones en el plasma.

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{M}. \quad (45)$$

Como se ve, esto es análogo a la contribución gravitacional a la fuerza de retorno de péndulos acoplados. Los péndulos acoplados tienen la relación de dispersión (en la aproximación para longitud de onda larga)

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{Ka^2}{M} k^2, \quad (46)$$

que es la misma forma general que para la ionosfera, ecuación (43). Supongamos ahora que cortamos todos los resortes que acoplan la disposición lineal de péndulos, es decir, hacemos $K = 0$. (No podemos imaginar tan fácilmente cómo hacer $c = 0$ en la ecuación (43). En este sentido los péndulos acoplados son más convenientes.) Entonces, la relación de dispersión para la disposición de péndulos da la velocidad de fase

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{lk^2}, \quad (47)$$

¡Que puede hacerse mayor que la velocidad de la luz en el vacío haciendo lk^2 suficientemente pequeño! Físicamente, vemos cómo obviarlo. No hay absolutamente ningún acoplamiento entre péndulos. Simplemente disponemos una larga hilera de péndulos de manera tal que todos oscilen con la misma amplitud y con la constante de fase entre un péndulo y el siguiente creciendo estacionariamente de tal forma que la longitud de onda (la distancia sobre la cual la constante de fase ha crecido en 2π) es mayor que c veces el período común de los péndulos. ¡Entonces, la velocidad de fase excede a c ! Esto no es una broma; *es* una velocidad de fase y *realmente* excede a c .

Por otra parte, de decidirnos a *cambiar* la amplitud del movimiento de la hilera de péndulo por algún medio, encontraremos que no puede hacerse tan fácilmente. Si acoplamos los péndulos de manera que exista una forma de modificar el comportamiento de un péndulo de abajo cambiando el movimiento de un péndulo de arriba (que no sea bajándolo allí), entonces veremos que no es posible enviar una modulación hacia abajo de la hilera con la velocidad de fase, dado que, en gran medida, ésta no tiene nada que ver con el acoplamiento entre péndulos. En cambio, la modulación viaja con la velocidad de grupo, que es menor que c .

Ejemplo 4: Línea de transmisión - filtro pasabajos

El sistema se muestra en la Fig. 4.3. La línea de transmisión es alimentada en la terminal de entrada ($z = 0$) por una tensión armónicamente oscilante. Despreciamos la resistencia. En la Sección 2.4 encontramos que las ecuaciones de movimiento de este sistema son formalmente idénticas a las correspondientes de oscilaciones longitudinales de un sistema de masas y resortes, siempre que reemplacemos K por C^{-1}/a y M por L/a . La relación de dispersión es

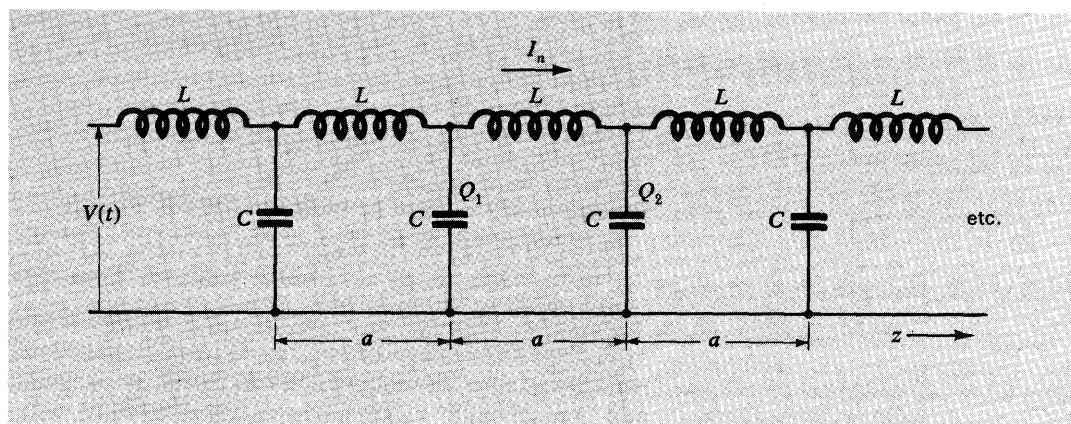
$$\omega^2 = \frac{4C^{-1}}{L} \sin^2 \frac{1}{2} ka$$

en el rango dispersivo de frecuencia (la banda pasante) desde cero hasta $\omega_0 = 2\sqrt{C^{-1}/L}$. En el límite de baja frecuencia ($k \approx 0$) o límite continuo ($a \approx 0$), podemos reemplazar $\sin \frac{1}{2} ka$ por $\frac{1}{2} ka$. Entonces la velocidad de fase está dada por

$$v_{\phi}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{(C/a)(L/a)}, \quad (48)$$

donde C/a es la capacidad en paralelo por unidad de longitud y L/a es la inductancia en serie por unidad de longitud. Así, para una línea de transmisión continua (cualquier par de conductores paralelos) en el vacío, la velocidad de fase es la inversa de la raíz cuadrada de la capacidad por unidad de longitud, multiplicada por la inductancia por unidad de longitud, y es una constante, independiente de la frecuencia. Así las ondas de tensión y corriente son ondas no dispersivas.

Fig. 4.3 Línea de transmisión alimentada en $z = 0$ y extendiéndose hasta infinito.



¿Puede la velocidad de fase de esta línea de transmisión de pasabajos ser mayor que c ? Sabemos por el Ejemplo 3 (de la ionosfera) que es posible tener una velocidad de fase que exceda a c sin violar la relatividad. Pero, al menos en aquel ejemplo, podíamos tener cualquier velocidad de fase que nos gustara por una buena razón: había una frecuencia de corte inferior a ω_p . Vimos que aún podemos realizar, un sistema de péndulos acoplados con velocidad de fase que excede de c . Pero en el presente filtro pasabajos no hay una frecuencia de corte correspondiente. Esto es, no hay “fuerza de retorno” sobre las corrientes en las inductancias excepto la que es provista por el acoplamiento de los capacitores adyacentes. Por lo tanto, no esperamos ser capaces de encontrar una velocidad de fase que exceda a c . Consideremos ahora la ecuación (48). Tratemos de hacer la velocidad de fase tan grande como podamos. Esto significa que queremos que la inductancia en serie y la capacidad en paralelo, por unidad de longitud, sean tan pequeñas como sea posible. Inspeccionando la figura 4.3, vemos que podemos hacer mínima la inductancia por unidad de longitud, reemplazando cada inductancia concentrada por alambre rectilíneo. Podemos minimizar la capacidad en paralelo simplemente eliminando todas las capacidades concentradas. Podríamos suponer primero que ahora ambas, C/a y L/a serían cero, tal que la ecuación (48) daría infinito para v_ϕ . Esto es erróneo. No debemos olvidar que dos alambres rectos (uno llevando corriente y otro trayéndola de vuelta) tienen una autoinductancia distinta de cero por unidad de longitud. Además, también una capacidad en paralelo por unidad de longitud distinta de cero. De hecho se puede mostrar (tal vez después de un repaso del Vol. II) que la capacidad en paralelo por unidad de longitud y la inductancia en serie por unidad de longitud para *dos alambres rectos, infinitamente largos y paralelos* están dadas por (Prob. 4.8)

$$\frac{C}{a} = \frac{1}{4 \ln \left(\frac{D+r}{r} \right)} \quad (\text{ues}), \quad (49)$$

$$\frac{L}{a} = \frac{4}{c^2} \ln \left(\frac{D+r}{r} \right) \quad (\text{ues}), \quad (50)$$

donde r es el radio de cada alambre y D es la distancia entre los alambres (desde la superficie más cercana de un alambre a la superficie más cercana del otro). Tomando el producto de las ecuaciones (49) y (50), obtenemos el notable resultado

$$\frac{C}{a} \frac{L}{a} = \frac{1}{c^2}. \quad (51)$$

Así, por la ecuación (48), la *velocidad de fase para ondas de propagación de corriente (o de tensión) sobre una línea de transmisión consistente de dos alambres rectilíneos paralelos es c , la velocidad de la luz en el vacío.*

Velocidad de fase de líneas de transmisión rectoparalelas. Supongamos ahora que construimos otras líneas de transmisión realizándolas con “pares de alambres paralelos”, uno llevando una corriente hacia abajo de la línea, el otro haciéndolo hacia arriba. Llamaremos a éstas, *líneas de transmisión rectilíneas y paralelas*. No debe sorprendernos el hecho de que en estos casos nuevamente, aunque C/a y L/a dependen fuertemente de la geometría, su producto sea siempre $1/c^2$, como en la ecuación (51). Esto puede entenderse pensando qué sucede si repentinamente, se cambia la tensión a través de la línea de transmisión en uno de los extremos. Cada “par de alambre” lleva un pulso de tensión a velocidad c . El pulso de un par de alambres no puede perturbar el de ningún otro par debido a que las ondas se mueven tan rápidamente como pueden — nada puede pasar que las perturbe.

Ejemplo 5: Línea de transmisión de placas paralelas

El sistema consiste en dos placas paralelas conductoras de ancho w en la dirección y , separadas en sus superficies interiores por una abertura g en la dirección x y llevando corriente en la dirección z , como se muestra en la Fig. 4.4. Deseamos calcular la capacidad y la inductancia por unidad de longitud a lo largo de z . Para este propósito podemos tomar el potencial $V(t)$ entre las placas en $z = 0$ como

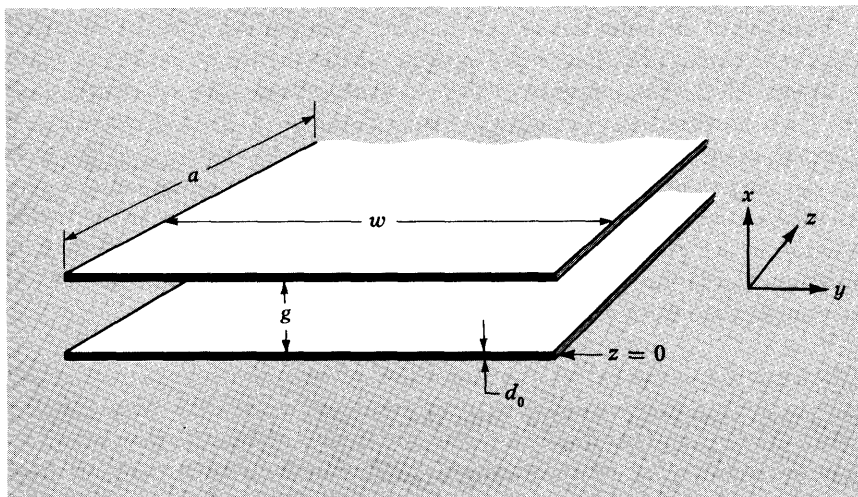


Fig. 4.4 Línea de transmisión de placas paralelas. La alimentación (no mostrada aquí) provoca una diferencia de potencial $V(t)$ entre las placas en $z = 0$ y una corriente $I(t)$ que en todo instante se traslada por una placa en la dirección $+z$ y retorna por la otra en la dirección $-z$. La dimensión a , es arbitraria en la dirección z pero pequeña en comparación de las longitudes de onda usadas.

constante. Tenemos entonces una corriente estacionaria. (Podemos suponer que las dos placas están unidas en $z = \infty$, para asegurar que la corriente que sale tiene un camino de retorno. Alternativamente, podemos suponer simplemente que ambas placas llegan hasta infinito y que nunca se juntan. Los resultados son los mismos.)

Tomemos la placa superior como negativa y la inferior como positiva. Entonces el *campo eléctrico está en la dirección $+x$* (véase figura 4.4). Supongamos que w es grande comparado con g , de manera tal que no hay "efecto de bordes". Sea Q el desplazamiento de carga sobre un área de las placas (indicado en la Fig. 4.4) de espesor w a lo largo de y y de longitud a a lo largo de z . (La longitud de a es arbitraria, pero ayuda a la deducción si la incluimos explícitamente.) Sea C la capacidad de esta área de las placas. Entonces tenemos las relaciones (véase Vol. II, Sec. 3.5, si necesita repaso)

$$Q = CV, \quad (52)$$

$$V = gE_x, \quad (53)$$

$$E_x = \frac{4\pi Q}{wa}, \quad (54)$$

donde las ecuaciones (52) y (53) se cumplen tanto en el sistema electrostático ues, o en el MKS, y donde la ecuación (54) es 4π por la carga por unidad de área y del campo eléctrico en unidades electrostáticas ues (statvolts por cm). Resolviendo estas tres ecuaciones para C encontramos que la capacidad por unidad de longitud es

$$\frac{C}{a} = \frac{w}{4\pi g}. \quad (55)$$

Busquemos la inductancia por unidad de longitud, L/a . La placa de abajo está conectada al terminal positivo de la fuente de poder, la placa de arriba al terminal negativo. Por lo tanto, fluye una corriente positiva I , en la dirección $+z$ sobre la placa de abajo y en la dirección $-z$ sobre la placa superior. Si se usa la regla de la mano derecha y la Fig. 4.4 se puede comprobar que *el campo magnético entre las dos placas está en la dirección $+y$* . El campo magnético es cero en la región exterior a las placas, como se podrá comprobar fácilmente. Sea L la autoinductancia de la parte de las placas indicada en la Fig. 4.4. El flujo magnético Φ , a través del área ga está dado por

$$\Phi = B_y ga. \quad (56)$$

El campo magnético B_y está dado por

$$wB_y = \frac{4\pi I}{c}. \quad (57)$$

(Véase Vol. II, Sec. 6.6; la “densidad de corriente laminar” definida allí es la misma que la presente I/w .) La autoinductancia L está definida por [véase Vol. II, Sec. 7.8, ecs. (7.53) y (7.54)]

$$L \frac{dI}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt};$$

es decir, para una corriente estacionaria I ,

$$LI = \frac{1}{c} \Phi. \quad (58)$$

Resolviendo las ecuaciones (56), (57) y (58) para L , encontramos que la autoinductancia por unidad de longitud es

$$\frac{L}{a} = \frac{4\pi g}{c^2 w}. \quad (59)$$

Tal vez puede preocuparnos el hecho de que hayamos calculado la autoinductancia usando una corriente estacionaria, cuando sabemos que la ecuación de Maxwell que nos dio la ecuación (57) para una corriente estacionaria es (Vol. II, Sec. 7.13)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (60)$$

O sea, hemos despreciado así la contribución del término de “corriente de desplazamiento”, $(1/c) \partial \mathbf{E} / \partial t$. Surge (Prob. 4.10) que esta omisión es justificable, siempre que el espesor d_0 de cada placa satisfaga

$$d_0 \ll \lambda. \quad (61)$$

Supondremos que esta condición se cumple.

La velocidad de fase v_ϕ para ondas progresivas está dada por [usando las ecs. (48), (55) y (59)]

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{(L/a)(C/a)}} = c. \quad (62)$$

Así, hemos encontrado que la velocidad de fase es igual a c para dos ejemplos muy diferentes de líneas de transmisión, rectilíneas y paralelas. Sería muy plausible que fuera éste un resultado general: *la velocidad de fase para cualquier línea de transmisión consistente en dos conductores aislados, idénticos, rectilíneos y paralelos, en el vacío es c .*

4.3 Índice de refracción y dispersión

Si todo el espacio entre las placas de una línea de transmisión de placas paralelas, se llena con un material dieléctrico de constante ϵ , la capacidad se incrementa en un factor ϵ (véase Vol. II, Sec. 9.9). (Esto ocurre también con la línea de transmisión de alambres paralelos, excepto que en este caso deberíamos llenar todo el espacio con el dieléctrico. Para un capacitor de placas paralelas el campo eléctrico fuera de la región entre las placas es cero y no importa que haya allí material dieléctrico o no.) De la misma manera, si el material insertado tiene permeabilidad magnética μ , la autoinductancia se incrementa en un factor μ . [Consideraremos solamente materiales como vidrio, agua, aire o materiales similares, para los cuales la permeabilidad magnética es esencialmente unitaria. Por consiguiente, no será necesario repasar ahora la física de los materiales magnéticos (Vol. II, Cap. 10). De aquí en adelante seguiremos poniendo la constante μ en las fórmulas, pero la igualaremos siempre a uno cuando consideremos ejemplos reales.] Por lo tanto, la velocidad de fase de ondas de propagación de corriente y potencial, que se propagan a lo largo de una línea de transmisión de placas paralelas (o a lo largo de cualquier otra línea de transmisión rectilínea y paralela), con todo el espacio lleno de un material de constante dieléctrica ϵ y de permeabilidad magnética μ , está dado por

$$v_{\varphi} = \sqrt{\frac{a}{L} \frac{a}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} v_{\varphi}(\text{vacío}),$$

es decir,

$$\boxed{v_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}}. \quad (63)$$

La ecuación (63) que hemos obtenido para el caso especial de ondas de propagación de potencial y corriente en una línea de transmisión, es realmente un resultado muy general. Se mantiene para cualquier clase de ondas que se propagan a través de la materia. Así, por ejemplo, la ecuación (63) se mantiene para luz visible propagándose a través de un trozo de vidrio u otro material dieléctrico.

Hagamos plausible la generalidad de la ecuación (63). Hemos visto que ésta se cumple para ondas de corriente y potencial propagándose en una línea de transmisión. Ahora bien, el espacio entre placas de la línea está lleno de campo eléctrico y magnético. (El campo eléctrico corresponde a la diferencia de potencial entre placas; el campo magnético a la corriente sobre las placas.) Así, la configuración del campo eléctrico y del campo magnético deben propagarse con la misma velocidad que las ondas de corriente y de potencial. (Las configuraciones de campo son por sí mismas ondas — por supuesto, varían en el espacio y

en el tiempo y esta característica es la que define una onda.) Cuando el espacio está vacío, la velocidad es c . Pero sabemos que c es la velocidad de *todas* las ondas electromagnéticas en el vacío, estén o no entre las placas de una línea de transmisión. Cuando el espacio está lleno de un material de constantes ϵ y μ , la velocidad de las ondas de campo eléctrico y magnético (que acompañan a las ondas de potencial y corriente) es $c/\sqrt{\epsilon\mu}$. Parece plausible que ésta sea la velocidad de todas las ondas electromagnéticas en tal material, cualquiera que sea su fuente. Es decir, cuando éstas sean ondas electromagnéticas que acompañan a las ondas de corriente y de potencial en las placas de una línea de transmisión o cuando sean, por ejemplo, ondas electromagnéticas producidas por una lejana lámpara eléctrica, una antena de radio o una estrella. Una de las cosas que hemos tratado de poner en claro en los Capítulos 1-3, es que *la relación de dispersión es independiente de las condiciones de contorno*. Ésta depende solamente de las propiedades intrínsecas de las ondas y del medio. Las ondas electromagnéticas pueden producirse mediante la aplicación de una diferencia de potencial en los terminales de una línea de transmisión o mediante un transmisor o antena, sin intervención de una línea de transmisión. Éstas representan meramente distintas condiciones de contorno, es decir, distintas formas de alimentar el sistema. (El sistema es el medio, consistente en el material de constantes ϵ y μ .) La ley de dispersión, ecuación (63), es independiente de estas condiciones. No la hemos demostrado, pero esperamos haberla hecho plausible. (La demostraremos en el Cap. 7.)

La ecuación (63) se cumple para toda radiación electromagnética y en particular para la luz. (Estudiaremos la radiación electromagnética con más detalle en el Capítulo 7.) El factor $\sqrt{\mu\epsilon}$, llamado *índice de refracción*, se designa por n . Deben conocerse todas las formas que siguen para expresar los efectos del índice de refracción. Conviene recordar el ejemplo del vidrio, que tiene un índice de refracción para luz visible de alrededor de 1,5. Entonces, en las siguientes expresiones, puede formarse una imagen mental de cuáles cantidades son mayores y cuáles son menores en vidrio, comparadas con el vacío:

$$n = \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{\mu\epsilon}, \quad (64)$$

$$\lambda = \frac{1}{n} \frac{c}{\nu} = \frac{1}{n} \lambda(\text{vacío}), \quad (65)$$

$$k = n \frac{\omega}{c} = nk(\text{vacío}). \quad (66)$$

Por supuesto, la frecuencia de la excitación es afectada por el medio, y c significa la velocidad de la luz en el vacío. Por lo tanto, si se desea expresar la longitud de onda de la luz en el vacío se la puede llamar c/ν , en lugar de, por ejemplo, λ (vacío). De la misma manera, k (va-

Tabla 4.1 Índices de refracción de materiales comunes

Material	Índice, 5893 Å
Aire (TPN)	1,0002926
Agua (20 °C)	1,33
Vidrio coronado de cinc	1,52
Vidrio de plomo pesado	1,90
Lucite	1,50
Cinta adhesiva transparente	1,50

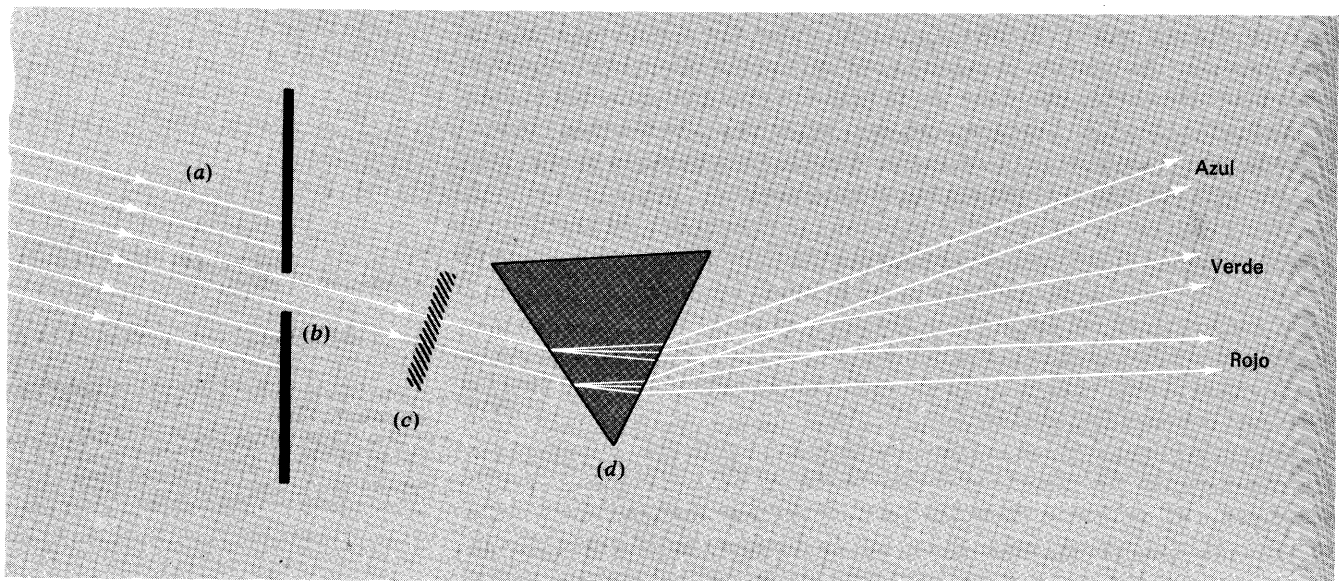
cío) $= \omega/c$. En vidrio, la longitud de onda de luz visible es solamente $2/3$ de su valor en el vacío. El número de ondas por centímetro, $\sigma = 1/\lambda$, es mayor en un factor de 1,5 en vidrio que en el vacío.

La Tabla 4.1 da valores del índice de refracción de materiales comunes para luz amarilla de sodio, de longitud de onda $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 1 \text{ angstrom} = 10^{-8} \text{ cm}$). Deben recordarse los valores aproximados de $n = 3/2$ para vidrio y plástico, $n = 4/3$ para agua y $n = 1 + 0,3 \times 10^{-3}$ para aire.

Variación del índice de refracción con el color — dispersión. Un prisma (que es una pieza de vidrio u otro material transparente, en forma de cuña) desvía un haz incidente con un ángulo que depende del color, es decir, de la longitud de onda de la luz. Los distintos colores en un haz paralelo de luz “blanca” son desviados en ángulos diferentes y por tanto dispersados, es decir, emergen del prisma con ángulos distintos y dan una figura coloreada como el arco iris sobre una pantalla situada convenientemente detrás del prisma. Esto puede verse en la Fig. 4.5.

Fig. 4.5 Dispersión. La luz solar (a) incide sobre una pantalla opaca que tiene una ranura (b) perpendicular al plano del dibujo. El haz de luz blanca formado por la ranura pasa a través de un filtro (c) que transmite luz de un solo color y a través del prisma de vidrio (d) el cual desvía la luz en un ángulo que depende del color. El azul es más desviado que el rojo. Sin filtro todos los colores se hallan presentes extendidos como en el arco iris.

Refracción y ley de Snell. Un haz de luz de un color dado es desviado o *refractado* siempre que encuentre una superficie donde la velocidad de fase tome un nuevo valor, es decir, donde el índice de refracción n cambie. La intensidad de la refracción depende del cociente n_1/n_2 , que es el índice de refracción del medio 1 (desde el cual el haz incide) dividido por el del medio 2 (al cual pasa). También depende



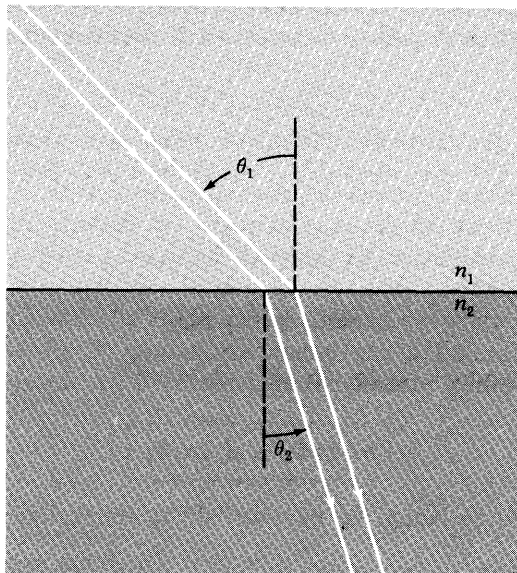


Fig. 4.6 Nomenclatura. Para un haz de luz que atraviesa en la dirección indicada por las flechas, θ_1 es llamado ángulo de incidencia y θ_2 ángulo de refracción.

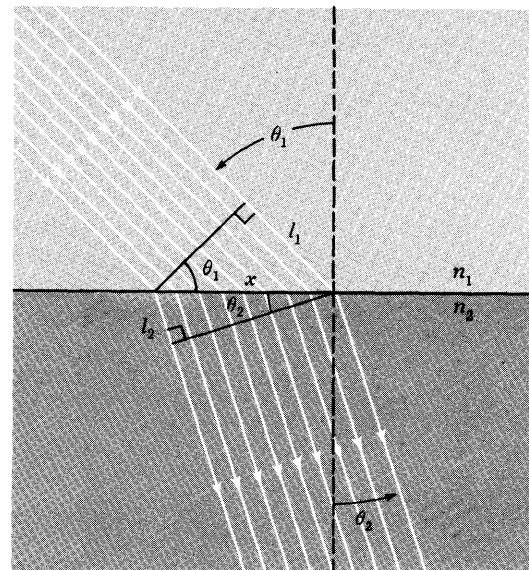


Fig. 4.7 Refracción. Si n_2 es mayor que en n_1 , el extremo de la derecha del frente de onda (mirado en la dirección de marcha de los rayos) recorre una distancia l_2 que es menor que la distancia l_1 recorrido por el extremo izquierdo. Por lo tanto, el haz se desvía hacia la normal, tal como se muestra.

del *ángulo de incidencia*, que se define como el ángulo formado por el haz incidente y la normal a la superficie. El *ángulo de refracción* se define como el ángulo que el haz refractado forma con la normal a la superficie. (Tomaremos siempre el ángulo de incidencia y el ángulo de refracción positivos entre 0° y 90° .) Estas definiciones están ilustradas en la Fig. 4.6.

Podemos conseguir fácilmente una relación entre n_1/n_2 , θ_1 y θ_2 como sigue. Las “crestas de onda” del haz luminoso, o “frentes de onda”, como se denominan en las ondas tridimensionales que tenemos aquí, son perpendiculares a la dirección de avance del haz luminoso. Cuando un frente dado alcanza el límite donde el índice aumenta (como al pasar de aire a vidrio), un extremo del frente de onda alcanza el límite antes que el otro extremo. Así, la velocidad de fase disminuye en un extremo antes y en el otro después. Por lo tanto, el ángulo del frente de onda cambia si un extremo del frente lo hace, en forma parecida a como cambia el ángulo de una fila de caminantes que se modifica si un extremo de la fila tiende a detenerse mientras que otro no lo hace. Las relaciones geométricas se muestran en la Fig. 4.7.

Consideremos los dos triángulos rectángulos que tienen la hipotenusa común x en la Fig. 4.7. A partir de la figura vemos que

$$l_1 = x \operatorname{sen} \theta_1, \quad l_2 = x \operatorname{sen} \theta_2. \quad (67)$$

Sea t el tiempo que tarda la onda que se propaga en avanzar la distancia l_1 , en el medio 1 o una distancia l_2 en el medio 2. Entonces

$$l_1 = \frac{ct}{n_1}, \quad l_2 = \frac{ct}{n_2}. \quad (68)$$

Así

$$ct = n_1 l_1 = n_2 l_2.$$

Entonces, utilizando la ecuación (67) obtenemos:

$$\boxed{n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2.} \quad (69)$$

La ecuación (69) se llama *ley de Snell* de la refracción.

Dispersión del vidrio. Vemos ahora que la dispersión del prisma resulta del hecho de que el *índice de refracción es mayor para la luz azul que para la luz roja*. Damos a continuación algunos valores para vidrio “crown” de cinc, tomado del *Handbook of Physics and Chemistry*. Las longitudes de onda están dadas en angstrom (10^{-8} cm) y micrones (10^{-4} cm). las frecuencias ($\nu = c/\lambda$) están dadas en unidades de 10^{14} Hz (1 hertz = 1 ciclo por segundo).

La Tabla 4.2 puede resumirse groseramente diciendo que el índice de refracción del vidrio es aproximadamente 1,5 sobre todo el rango de frecuencia visible y que la *dispersión*, es decir, la proporción de variación de n con λ , da un *incremento* del índice de refracción n de alrededor de seis milésimas para cada 1000 Å de *decrecimiento* de la longitud de onda.

Puede estudiarse la dispersión en el agua con un simple prisma hecho con dos portaobjetos (más masilla y cinta) y filtro púrpura, que absorbe el verde pero deja el rojo y el azul. (Véase Exp. casero 4.12.)

Tabla 4.2 Dispersión del índice de refracción del vidrio

Color	$\lambda(\text{Å})$	$\lambda(\mu)$	$\nu(10^{14} \text{ Hz})$	n
Casi ultravioleta	3 610	0,361	8,31	1,539
Azul oscuro	4 340	0,434	6,92	1,528
Azul verde	4 860	0,486	6,18	1,523
Amarillo	5 890	0,589	5,10	1,517
Rojo	6 560	0,656	4,57	1,514
Rojo muy oscuro	7 680	0,768	3,91	1,511
Infrarrojo	12 000	1,20	2,50	1,505
Extremo infrarrojo	20 000	2,00	1,50	1,497

¿Por qué el índice de refracción varía con la frecuencia? Volvamos a nuestra línea de transición. La velocidad de fase es

$$v_{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(C/a)(L/a)}}.$$

Cualitativamente, la velocidad de fase es menor si aumentamos C , porque entonces la “fuerza de retorno” que es la fuerza electromotriz $C^{-1}Q$, es menor para una carga dada Q . La velocidad de fase es también menor si aumentamos L , porque entonces la “inercia” es mayor.

Consideremos materiales de permeabilidad magnética unitaria (para vidrio, μ difiere de la unidad solamente en la quinta cifra decimal). Por lo tanto, necesitamos comprender solamente cómo

$$v_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n} \quad (70)$$

depende de la frecuencia.

Vimos en el Vol. II, Sec. 9.9, que en un capacitor lleno de dieléctrico y que posee un campo eléctrico $E_0(t)$ debido a la carga Q sobre las placas, el campo promedio local $E(t)$ en el dieléctrico está dado por la superposición de $E_0(t)$ y el campo $-4\pi\mathbf{P}(t)$ que resulta de la polarización eléctrica inducida:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(t) - 4\pi\mathbf{P}(t), \quad (71)$$

donde $\mathbf{P}(t)$ es el momento dipolar inducido, por unidad de volumen:

$$\mathbf{P}(t) = Nq\mathbf{x}(t)\hat{\mathbf{x}}. \quad (72)$$

Aquí N es la densidad numérica de cargas polarizadas (número por unidad de volumen), q es la carga sobre cada carga polarizable, $x(t)$ es el desplazamiento de la carga desde su posición de equilibrio y $\hat{\mathbf{x}}$ es un vector unitario. Tomemos \mathbf{E}_0 , \mathbf{P} y \mathbf{E} a lo largo de $\hat{\mathbf{x}}$ y eliminemos los signos vectoriales. Como la capacidad C se define como $C = Q/V$, donde V es la diferencia de potencial entre las placas, vemos que con el agregado del dieléctrico debido a la polarización inducida (con una disminución proporcional de V) da un aumento de C . El factor en que aumenta C se llama constante dieléctrica ϵ . Así, de acuerdo con las ecuaciones (71) y (72)

$$\epsilon = \frac{E_0}{E} = 1 + \frac{4\pi P(t)}{E(t)} = 1 + \frac{4\pi Nqx(t)}{E(t)}. \quad (73)$$

Ejemplo 6: Modelo simple de «molécula de vidrio»

A pesar de la simplicidad del modelo que vamos a dar ahora, éste manifestará esencialmente todos los rasgos importantes de cualquier modelo clásico (es decir, precuántico) que describa la interacción microscópica de la luz con la materia. No son estos rasgos despreciables; la mecánica clásica predice, como veremos, muchos de los rasgos sobresalientes de estos fenómenos. La razón es que una descripción cuántica reemplaza, pero no necesariamente contradice, la descripción clásica; la descripción cuántica incluye la descripción clásica como un caso límite, aplicable bajo condiciones que están presentes en un amplio rango de fenómenos ordinarios.

Supondremos que una «molécula de vidrio» consiste en un núcleo masivo en reposo junto con una carga q de masa relativamente pequeña M . La carga está ligada mediante un resorte con una constante de elasticidad $M\omega_0^2$. El movimiento de la carga está amortiguado a través de una constante de amortiguamiento Γ . La ecuación de movimiento de q está dada así, por

$$M\ddot{x} = -M\omega_0^2x - M\Gamma\dot{x} + qE(t). \quad (74)$$

Supongamos ahora que el campo externo $E_0(t)$ varía armónicamente con frecuencia angular ω . Entonces $P(t)$ y $E(t)$ variarán también con una frecuencia ω . Así, podemos poner para el campo en una molécula «promedio»

$$E(t) = E_0 \cos \omega t. \quad (75)$$

Pero entonces la ecuación (74) describe el oscilador armónico que consideramos en la Sección 3.2, con $F_0 = qE_0$. La solución $x(t)$ para las oscilaciones estacionarias está dada por

$$x(t) = A_{el} \cos \omega t + A_{ab} \sin \omega t, \quad (76)$$

donde A_{el} y A_{ab} son las amplitudes de elasticidad y absorción. En el caso de una sustancia transparente «incolora», como el vidrio claro o el agua, no hay resonancias importantes de las moléculas de vidrio en el rango de frecuencias visibles. (Éste es el motivo de que sea transparente e «incolore».) En el caso de sustancias como vidrio coloreado o filtros de gelatina, hay resonancias en el rango visible. En efecto, es la absorción de energía de radiación debida al término $A_{ab} \sin \omega t$ en estas resonancias la que resta parte del espectro de colores de la luz blanca visible y deja el color transmitido que se ve. (Se insta al lector a observar una fuente de luz «blanca», tal como una lámpara incandescente, usando una red de difracción y filtros.) No deseamos considerar el comportamiento de filtros coloreados a frecuencias cercanas

a las resonancias absorbentes. Por lo tanto, despreciaremos el término $A_{ab} \sin \omega t$ en la ecuación (76). Sabemos por el Capítulo 3 que es una buena aproximación mientras no estemos cerca de la resonancia. El caso general (incluyendo absorción) se discute en el Tema suplementario 9.

El índice de refracción está dado entonces por

$$n^2 = \epsilon = 1 + 4\pi Nq \frac{x(t)}{E(t)} = 1 + 4\pi Nq \frac{A_{el}}{E_0}. \quad (77)$$

Suponiendo que estamos lejos de la resonancia, es decir, tomando $\Gamma = 0$ en la ecuación (74) tenemos [véase Ec. (3.17), Sec. 3.2],

$$A_{el} = \frac{F_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{qE_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Así obtenemos

$$\boxed{\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = n^2 = \epsilon = 1 + \frac{4\pi Nq^2}{M} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad (78)$$

Para adoptar este resultado, basado en un modelo simple con resonancia única, a un trozo de vidrio real, debería sumar las contribuciones a $n^2 - 1$ procedentes de todas las resonancias importantes. En este caso, ω_0^2 en la ecuación (78) puede tomarse como una frecuencia de resonancia promedio en una primera aproximación. (Véase Prob. 3.20.) Para N deberíamos tomar el número de moléculas de vidrio por centímetro cúbico, multiplicado por el número promedio de resonancias contribuyentes por molécula. El número de electrones que hacen una contribución substancial es aproximadamente igual al número de electrones de la “capa exterior” o electrones de “valencia”.

Cuando ω está en el rango de frecuencias de luz visible, las resonancias más importantes en vidrio están en frecuencias “ultravioletas” correspondientes a las longitudes de onda $\lambda = c/\nu$ del orden de 1000 Å (es decir, 10^{-5} cm) o menos. Las longitudes de onda de luz visible son alrededor de 5 veces más grandes que éstas; las frecuencias ω de luz visible son, de la misma manera, 5 veces menores que la frecuencia de resonancia ω_0 . Entonces $n^2 - 1$ es positivo, de acuerdo con la ecuación (78). Esto coincide con la experiencia para luz visible en vidrio. Obsérvese también que cuando ω crece (manteniéndose siempre menor que ω_0), el denominador $\omega_0^2 - \omega^2$ de la ecuación (78), se hace menor, mientras que $n^2 - 1$ se hace mayor. De esta manera, la luz azul (frecuencia mayor) tiene un índice mayor que la luz roja. Esto concuerda con el resultado experimental de que el prisma desvía más el azul que el rojo.

Velocidades de fase mayores que c . Cuando la frecuencia ω de la radiación electromagnética excitante (la luz) es menor que la frecuencia de resonancia ω_0 , obtenemos los resultados dados arriba, es decir, que la velocidad de fase es menor que c , que la longitud de onda es menor que la longitud de onda en el vacío y que la frecuencia creciente da como resultado un índice de refracción creciente. Esta situación se denomina dispersión “normal” cuando la frecuencia ω es mayor que la frecuencia de resonancia, como en el caso de “ultravioleta lejano” en vidrio, tenemos entonces a partir de la ecuación (78) que $n^2 - 1$ es negativo, es decir, n^2 es menor que 1. Si n^2 está entre 0 y 1 tenemos nuevamente lo que se llama dispersión normal. Pero en este caso, la velocidad de fase es mayor que c la longitud de onda es mayor que la longitud de onda en el vacío, y nuevamente un aumento de la frecuencia lleva a un índice de refracción creciente. (Cuando la frecuencia se hace muy grande, n finalmente crece hasta 1 y la luz se comporta como en el vacío.) En el rango de frecuencias $\omega_0 - \frac{1}{2}\Gamma < \omega < \omega_0 + \frac{1}{2}\Gamma$, resulta que el índice de refracción decrece cuando ω crece. Esta situación se denomina dispersión “anómala”.

El origen físico de las velocidades de fase que son mayores que c , está en la crucial relación de fase existente entre la fuerza motriz $qE(t)$ y la oscilación $x(t)$ de la carga motriz q . Sabemos que si la frecuencia motriz es inferior a la frecuencia de resonancia, $x(t)$ puede “seguir” a la fuerza $qE(t)$. Entonces, las cargas son desplazadas en la misma dirección que la fuerza y crean un campo que tiende a anular el campo original. (Esto se cumple para q positiva o negativa.) Este campo reducido cede una fuerza de retorno reducida y, por consiguiente da una velocidad de fase menor. Por otro lado, cuando la carga es excitada por encima de su frecuencia de resonancia, ésta no se puede “mantener” y el desplazamiento $x(t)$ es siempre en la dirección opuesta a la de la fuerza instantánea $qE(t)$. Así, por ejemplo, cuando se arroja una pelota de una mano a la otra, se ejerce la máxima fuerza hacia la izquierda cuando la pelota está a la máxima distancia hacia la derecha. El desplazamiento en un instante dado es debido, en su mayor parte, a la fuerza ejercida medio ciclo antes. El campo debido al desplazamiento relativo de las cargas tiende entonces a aumentar el campo original. Esto da una fuerza de retorno aumentado y, por lo tanto, una velocidad de fase mayor que en el vacío.

Podemos sacar como conclusión que no hay más misterio alrededor de una velocidad de fase mayor que c que el que hay alrededor de una pelota que está en la mano derecha a pesar de que esté siendo empujada hacia la izquierda.

Ondas exponenciales — rango de frecuencia reactiva. Cuando la frecuencia motriz ω excede a la frecuencia de resonancia ω_0 , entonces n^2 es menor que 1, de acuerdo con la ecuación (78). Mientras n^2 esté entre

0 y 1 tenemos ondas sinusoidales, es decir, k^2 resulta ser un número positivo. Éste será el caso para ω suficientemente grande (suponiendo siempre $\omega > \omega_0$), dado que, para ω muy grande, n^2 es sólo levemente menor que 1. Pero entre $\omega = \omega_0$ más varias Γ [tal que podemos usar la forma aproximada de A_{ei} de la ec. (78)] y $\omega = \infty$, existe una región donde la ecuación (78) da n^2 negativo. Éste será el caso en el rango de frecuencias:

$$\frac{4\pi Nq^2}{M} > \omega^2 - \omega_0^2, \quad (79)$$

donde suponemos $\omega^2 - \omega_0^2 \gg \Gamma\omega_0$, para asegurar que estamos suficientemente encima de la frecuencia de resonancia y podemos usar la expresión aproximada para A_{ei} . Cuando se cumple la ecuación (79), entonces la (78), da como resultado n^2 negativo, es decir, k^2 es negativo. Esto significa, simplemente, que la ecuación diferencial para la dependencia espacial de las ondas *no* es

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} = -k^2 \psi(z,t), \quad k^2 > 0, \quad (80a)$$

que corresponde a ondas sinusoidales, sino

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} = +\kappa^2 \psi(z,t), \quad \kappa^2 > 0, \quad (80b)$$

que corresponde a ondas exponenciales. Ésta es una situación que hemos encontrado antes, por ejemplo, con un sistema de péndulos acoplados. Cuando la relación de dispersión para k^2 en función de ω^2 da un valor negativo para k^2 , podemos cambiar simplemente el nombre de k^2 por $-\kappa^2$ y reconocer que las ondas son exponenciales.

Daremos una deducción cualitativa de la condición para ondas exponenciales, la ecuación (79), después que hayamos considerado el caso especial donde ω_0 es cero. El caso especial da la luz de dispersión para la ionosfera, como mostraremos ahora:

Ejemplo 7: Dispersión en la ionosfera

En la Sección 2.4 (Ejemplo 6), dimos un modelo simple del plasma de la ionosfera terrestre y dedujimos la frecuencia de vibraciones libres ω_p , en lo que puede llamarse “modo bamboleante” de la ionosfera (el modo de longitud de onda infinita, similar al modo bamboleante en un recipiente con agua, donde la superficie del agua permanece plana mientras el agua “sube y baja”). En este modelo despreciamos el movimiento de los iones positivos y despreciamos también todo amortiguamiento del movimiento de los electrones libres. (En realidad existe

amortiguamiento debido a los choques de los electrones con iones, con la consiguiente transferencia de energía de la oscilación a energía “térmica” aleatoria.) La ecuación de movimiento de un único electrón de carga q y masa M es entonces

$$M\ddot{x} = qE(t), \quad (81)$$

donde $E(t)$ es el campo eléctrico en la posición del electrón. Para *oscilaciones libres*, $E(t)$ se debe totalmente a la polarización por unidad de volumen:

$$E(t) = -4\pi P(t) = -4\pi Nqx(t). \quad (82)$$

Entonces, para oscilaciones libres, las ecuaciones (81) y (82) dan

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi Nq^2}{M}x \equiv -\omega_p^2 x. \quad (83)$$

De esta forma hemos repetido (más brevemente) la deducción anterior de la ecuación de movimiento para oscilaciones a la frecuencia de plasma ω_p . Supongamos ahora que el plasma es alimentado en un extremo por un transmisor de radio o TV. (Supongamos que la geometría es del tipo rectilíneo y paralela, como en una línea de transmisión de placas paralelas, de forma tal que nuestro problema es lo más simple posible.) Entonces, $E(t)$ es la superposición [análoga a la ec. (71)]

$$E(t) = E_{tr} - 4\pi P(t), \quad (84)$$

donde E_{tr} (el subíndice significa transmisor) es el campo que *habría* si no hubiese allí contribución de electrones libres. La ecuación de movimiento del electrón es similar a la del electrón en la “molécula de vidrio” siempre que hagamos la “constante de resorte” $K = M\omega_0^2$ y la constante de amortiguación Γ iguales a cero (véase ec. (74)). Así, el electrón libre tiene “frecuencia de resonancia cero”, $\omega_0 = 0$. El resultado para el índice de refracción, es decir, para la relación de dispersión, se obtiene entonces simplemente haciendo $\omega_0 = 0$ en la ecuación (78):

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = n^2 = \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (85)$$

con

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{M}.$$

Multiplicando la ecuación (85) por ω^2 queda en la forma que dimos antes:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad \omega^2 \geq \omega_p^2. \quad (86)$$

Para la región de frecuencia reactiva tenemos ondas exponenciales:

$$\omega^2 = \omega_p^2 - c^2 k^2, \quad \omega^2 \leq \omega_p^2. \quad (87)$$

Es justo que mencionemos que nuestro modelo de la ionosfera no es exacto. Algunas de nuestras suposiciones físicas carecen de sentido para varias frecuencias por diversas razones interesantes, y la relación de dispersión exacta es, en realidad, considerablemente más complicada que la indicada por las ecuaciones (86) y (87). Por ejemplo, a frecuencias suficientemente bajas, un electrón choca en promedio varias veces con iones por cada ciclo de oscilación. La fuerza de amortiguamiento es entonces dominante; nosotros despreciamos el amortiguamiento en nuestro modelo. Además, en ciertas frecuencias hay otras resonancias además de la que se produce a la frecuencia de oscilación de plasma ω_p . Por ejemplo, las oscilaciones de plasma de los iones positivos más lentos y más pesados se hacen importantes a frecuencias bajas. (Las oscilaciones de plasma tienen una frecuencia de alrededor de 100 kc.) De la misma manera, la "frecuencia de ciclotrón" ω_c que corresponde al movimiento circular de los electrones en el campo magnético terrestre (alrededor de $\frac{1}{2}$ gauss) es importante. Para una interesante discusión de los resultados experimentales, puede verse "Ionosphere Explorer I Satellite: First Observations from the Fixed-Frequency Topside Sounder", por W. Calvert, R. Knecht, y T. Van Zandt, *Science* **146**, 391 (16 oct. 1964).

Explicación cualitativa de la frecuencia de corte inferior. Sabemos que para cualquier sistema (por ejemplo, para un sistema de péndulos acoplados) la frecuencia del modo *más bajo* posible para oscilaciones libres, es también la frecuencia posible más baja para ondas sinusoidales producidas por una fuerza motriz armónica. Así, la frecuencia modal más baja es la frecuencia de corte inferior para oscilaciones forzadas. Para frecuencias existentes inferiores a la frecuencia de corte, las ondas son exponenciales en lugar de sinusoidales.

Exactamente a la frecuencia de corte, la longitud de onda de ondas sinusoidales es infinitamente larga, como lo es la distancia de atenuación para ondas exponenciales. (Para péndulos acoplados, todos los péndulos se balancean en fase.) De esta manera, si deseamos buscar la frecuencia de corte inferior en cualquier ley de dispersión, simplemente hacemos $k = 0$ en la relación de dispersión. La frecuencia obtenida a partir de la ley de dispersión con $k = 0$ es entonces la frecuencia de corte a la cual podemos llamar $\omega_{c.o.}$. En nuestro ejemplo del índice de refracción tenemos [véase ec. (78)]

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 + \frac{4\pi N q^2}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Haciendo $k = 0$ se obtiene la frecuencia de corte para baja frecuencia:

$$\omega_{c.o.}^2 = \omega_0^2 + \frac{4\pi Nq^2}{M}. \quad (88)$$

Ahora, como siempre, ω_0^2 es la fuerza de retorno por unidad de masa por unidad de desplazamiento. De acuerdo con nuestra discusión (arriba) de la ionosfera, esta fuerza de retorno (por unidad de masa por unidad de desplazamiento) para oscilaciones libres de los electrones de la ionosfera es $\omega_p^2 = 4\pi Ne^2/M$. Éste es el modo normal de oscilación más bajo para los electrones y tiene longitud de onda infinita, es decir, todos los electrones oscilan en fase. Está claro que si ahora agregamos a cada carga oscilante una fuerza de vínculo mediante un resorte de constante, $M\omega_0^2$, entonces estamos agregando simplemente una fuerza de retorno (por unidad de masa por unidad de desplazamiento) ω_0^2 a cada carga. Las cargas pueden todavía oscilar todas en fase, por esto k es aún cero y el sistema sigue estando en su modo de oscilación libre más bajo. De esta manera vemos que el segundo miembro de la ecuación (88) da la fuerza de retorno por unidad de masa por unidad de desplazamiento para el modo más bajo de oscilación libre. Es, por lo tanto, una frecuencia de corte inferior. Así, encontraremos la ecuación (88) también como la desigualdad de (79), cumpliéndose ambas para el rango de frecuencias “reactivas” donde las ondas son exponenciales.

He aquí otra explicación más física para la existencia de la frecuencia de corte inferior en la ley de dispersión para el índice de refracción. Por simplicidad, ponemos $\omega_0 = 0$. Entonces nuestro “modelo” es la ionosfera. La pregunta es, ¿por qué existe una frecuencia de corte inferior, ecuación (89)?

$$\omega_{c.o.}^2 = \frac{4\pi Nq^2}{M}. \quad (89)$$

Primero señalemos que en muchos aspectos la ionosfera (o nuestro modelo de ella) es algo así como un conductor metálico ordinario. En cada caso hay electrones “libres” que llevan corriente si se mantiene un campo eléctrico en el medio. Ahora bien, un conductor metálico en un campo eléctrico “estático” (campo en el cual las cargas están en reposo y los campos son todos constantes en el tiempo) tiene campo eléctrico nulo en el interior del conductor. La razón de que el campo sea nulo no es que de alguna manera el metal haya “bloqueado” el campo motriz exterior, o lo haya engullido. El campo exterior efectivamente está aún dentro del metal. Pero éste es “anulado” por la superposición de otro campo, el producido por las cargas que han sido llevadas a la superficie del metal. Si el campo excitante es conectado repentinamente, los electrones en el metal necesitan algún tiempo para moverse, debido a que tienen inercia, y el campo en el interior no es cero al

principio, sino que tiene el valor del campo externo. Después que las cargas se sitúan y llegan al equilibrio, producen un campo que, superpuesto al campo motriz, da una resultante nula. (Si éste no es el caso, entonces las cargas no están aún en equilibrio y continúan moviéndose hasta alcanzarlo.) Llamemos al tiempo que tardan en llegar al equilibrio “tiempo medio de relajación”, designándolo por τ . Si el campo excitante es invertido en un tiempo corto comparado con τ , entonces el flujo de carga no tendrá tiempo de establecer un campo opuesto antes de que comience el flujo inverso. De esta manera, *la frecuencia de corte será del orden de τ^{-1}* . Para radiación electromagnética incidente de frecuencia alta comparada con τ^{-1} , los electrones no tendrán tiempo de moverse para anular el campo. El medio será, por consiguiente, “transparente” para frecuencias que estén por encima de la frecuencia de corte. A frecuencia “infinita”, los electrones no tendrán tiempo de moverse para nada y la radiación viajará como si estuviese en el vacío. Si el sistema es excitado en un extremo con frecuencias menores que la frecuencia de corte τ^{-1} , éste actuará como un filtro pasaaltos excitado debajo del corte. El campo en puntos muy cercanos al extremo de entrada, será esencialmente igual al campo motriz. En puntos más alejados, el movimiento de los electrones tiene tiempo de anular el campo incidente, y obtenemos una cancelación progresivamente mayor —atenuación exponencial— a medida que aumenta la distancia.

Estimemos el tiempo de relajación τ . Supongamos que el campo E_0 es conectado al tiempo cero. Éste produce una aceleración dada por fuerza/ $M = qE_0/M$. Durante un tiempo t , si esta aceleración es mantenida constante, los electrones viajarán una distancia $\frac{1}{2}at^2$, donde a es la aceleración. Sacando el factor $\frac{1}{2}$ para esta estimación aproximada, obtenemos un desplazamiento x en un tiempo t dado por

$$x \approx \frac{qE_0}{M} t^2. \quad (90)$$

Supongamos que el movimiento de las cargas está limitado por las “superficies” del plasma (la ionosfera) o del metal. La carga total agregada a una superficie y sustraída de la otra es

$$Q = Nqx, \quad (91)$$

donde N es la densidad numérica, A es el área transversal y x es el desplazamiento. Las cargas Q sobre una superficie y $-Q$ sobre la otra producen un campo uniforme E dado por

$$E = 4\pi \frac{Q}{A} = 4\pi Nqx \approx 4\pi Nq \frac{qE_0 t^2}{M}. \quad (92)$$

Si el tiempo t es suficientemente largo, tal que E (el campo anulatorio) pueda llegar a ser igual a E_0 (el campo motriz), entonces habremos alcanzado el equilibrio. Por lo tanto, el tiempo de relajación τ se obtiene haciendo $E \approx E_0$ y $t \approx \tau$ en la ecuación (92):

$$\omega_{c.o.}^2 \approx \tau^{-2} \approx \frac{4\pi Nq^2}{M},$$

La cual coincide con el resultado exacto, ecuación (89).

Discusión cualitativa del índice de refracción en un rango de frecuencias dispersivas. Una partícula cargada aislada, oscilando en el vacío emite ondas electromagnéticas que viajan a la velocidad de la luz. Por este motivo, cuando una onda luminosa incide sobre una partícula cargada aislada, oscilando en estado estacionario, la carga oscilante emite radiación que viaja en el vacío con velocidad c . Los campos irradiados por la carga oscilante se superponen con el campo incidente para dar un campo resultante. Cuando hay varias, cargas como en un trozo de vidrio (o en la ionosfera), cada carga es excitada por el campo eléctrico local de su entorno. Este campo es a su vez el resultado de una superposición del que estaría presente si no hubiese allí cargas (el “campo incidente”) más los campos irradiados por todas las cargas oscilantes.

Cada carga oscilante (en un trozo de vidrio, por ejemplo) irradia ondas que viajan con la velocidad de la luz *en el vacío*, c , aun cuando las ondas están “atravesando el vidrio”. ¿Cómo es posible que una superposición de ondas que tienen la misma velocidad c , la misma frecuencia ν y por lo tanto la misma longitud de onda c/ν , den una resultante que tiene una longitud de onda λ que no es c/ν y una velocidad de fase diferente de c ? La pista está en la palabra “fase”. Todo depende de la fase relativa entre el campo irradiado por una carga oscilante aislada y el campo que la está alimentando. Si el campo irradiado por la carga excitada estuviese exactamente en fase con la radiación motriz, entonces en algún punto de observación tendría que aumentar el campo total (por “interferencia constructiva”), pero no produciría ningún movimiento en fase del campo total y, por consiguiente, no afectaría la velocidad de fase. De la misma manera, si el campo irradiado estuviese desfasado en 180 grados con el campo motriz, la superposición de los campos irradiado y excitante daría una resultante menor que el campo incidente (por “interferencia destructiva”), pero no desplazaría la fase. Para que la radiación de las cargas desplace la fase de la resultante, ésta debe incluir una contribución que esté + 90 ó — 90 grados fuera de fase con el campo motriz. La constante de fase de la resultante está fundamentalmente determinada por el campo excitante (porque el campo motriz es mayor que la contribución muy pequeña de la carga que estamos considerando), pero la constante de fase es ligeramente “empujada” por la contribución de la carga oscilante.

Supongamos, por ejemplo, que en un punto fijo dado, el campo debido a la radiación incidente es $E_0 \cos \omega t$. Éste es el campo eléctrico en el punto de observación cuando no hay vidrio presente y se debe, por ejemplo, a los electrones oscilantes de alguna fuente de luz distante. Cuando se coloca el vidrio entre la fuente y el observador, el campo aportado por los electrones oscilantes de la fuente es *aún* $E_0 \cos \omega t$ y *aún* se propaga (a través del vidrio y todo) con velocidad c . Supongamos ahora que una pequeña contribución de una de las moléculas oscilantes del vidrio está dada por el campo $\varepsilon \sin \omega t$ donde ε es muy pequeño y es (por ejemplo) positivo. Esta radiación viaja también a través del resto del vidrio con velocidad c , pero tiene, por hipótesis, un desplazamiento de fase de 90 grados relativos a la radiación excitante. La superposición da el campo oscilatorio resultante en el punto de observación:

$$E(t) = E_0 \cos \omega t + \varepsilon \sin \omega t.$$

Para $\varepsilon \ll E_0$, ésta es equivalente a

$$E(t) = E_0 \cos (\omega t - \delta), \quad \delta \equiv \frac{\varepsilon}{E_0} \ll 1,$$

como puede verse fácilmente (usando $\cos \delta \approx 1$ y $\sin \delta \approx \delta$). Así, vemos que en un punto dado la resultante $E(t)$ tiene un desplazamiento de fase δ cuando se coloca el vidrio. El observador situado en el punto mencionado tiene que “esperar más tiempo” para que la fase de $E(t)$ adquiera un valor dado, es decir, tiene que esperar que $\omega t - \delta$ alcance el valor que ωt hubiese alcanzado si no hubiese allí vidrio. Por lo tanto, la velocidad de fase es menor que c . Obsérvese que si la contribución del vidrio fuese proporcional a $\cos \omega t$ la resultante sería

$$E(t) = (E_0 + \varepsilon) \cos \omega t,$$

y la velocidad de fase sería aún la del vacío, c . En cambio, la experiencia muestra que la velocidad de fase de la resultante es distinta de c , a pesar de que toda la contribución a la superposición viaja con velocidad c . Esto significa que la radiación proveniente de las moléculas de vidrio, que llega a un instante t debe estar ± 90 grados fuera de fase con la radiación proveniente de la fuente de luz que llega al mismo tiempo.

Lo único que queda por demostrar es que una contribución muy pequeña de las moléculas radiantes de vidrio está realmente ± 90 grados fuera de fase con el campo excitante. Lo hacemos como sigue: Supongamos que el campo coincidente es $E_0 \cos \omega t$. Entonces, la carga oscilante tiene un desplazamiento $x(t) = A_{el} \cos \omega t$, para ω alejada de la resonancia. En el Capítulo 7 veremos que la radiación de una carga

oscilante es proporcional a la “aceleración retardada”. Esto significa que el campo irradiado a una distancia z más adelante en el sentido de la propagación es proporcional a la aceleración de la carga en el instante anterior $t - (z/c)$, cuando la radiación fue emitida. Para el movimiento armónico la aceleración es $-\omega^2$ por el desplazamiento. De esta forma llegamos al horrible resultado de que la radiación aportada por cada una de las cargas oscilantes es proporcional a $\cos \omega t$, ¡mientras que hemos decidido que *debe* ser proporcional a $\sin \omega t$ si queremos tener una velocidad de fase diferente de c ! La explicación es la siguiente: Supongamos que tenemos una “onda plana” que se propaga en la dirección z . Entonces, en un instante dado consideraremos no solamente la contribución de una molécula que está “corriente arriba”, sino todas las contribuciones de una lámina delgada del vidrio, perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Como acabamos de ver, la molécula más cercana al punto de observación contribuye con un aporte muy pequeño, que está en fase con el campo motor (despreciando el signo más o menos), pero otras moléculas de la lámina están más alejadas y sus contribuciones tardan más en llegar (viajando siempre con velocidad c). Cuando integramos sobre una lámina infinitamente ancha, resulta que (como mostraremos en el Cap. 7) la contribución neta de la lámina tiene una fase que está 90 grados detrás de la que proviene de la molécula más cercana. En otras palabras, la molécula promedio de la lámina está efectivamente un cuarto de onda más alejada del punto de observación que la molécula más cercana. Así, hemos encontrado la fuente del corrimiento de la fase en 90 grados, y podemos ver cómo es que muchas ondas, todas viajando con velocidad c , pueden superponerse para dar una resultante con velocidad de fase distinta de c . El interrogante de si la velocidad de fase es mayor o menor que c depende solamente de que las oscilaciones motrices estén en fase o desfasadas 180 grados de la radiación motriz, lo cual depende nuevamente, como hemos visto, de que la frecuencia motriz esté por debajo o por encima de la frecuencia de resonancia. Dado que todas las moléculas están en estado estacionario, no es necesario “preocuparse” por el hecho de que la velocidad de fase pueda exceder a c .

Nomenclatura: ¿Por qué consideramos siempre a **E** y despreciamos a **B**? No lo hacemos siempre, pero sí a menudo. Parte de la razón por la que usualmente expresamos el efecto de las ondas electromagnéticas en función de **E** y suprimimos **B** de las fórmulas es la siguiente: Cuando las ondas electromagnéticas interaccionan con una partícula cargada, de carga q y velocidad v , la fuerza sobre la partícula está dada por la fuerza de Lorentz (Vol. II Sec. 5.2)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}.$$

En una onda electromagnética que se propaga en el vacío, **E** y **B** tienen la misma magnitud instantánea. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza aportada por **B** es menor que la aportada por **E** en un factor del orden de $|v/c|$. Ahora bien, resulta que cuando **E** y **B** se deben a fuentes de luz ordinaria o aun a un laser potente, los campos **E** y **B** son suficientemente débiles y, consecuentemente, la velocidad máxima $|v|$ alcanzada en el movimiento estacionario de electrones excitados en un trozo de cualquier material ordinario es pequeña comparada con c . Existe así un gran número de situaciones físicas donde podemos despreciar la fuerza debida a **B**. Éste es el motivo de que demos más énfasis a **E**.

A veces, sin embargo, los efectos de **B** pueden dominar, aunque sean pequeños, de acuerdo con la discusión anterior. Y, por supuesto, si **E** y **B** no se deben a radiación (ondas de propagación) sino (por ejemplo), a campos estáticos debidos a cargas y corrientes independientes, entonces **B** y **E** no están limitadas a la misma magnitud. Por ejemplo, podemos tener $|\mathbf{E}| = 0$ y $|\mathbf{B}| = 100$ kilogauss.

4.4 Impedancia y flujo de energía

Al estudiar modos y ondas estacionarias, hemos encontrado que un medio continuo puede caracterizarse por dos parámetros, uno que denota la “fuerza de retorno” y el otro la “inercia”. Para una cuerda continua, la tensión de equilibrio T_0 da la fuerza de retorno, y la densidad de masa ρ_0 da la inercia. Para la línea de transmisión pasabajos, los parámetros correspondientes son $(C/a)^{-1}$, la inversa de la capacidad en paralelo por unidad de longitud, y L/a , la inductancia por unidad de longitud. Para ondas longitudinales en un resorte, el parámetro de la fuerza de retorno es Ka , y el parámetro inercial es $M/a = \rho_0$. Para ondas sonoras, la “elasticidad” está dada por γp_0 , la inercia por la densidad de masa volumétrica ρ_0 . En todos los casos, los modos de ondas estacionarias se comportan en forma análoga a un oscilador armónico simple. (Para péndulos acoplados o una línea de transmisión pasabanda, necesitamos otro parámetro, la frecuencia de corte inferior.)

Las ondas de propagación tienen un comportamiento muy diferente al de las ondas estacionarias ya que transportan energía e impulso. Un sistema extenso que transporte ondas de propagación no se comporta como “un enorme oscilador armónico”, como lo hace cuando transporta ondas estacionarias. Así, los parámetros del oscilador armónico, fuerza de retorno e inercia, no son los mejores parámetros físicos para describir un medio que transporte ondas de propagación. Una cantidad que caracteriza un medio que transporte ondas de propagación, es la velocidad de fase v_φ . Para ondas transversales en una cuerda, ésta viene dada por

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \quad (93)$$

que es justamente una combinación de la fuerza de retorno y los parámetros T_0 y ρ_0 . Una combinación independiente de T_0 y ρ_0 está dada por

$$Z = \sqrt{\rho_0 T_0}. \quad (94)$$

Esta cantidad se denomina *impedancia característica*, o simplemente *impedancia*, para ondas transversales en una cuerda continua. Como demostraremos, la impedancia determina la proporción en que es irradiada energía sobre la cuerda, por una fuerza motriz dada. Así se llega a que la velocidad de fase y la impedancia son dos parámetros naturales para describir ondas de propagación en un medio dado.

Ejemplo 8: Ondas de propagación transversales en una cuerda continua

Supongamos que tenemos una cuerda continua estirada, con el extremo izquierdo en $z = 0$ excitada transversalmente por una fuerza armónicamente oscilante. El sistema se muestra en la Fig. 4.8. Designemos la conexión mediante la cual es impartida la fuerza motriz a la cuerda —el “terminal de salida del transmisor”— con la letra L , y designemos la cuerda que está en contacto inmediato con el terminal con la letra R . En el equilibrio (Fig. 4.8a) no tenemos componente transversal de la fuerza sobre L . La fuerza a lo largo de z es la tensión de equilibrio T_0 . Para la configuración general de la Fig. 4.8b, la tensión de la cuerda es T . La componente transversal de la fuerza ejercida por la cuerda sobre la terminal de salida del transmisor, F_x (R sobre L), está dada por

$$\begin{aligned} F_x(R \text{ sobre } L) &= T \sin \theta \\ &= (T \cos \theta) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= T_0 \tan \theta \\ &= T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (95)$$

El resultado (95) se cumple exactamente para un “slinky” ideal, el cual tiene $T = T_0/\cos \theta$. Se cumple también para cualquier resorte para ángulos pequeños θ .

Impedancia característica. Supongamos ahora que el transmisor está alimentando un medio completamente abierto (la cuerda) en el estado estacionario, de forma tal que el medio *está emitiendo ondas que se propagan en la dirección $+z$* . Entonces $\psi(z, t)$ tiene la forma:

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz). \quad (96)$$

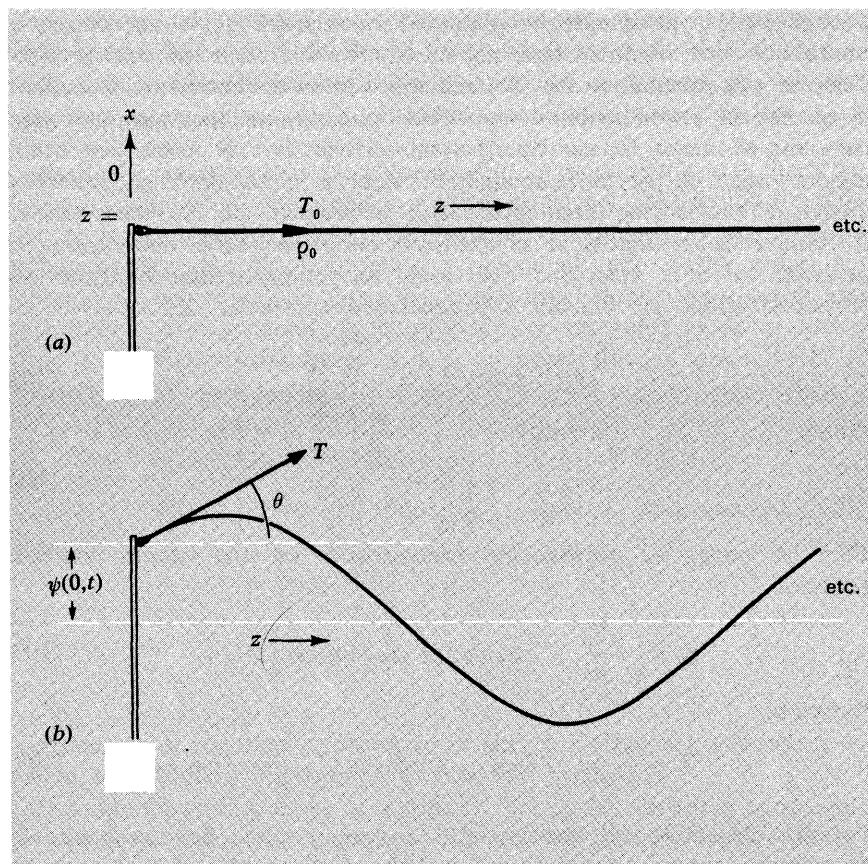


Fig. 4.8 Emisión de ondas transversales. (a) Equilibrio. (b) Configuración general.

Derivando se obtiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = kA \text{sen}(\omega t - kz), \quad (97)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega A \text{sen}(\omega t - kz). \quad (98)$$

Comparando las ecuaciones (97) y (98) y usando la relación $v_\varphi = \omega/k$, vemos que para una onda que se propaga en la dirección $+z$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{v_\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (99)$$

Reemplazando la ecuación (99) en la (95), obtenemos (para ondas de propagación)

$$F_x(R \text{ sobre } L) = -\frac{T_0}{v_\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (100)$$

Pero $\partial\psi/\partial t$ es justamente la velocidad transversal de la cuerda en el punto que está sujeta al terminal de salida del transmisor. La cantidad T_0/v_φ es una constante. De esta manera hemos encontrado que cuando el transmisor emite ondas de propagación, la “fuerza de reacción” ejercida por el medio (la cuerda R) sobre el terminal de salida del transmisor, L , es una *fuerza de amortiguamiento* o fuerza de frenado. O sea, cuando el transmisor emite ondas que se propagan en la dirección L a R , la cuerda se opone al movimiento con una fuerza negativamente proporcional a la velocidad que se le ha impuesto. La constante de proporcionalidad es llamada *impedancia característica*, Z :

$$F_x(R \text{ sobre } L) = -Z \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (101)$$

donde

$$Z = \frac{T_0}{v_\varphi}. \quad (102)$$

Para las ondas de propagación transversales en una cuerda continua tenemos

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \quad \text{unidades de cm/seg} \quad (103)$$

Entonces

$$Z = \frac{T_0}{v_\varphi} = \sqrt{T_0 \rho_0} \quad \text{unidades de dina/(cm/seg)} \quad (104)$$

Potencia de salida del transmisor. Lo característico de una fuerza de amortiguamiento es que “disipa” o “absorbe” energía. En el presente ejemplo, es mejor decir que la cuerda *absorbe* energía en forma de “radiación” por la salida del transmisor. La pérdida de energía del transmisor no ha sido disipada, en el sentido de que no ha sido “degradada” en “calor”. En cambio, ha sido irradiada sobre la cuerda que puede transportarla a un “receptor” distante, donde puede ser completamente recuperada (como veremos después). La potencia de salida radiada está dada por el producto de la fuerza transversal ejercida por el transmisor sobre la cuerda en $z = 0$ por la velocidad transversal de la cuerda en $z = 0$. Usando el hecho de que F_x (L sobre R) es la opuesta de F_x (R sobre L) (que es la tercera ley de Newton) y usando la ecuación (101), encontramos que la potencia de salida instantánea $P(t)$ está dada (en erg/seg) por

$$P(t) = F_x(L \text{ sobre } R) \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (\text{general}) \quad (105)$$

$$P(t) = \left(Z \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) \frac{\partial\psi}{\partial t} = Z \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2 \quad (\text{onda de propagación})$$

La primera igualdad de la ecuación (105) es general. La segunda no lo es; ésta se cumple sólo para ondas de propagación.

En la ecuación (105) hemos expresado la potencia de salida en función de la cantidad ondulatoria $\partial\psi/\partial t$, que corresponde a la velocidad transversal instantánea de la cuerda (en $z = 0$) en cm/seg. Otra cantidad igualmente interesante e importante con respecto a las ondas es la fuerza transversal $F_x(R \text{ sobre } L)$ dada (en dinas) por la ecuación (95). La potencia de salida del transmisor puede expresarse en términos de esta cantidad mediante las ecuaciones (95) y (99):

$$\begin{aligned}
 P(t) &= F_x(L \text{ sobre } R) \frac{\partial\psi}{\partial t} && \text{(general)} \\
 &= \left[-T_0 \frac{\partial\psi}{\partial z} \right] \frac{\partial\psi}{\partial t} && \text{(general)} \\
 P(t) &= \left[-T_0 \frac{\partial\psi}{\partial z} \right] \left[-v_\varphi \frac{\partial\psi}{\partial z} \right] && \text{(onda de propagación) (106)} \\
 &= \frac{v_\varphi}{T_0} \left[-T_0 \frac{\partial\psi}{\partial z} \right]^2 \\
 &= \frac{1}{Z} \left[-T_0 \frac{\partial\psi}{\partial z} \right]^2.
 \end{aligned}$$

La primera y la segunda igualdad de la ecuación (106) son generales; la tercera se cumple solamente para ondas de propagación.

Nos tomamos el trabajo de expresar $P(t)$ en las distintas pero equivalentes formas de las ecuaciones (105) y (106) porque siempre encontraremos que hay dos cantidades físicamente interesantes con respecto a las ondas, y en algunos sistemas desearemos utilizar una, mientras que en otros sistemas podemos desear usar la otra. Por ejemplo, en el caso de ondas de sonido encontraremos que la presión desempeña un papel análogo al de la fuerza de retorno transversal $-T_0 \partial\psi/\partial z$ para la cuerda y que la velocidad longitudinal del aire en la onda de sonido tiene un papel análogo al de la velocidad transversal de la cuerda $\partial\psi/\partial t$. De la misma manera, en el caso de radiación electromagnética encontraremos que el campo magnético transversal B_y juega un papel análogo al de la velocidad transversal de la cuerda $\partial\psi/\partial t$, mientras que el campo eléctrico transversal E_x desempeña un papel análogo al de la fuerza de retorno $-T_0 \partial\psi/\partial z$ para la cuerda.

Energía transportada por una onda de propagación. La potencia irradiada $P(t)$ emitida en $z = 0$ por el transmisor en forma de ondas de propagación es igual a la cantidad de energía por unidad de tiempo que viaja en la dirección $+z$ en cualquier punto z que se considere. (Estamos despreciando el amortiguamiento.) De hecho, cuando obtuvimos nuestros resultados para el flujo de energía de L a R (izquierda a dere-

cha) en el terminal de salida del transmisor, pudimos haber considerado un punto cualquiera z en lugar del punto $z = 0$. Lo único que pedimos fue que el medio estuviese transportando ondas de propagación. Si se repasan los pasos de la deducción teniendo esta consideración en cuenta, se verá rápidamente que para ondas de propagación la potencia irradiada que pasa a través de un punto dado, z , en la dirección $+z$ está dada por expresiones análogas a las ecuaciones (105) y (106, excepto que la velocidad transversal $\partial\psi/\partial t$ y la fuerza de retorno $-T_0\partial\psi/\partial z$ están calculados en el punto arbitrario z en lugar de en $z = 0$. Así para una onda propagándose en una cuerda tenemos

$$P(z,t) = Z \left[\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial t} \right]^2 \quad (107)$$

o bien

$$P(z,t) = \frac{1}{Z} \left[-T_0 \frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z} \right]^2. \quad (108)$$

Ejemplo 9: Radiación de ondas longitudinales sobre un muelle

Consideremos ahora la emisión de ondas longitudinales de compresión y rarefacción sobre un muelle. Podremos adaptar estos resultados a la descripción de la irradiación de ondas de sonido usando el simple método de Newton (pero corrigiendo su famoso descuido). El sistema se muestra en la Fig. 4.9.

En la ecuación de movimiento longitudinal de un muelle con cuentas, la cantidad Ka entra exactamente de la misma forma que lo hace la tensión de equilibrio T_0 en las ecuaciones de movimiento para oscilaciones transversales de la cuerda con cuentas. [Véase ec. (2.77), Sección 2.4, y la discusión que la sigue.] Ésta es la razón por la que las

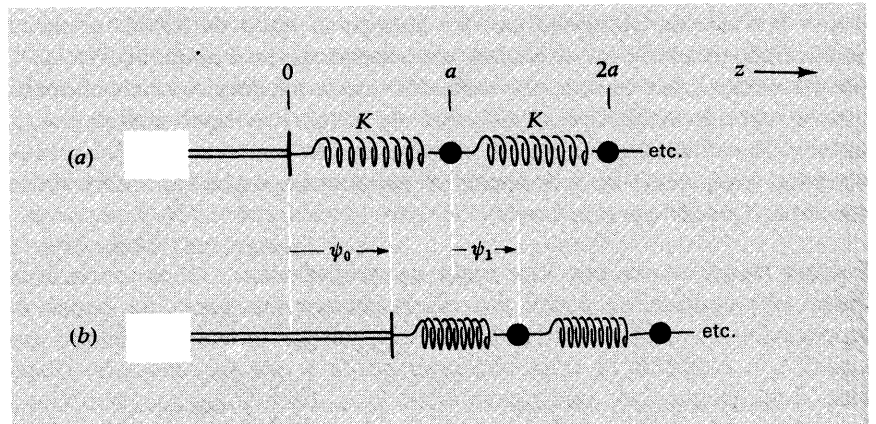


Fig. 4.9 Emisión de ondas longitudinales. (a) Equilibrio. (b) Configuración general.

velocidades de fase se obtienen una de otra intercambiando T_0 y Ka [véase ec. (27), Sec. 4.2]. De la misma manera, podemos encontrar la relación entre la impedancia característica y el flujo de energía para ondas longitudinales en una cuerda continua, simplemente, sustituyendo Ka por T_0 en los resultados que obtuvimos para oscilaciones transversales. Así, de las ecuaciones (103), (104), (107) y (108) obtenemos para ondas longitudinales los resultados

$$v_\phi = \sqrt{\frac{Ka}{\rho_0}}, \quad Z = \sqrt{Ka\rho_0}, \quad (109)$$

y el flujo de potencia en una onda de propagación (en ergios/seg),

$$P(z,t) = Z \left[\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{Z} \left[-Ka \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} \right]^2. \quad (110)$$

La cantidad $\psi(z,t)$ es el desplazamiento de su posición de equilibrio z ; es positiva si el desplazamiento es en la dirección $+z$. La velocidad correspondiente es $\partial \psi(z,t)/\partial t$. La cantidad $-Ka \partial \psi(z,t)/\partial z$ resulta ser la fuerza en la dirección $+z$ ejercida sobre aquella parte del resorte cuya posición de equilibrio está a la derecha del punto z , por aquella cuya posición de equilibrio está a la izquierda de z , después que ha sido restado el valor de equilibrio de esa fuerza, F_0 (Prob. 4.29):

$$F_z(L \text{ sobre } R) = F_0 - Ka \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z}. \quad (111)$$

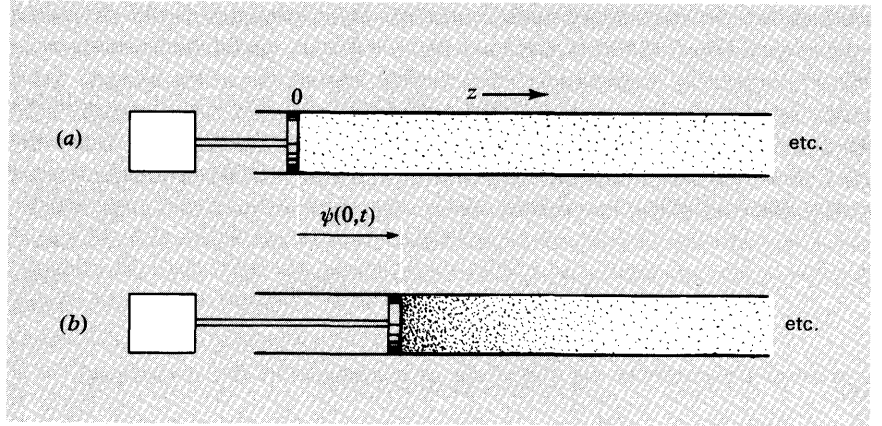
La fuerza F_0 de la ecuación (111) se debe al estiramiento o compresión de los resortes en sus configuraciones de equilibrio y no contribuye a ninguna onda. Éste es el motivo por el cual en la segunda igualdad de la ec. (110) aparece sólo el exceso sobre F_0 , es decir, $-Ka \partial \psi/\partial z$.

Ejemplo 10: Ondas de sonido

Utilizaremos el modelo de Newton para las ondas de sonido como se discutió en la Sección 4.2. El sistema se muestra en la Fig. 4.10.

En la Sección 4.2, encontramos la velocidad de fase de sonido usando la analogía de Newton de las ondas sonoras con las ondas longitudinales en un resorte continuo. Terminamos por reemplazar la densidad volumétrica del aire en el equilibrio lineal y por reemplazar Ka del resorte por la presión de equilibrio p_0 para aire por el famoso factor γ . Podemos, por consiguiente, obtener fácilmente las relaciones de impedancia y energía para las ondas sonoras. Reemplazamos simplemente Ka por γp_0 en las relaciones para ondas longitudinales sobre un resorte.

Fig. 4.10 Emisión de ondas sonoras longitudinales. (a) Equilibrio. (b) Configuración general.



Así, para ondas sonoras obtenemos [a partir de las ecs. (109) y (110)] los resultados

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}, \quad Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}, \quad (112)$$

y la intensidad del flujo de energía en una onda de propagación sonora, en erg/cm² seg,

$$I(z,t) = Z \left[\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{Z} \left[-\gamma p_0 \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} \right]^2. \quad (113)$$

La cantidad $\psi(z,t)$ es el desplazamiento de una pequeña cantidad de aire a lo largo de la dirección z desde su posición de equilibrio z . La cantidad $\partial \psi(z,t)/\partial t$ es la velocidad correspondiente. La cantidad $-\gamma p_0 \partial \psi(z,t)/\partial z$ es igual a la fuerza por unidad de área, ejercida en la dirección $+z$ sobre el aire que está a la derecha de z por el aire que está a la izquierda de z (recordar que z es la posición de equilibrio del aire y no la posición instantánea del aire) después que ha sido restado el valor de equilibrio de esta fuerza, por unidad de área, p_0 :

$$\frac{F_z(\text{L sobre R})}{A} = p_0 - \gamma p_0 \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z}. \quad (114)$$

Esta surge de la ecuación (111) para ondas longitudinales sobre un resorte, con la sustitución de p_0 por F_0 , y de γp_0 por Ka . La presión de equilibrio p_0 no contribuye con ninguna onda. Denominaremos a $-\gamma p_0 \partial \psi/\partial z$ como p_g :

$$p_g = -\gamma p_0 \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z}. \quad (115)$$

Para aire a TPN, tenemos $p_0 = 1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^6 \text{ dina/cm}^2$ y $\rho_0 = 1,29 \times 10^3 \text{ gm/cm}^3$. Así, las ecuaciones (112) dan

$$v_\varphi = 3.32 \times 10^4 \text{ cm/seg}, \quad (116)$$

$$Z = 42,8 \frac{(\text{dina/cm}^2)}{(\text{cm/seg})}. \quad (117)$$

Patrón de intensidad de sonido. La *intensidad* de una onda de propagación sonora se define como la energía que se propaga a través de la unidad de área por unidad de tiempo. Una intensidad de sonido comúnmente usada como patrón está dada por

$$\text{Intensidad patrón} = I_0 = 1 \mu\text{w/cm}^2 = 10 \text{ erg/cm}^2 \text{ seg}, \quad (118)$$

donde hemos usado los hechos de que $1 \mu\text{w} = 10^{-6}$ vatios y que $1 \text{ vatio} = 10^7 \text{ erg/seg}$. Una persona hablando en un tono de conversación común emite alrededor de 100 erg/seg de energía sonora. La apertura de la boca es de alrededor de 10 cm^2 cuando se habla. Por consiguiente, si usted habla en el extremo de un tubo de cartón, tal que toda la energía sonora va en dirección z , la intensidad del sonido es de alrededor de $(100 \text{ erg/seg})/10 \text{ cm}^2 = I_0$. Así, se puede obtener una sensación de la magnitud de I_0 poniendo a alguien a hablar a través de un tubo de cartón (corto). (Un tubo largo atenúa el sonido por fricción sobre las caras ásperas y por la irradiación fuera de los lados del tubo.) Si la persona grita tan fuerte como pueda dentro del tubo, la intensidad es de alrededor de $100I_0$. Para intensidades de 100 a 1000 veces I_0 , el que escucha siente dolor.

La intensidad del sonido más débil que puede ser escuchado depende de su frecuencia. Para aproximadamente A440 (es decir, 440 Hz o 440 cps), una persona promedio tiene un umbral de audición de alrededor de $10^{-10}I_0$. Así, el oído humano tiene el enorme rango dinámico de un factor 10^{12} en intensidad (desde $100I_0$ hasta $10^{-10}I_0$).

Nomenclatura – decibel. Siempre que la intensidad de sonido crece en un factor 10, se dice que ha aumentado en 1 bel. Así, el rango dinámico para el oído es de alrededor 12 bels. Siempre que el sonido aumenta en un factor 0,1 ha aumentado en 0,1 bel o 1 decibel. Así,

1 db = 1 decibel = variación en un factor de $10^{0.1}$ = variación en un factor de 1,26 en intensidad;

1 bel = 10 db = variación en un factor de 10 en intensidad. (119)

Una persona con audición normal puede apenas detectar un aumento o disminución de ruido de alrededor de 1 db.

Las siguientes aplicaciones incluyen cálculos de impedancia y flujo de sonido.

Aplicación: Valor medio cuadrático de la presión para intensidad de sonido dolorosa

¿Cuál es la presión cuadrática media (en atmósferas) para la intensidad de sonido dolorosa? Queremos la respuesta en atmósferas porque estamos interesados en qué medida el dolor tiene la misma causa que el que se siente cuando se nada 15 pies, más o menos, bajo la superficie del agua (sin bombear aire dentro del oído interno tragando). Sabemos que 33 pies de agua dan 1 atmósfera de presión y así a una profundidad de 15 pies la presión es más o menos $\frac{1}{2}$ atmósfera. ¿Es ésta la presión que tiene una onda sonora dolorosa?

Solución: Tomamos $I = 1000I_0$ como intensidad dolorosa. Entonces de acuerdo con la ecuación (113), tenemos

$$\begin{aligned}\langle p^2 \rangle^{1/2} &= (ZI)^{1/2} \\ &= (1000 ZI_0)^{1/2} \\ &= [(1000)(42,8)(10)]^{1/2} = 650 \text{ dina/cm}^2.\end{aligned}$$

Ésta es pequeña comparada con $1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^6 \text{ dina/cm}^2$. Así tenemos que el dolor no se debe solamente a que la presión promediada en el tiempo es demasiado grande, porque 400 dina/cm^2 es $6 \times 10^{-4} \text{ atm}$, que es como nadar a $\frac{1}{2} \text{ cm}$ bajo el agua.

Aplicación: Amplitud para sonido dolorosamente elevado

¿Cuál es la amplitud A del movimiento de las moléculas de aire para un sonido dolorosamente elevado? Tomemos $\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz)$. Entonces, $\partial\psi/\partial t$, cuadrado y promediado sobre un ciclo para z fijo, es igual a $(1/2)\omega^2 A^2$. Usando entonces la ecuación (113) y suponiendo que la frecuencia es 440 cps tenemos

$$\begin{aligned}A &= \frac{(2I/Z)^{1/2}}{\omega} \\ &= \frac{(2 \cdot 1000 \cdot 10/42,8)^{1/2}}{(6,28)(440)} \\ &= 2,5 \times 10^{-2} \text{ cm} = \frac{1}{4} \text{ mm}.\end{aligned}$$

Aplicación: Amplitud para un sonido escasamente audible

¿Cuál es la amplitud del movimiento de las moléculas del aire para un sonido escasamente audible? Supongamos que la intensidad es $10^{-10}I_0$. La amplitud es proporcional a la raíz cuadrada de I . Así, para la frecuencia A440 el resultado es la raíz cuadrada de 10^{-13} veces el resultado

encontrado en la aplicación anterior donde tomamos $I = 1000 I_0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} A &= 10^{-6.5}(2.5 \times 10^{-2}) \\ &= \frac{2.5 \times 10^{-8}}{\sqrt{10}} \approx 10^{-8} \text{ cm.} \end{aligned}$$

Éste es aproximadamente el diámetro de un átomo promedio. Así, ¡su oído es tan sensitivo acústicamente que es capaz de detectar movimientos del tímpano del orden de un diámetro atómico!

Aplicación: Salida de audio de un parlante típico de alta fidelidad

¿Cuál es la salida de sonido aproximada (en vatios) que se puede esperar en un parlante típico de alta fidelidad? Supongamos que un entusiasta de la alta fidelidad desea llenar una gran habitación que tiene paredes laterales reflectantes y una pared extrema absorbente con sonido a nivel doloroso de intensidad $100I_0$. Supongamos que la habitación tiene un área transversal de 10 pies \times 10 pies $\approx 10^5 \text{ cm}^2$. En el extremo en el que el parlante está irradiando, el entusiasta puede dejar que el parlante excite toda la pared como si fuese un tablero sonoro, o puede usar la primera parte de la habitación para obtener una bocina “ahusada” de tal forma que haya una “adaptación de impedancia” entre el parlante y la habitación. (La adaptación de impedancias se discutirá en el Cap. 5.) En cualquier caso, la salida de audio está dada por

$$\begin{aligned} P &= I \cdot (\text{área}) = (100)I_0 \cdot 10^5 = 10^7 \mu\text{w.} \\ &= 10 \text{ vatios.} \end{aligned}$$

10 vatios es una salida de audio común en los conjuntos de alta fidelidad.

Aplicación: Suma de dos sonidos dolorosamente cercanos

Supongamos que una persona puede soportar escasamente el dolor de intensidad $100I_0$ de A440 cps, pero no puede soportar el dolor de $200I_0$ a la misma frecuencia. Supongamos que también es así para C512 cps. ¿Qué sucede si ambas notas suenan al mismo tiempo? La intensidad total es ahora $200I_0$. ¿Puede soportarlo? No lo sabemos, pero podemos hacer una conjetura.

Esperamos haberle convencido de que ahora está ya preparado para contestar algunas preguntas interesantes con respecto a sonido. Asimismo hemos discutido ondas sonoras estacionarias, pero se comportan exactamente como las ondas estacionarias longitudinales en un resorte muy extensible. Por consiguiente, no le será difícil entender los Experimentos caseros de sonido si los considera ahora.

Ejemplo 11: Ondas de propagación en una línea de transmisión pasabajos

En la Fig. 4.11 se muestra el sistema para este importante ejemplo. La fuerza motriz es la tensión $V(t)$ aplicada en $z = 0$. Consideraremos solamente el límite de longitud de onda larga (es decir, el límite continuo), donde $V(z,t)$ e $I(z,t)$ son funciones continuas de z . Si la línea de transmisión es infinitamente larga (o termina en un material perfectamente absorbente), tenemos un sistema abierto que transporta ondas de propagación de tensión $V(z,t)$ y corriente $I(z,t)$. Si la tensión impulsora $V(t)$ en el terminal de entrada tiene la forma

$$V(t) = V_0 \cos \omega t, \quad (120)$$

entonces la onda de tensión $V(z,t)$ debe ser igual a $V_0 \cos \omega t$ en $z = 0$, y por lo tanto está dada por

$$V(z,t) = V_0 \cos (\omega t - kz). \quad (121)$$

Deseamos encontrar la relación entre $V(z,t)$ e $I(z,t)$. Veremos que (para una onda de propagación) éstos son proporcionales entre sí (y no, por ejemplo, ± 90 grados fuera de fase). Anticiparemos este resultado escribiendo

$$I(z,t) = I_0 \cos (\omega t - kz) + J_0 \sin (\omega t - kz) \quad (122)$$

donde, como veremos, la constante J_0 tiene valor cero.

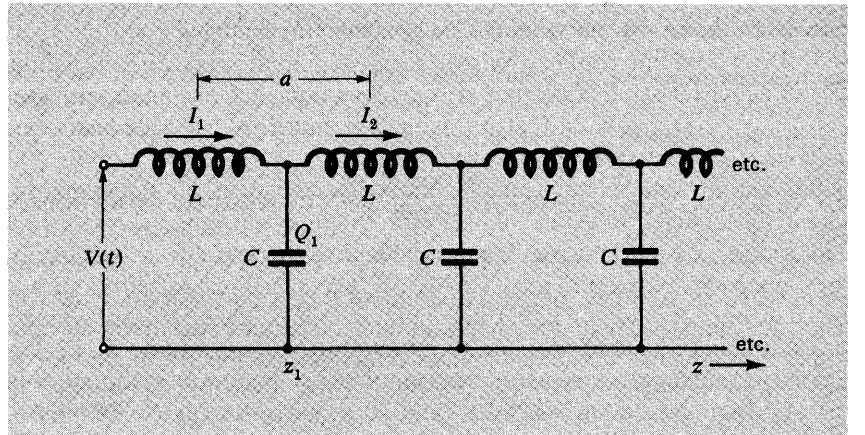


Fig. 4.11 Emisión de ondas en una línea de transmisión.

Consideremos el primer capacitor de la Fig. 4.11. Tiene una carga $Q_1(t)$, la cual corresponde a una diferencia de potencial $V_1(t)$, donde

$$Q_1(t) = CV_1(t) = CV(z_1, t). \quad (123)$$

Entonces

$$\begin{aligned} C \frac{\partial V(z_1, t)}{\partial t} &= \frac{dQ_1}{dt} \\ &= I_1 - I_2 \\ &= -(I_2 - I_1) \\ &= -a \frac{\partial I(z_1, t)}{\partial z}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la aproximación continua. Así

$$\frac{\partial V(z_1, t)}{\partial t} = -\left(\frac{C}{a}\right)^{-1} \frac{\partial I(z_1, t)}{\partial z}. \quad (124)$$

Insertando las ecuaciones (121) y (122) en la (124), vemos que la constante J_0 de la ecuación (122) debe ser cero. Los términos restantes dan

$$-\omega V_0 \sin(\omega t - kz) = -\left(\frac{C}{a}\right)^{-1} I_0 k \sin(\omega t - kz),$$

es decir,

$$V_0 = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\phi} I_0, \quad (125)$$

de donde

$$V(z, t) = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\phi} I(z, t) \equiv ZI(z, t), \quad (126)$$

por definición de Z . Así, la velocidad de fase [ver Sec. 4.2, ec. (48)] y la impedancia característica están dadas (en el límite de longitud de onda larga, o caso continuo, o límite de "parámetros distribuidos") por

$$v_\phi = \sqrt{\frac{(C/a)^{-1}}{(L/a)}}, \quad (127)$$

$$Z = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\phi} = \sqrt{\left(\frac{L}{a}\right)\left(\frac{C}{a}\right)^{-1}}. \quad (128)$$

La potencia de salida instantánea del transmisor en $z = 0$ está dada por

$$P(t) = V(t)I(t) = V(0, t)I(0, t) = ZI^2(0, t). \quad (129)$$

Alternativamente, $P(t)$ está dada por

$$P(t) = V(0,t)I(0,t) = \frac{V^2(0,t)}{Z}. \quad (130)$$

Obsérvese que pudimos haber obtenido Z simplemente substituyendo C^{-1} por K y L por M en los resultados para oscilaciones longitudinales de masas en resortes. A raíz de la importancia de este ejemplo lo consideramos con todo detalle.

Ejemplo 12: Línea de transmisión de placas paralelas

Este importante ejemplo nos llevará a resultados de gran generalidad. De acuerdo con las ecuaciones (55) y (59), Sección 4.2, la capacidad por unidad de longitud y la inductancia por unidad de longitud para la línea de transmisión de placas paralelas (con vacío entre las placas) son

$$\frac{C}{a} = \frac{w}{4\pi g}, \quad \frac{L}{a} = \frac{4g}{wc^2}, \quad (131)$$

donde w es el ancho y g la distancia entre placas. De esta manera, la impedancia característica es [véase ec. (128)]

$$Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w}. \quad (132)$$

(Donde las unidades de Z son statvoltio/statamperio, es decir, statohmio.) La potencia irradiada $P(t)$ está dada por la ecuación (130) que queda

$$P(t) = \frac{1}{Z} V^2(0,t) = \frac{c}{4\pi} \frac{w}{g} V^2(0,t). \quad (133)$$

Expresemos la potencia irradiada en función de la única componente no nula del campo eléctrico E_x , la cual está definida en todo punto entre las placas en lugar de hacerlo en función de la diferencia de potencial $V(0,t)$, que es la integral del campo eléctrico (uniforme) a través de la abertura g :

$$V(0,t) = gE_x(0,t). \quad (134)$$

Entonces la ecuación (133) queda

$$P(t) = \frac{c}{4\pi} (wg) E_x^2(0,t). \quad (135)$$

Obsérvese que wg es el área transversal del extremo de la línea de transmisión. Si dividimos la potencia irradiada por wg , tenemos la intensidad irradiada (en erg/cm² seg). No vamos a designar esta intensidad por la letra I , dado que hasta ahora la reservamos para la corriente. En cambio, vamos a usar el símbolo comúnmente utilizado para ondas electromagnéticas, S . A partir de nuestra experiencia con cuerdas y con ondas sonoras, sabemos que podemos escribir la intensidad en la onda reemplazando simplemente $z=0$, por la posición general z . Así, para una onda plana de una radiación electromagnética propagándose en la dirección $+z$ en una línea de transmisión de placas paralelas, la energía por centímetro cuadrado por unidad de tiempo que pasa por un punto z está dada por la intensidad

$$S(z,t) = \frac{c}{4\pi} E_x^2(z,t). \quad (136)$$

Busquemos ahora el cociente entre la única componente no nula del campo magnético $B_y(z,t)$ y la componente del campo eléctrico $E_x(z,t)$. Podemos encontrar este cociente porque hemos encontrado que el cociente entre $V(z,t)$ y $E(z,t)$ es la constante Z , y porque ahora sabemos cómo relacionar V con E_x e I con B_y . De esta manera obtenemos

$$V = ZI$$

es decir,

$$gE_x = \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w} I. \quad (137)$$

Pero de acuerdo con la ecuación (57), Sección 4.2, es

$$wB_y = \frac{4\pi}{c} I. \quad (138)$$

Comparando las ecuaciones (137) y (138), encontramos que, para una onda plana de radiación electromagnética propagándose en la dirección $+z$, en una línea de transmisión de placas paralelas, los campos eléctrico y magnético en todo z y t son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación, son iguales en magnitud y tienen signos algebraicos tales que el producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ está en la dirección de propagación. Resumiendo,

$$E_x(z,t) = B_y(z,t). \quad (139)$$

Ondas electromagnéticas planas en medios transparentes. Supongamos que la línea de transmisión se llena con un material que tiene constante

dieléctrica ϵ y permeabilidad magnética μ . El potencial aplicado es $V(t)$. Entonces, podemos escribir la potencia irradiada

$$P(t) = \frac{V^2}{Z},$$

donde

$$V = gE_x,$$

y

$$Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} Z_{\text{vacío}},$$

es decir,

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w}. \quad (140)$$

Estas tres ecuaciones dan la intensidad $S = P/gw$:

$$S(z,t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{c}{4\pi} E_x^2(z,t). \quad (141)$$

Hagamos también el cociente entre B_y e E_x . Para una corriente dada I , el campo magnético es mayor en un factor μ de lo que sería si no estuviese presente el material transparente. De esta manera

$$wB_y = \mu \frac{4\pi}{c} I.$$

Pero

$$V = ZI,$$

es decir,

$$gE_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w} I.$$

Comparando estas expresiones para E_x y B_y obtenemos

$$\frac{B_y}{E_x} = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

o sea,

$$B_y = \sqrt{\epsilon\mu} E_x = nE_x. \quad (142)$$

Ondas electromagnéticas planas en vacío no acotado. Los resultados dados para vacío por las ecuaciones (136) y (139),

$$S(z,t) = \frac{c}{4\pi} E_x^2(z,t), \quad B_y(z,t) = E_x(z,t), \quad (143)$$

fueron derivados para las ondas electromagnéticas (ondas de variación del campo eléctrico y campo magnético) que resultan de las ondas de corriente potencial, de una línea de transmisión rectilínea y paralela. Ahora, no es sólo una línea de transmisión rectilínea y paralela, sino también uniforme (suponiendo que no hay efectos de borde). Los campos eléctrico y magnético $E_x(z,t)$ y $B_y(z,t)$ son también uniformes: mientras que se considere un punto entre las placas y mientras que el ancho w sea lo suficientemente grande como para que el efecto de borde sea despreciable. E_x tiene el mismo valor para todas las posiciones posibles de x e y (para una posición fija z al tiempo t); B_y es similarmente independiente de x e y . Tales ondas se llaman *ondas planas*. Cualquier plano perpendicular al eje z (el eje de propagación de las ondas) en un plano de fase constante, es decir, un plano en el cual el valor de $\omega t - kz$ es constante. Estos planos se llaman *frentes de onda*.

Ahora bien, hay más de una manera de obtener ondas electromagnéticas de propagación. Una forma es la que acabamos de estudiar, usando una línea de transmisión de placas paralelas. Otra manera de obtener ondas de propagación, que son aproximadamente planas, es alejarnos mucho de una “fuente puntual” de radiación electromagnética, tal como una vela, un farol de alumbrado o una estrella. (En un capítulo posterior veremos cuán pequeña debe ser la fuente para que sea una aproximación suficientemente buena llamarla “puntual”.) En esta situación, toda la radiación en el entorno del observador está viajando esencialmente en la misma dirección, siempre que no se tome una zona demasiado grande en la dirección transversal a la dirección de propagación (aproximada). (Veremos más tarde cuán grande puede ser el entorno. Esto depende, usualmente, del tipo de experiencia que se tenga *in mente*.) Resulta (como le parecerá plausible ahora y como demostraremos usando las ecuaciones de Maxwell en un capítulo posterior) que los resultados de la ecuación (143) son propiedades “locales” de las ondas electromagnéticas planas y no dependen de las condiciones de contorno, es decir, de la corriente y de la configuración de las cargas que irradian las ondas. Por supuesto, el hecho de que suceda que \mathbf{E} está a lo largo de \hat{x} depende de las condiciones de contorno que especificamos en nuestra disposición de la línea de transmisión de placas paralelas. Por lo tanto, expresaremos estos importantes resultados generales en un forma más general que la ecuación (143). Lo haremos ahora:

Una onda electromagnética plana que viaja en el vacío en la dirección $+z$ tiene las siguientes propiedades (las cuales no son todas independientes):

1. $\mathbf{E}(z,t)$ y $\mathbf{B}(z,t)$ son perpendiculares a \hat{z} y entre sí.
2. La magnitud de $\mathbf{E}(z,t)$ es igual a la magnitud de $\mathbf{B}(z,t)$.

3. Las direcciones de $\mathbf{E}(z,t)$ y $\mathbf{B}(z,t)$ son tales que $\mathbf{E}(z,t) \times \mathbf{B}(z,t)$ está a lo largo de $+\hat{z}$.
4. Las primeras tres propiedades implican que $\mathbf{B}(z,t) = \hat{z} \times \mathbf{E}(z,t)$, lo cual es equivalente a las relaciones $B_y(z,t) = E_x(z,t)$ y $B_x(z,t) = -E_y(z,t)$.
5. La velocidad de fase es c , independientemente de la frecuencia; es decir, las ondas electromagnéticas en el vacío no son dispersivas.
6. La intensidad instantánea (en unidades de $\text{erg/cm}^2 \text{ seg}$) está dada por

$$S(z,t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2(z,t) = \frac{c}{4\pi} [E_x^2(z,t) + E_y^2(z,t)]. \quad (144)$$

Algunos sinónimos usuales para esta cantidad son intensidad, flujo y flujo de energía.

Las relaciones anteriores son muy importantes y, hasta donde se sabe, completamente generales. Se cumplen para todas las frecuencias desde (digamos) $\nu = 1$ ciclo en 100 000 años (que corresponde a una longitud de onda de 100 000 años luz, aproximadamente el diámetro de nuestra galaxia) hasta frecuencias de (digamos) $\nu \approx 3 \times 10^{25}$ Hz, correspondientes a una longitud de onda c/ν de 10^{-15} cm o una “energía de fotón” $h\nu$ de alrededor de 100 BeV (1 BeV = 10 electronvolts). (Deben usarse diferentes unidades en los distintos rangos de frecuencia.)

Aplicación: Búsqueda de la constante solar

Experimento casero

Éste es un ejemplo numérico que ilustra el flujo de energía. (Se trata de una combinación de experimento casero y cálculo. Esperamos que haga el experimento.)

Problema: Determinar la media cuadrática del campo eléctrico de una onda electromagnética de luz solar común en la superficie terrestre.

Solución: (Dado que es un experimento real, haremos varias aproximaciones y suposiciones a lo largo de la resolución. La respuesta estará, por lo tanto, llena de especificaciones, como sucede con la mayoría de los resultados experimentales.) Tomemos una lámpara de incandescencia de 200 ó 300 vatios que tenga una envoltura de vidrio transparente y un filamento de una longitud de una pulgada o menos. Encendámosla. Cierre los ojos. Acerque el bulbo incandescente a su rostro. Utilice sus ojos como detector *con los párpados cerrados como filtro*. Sus párpados detectan algo del infrarrojo invisible; se sienten tibios. Sus ojos, cubiertos por los párpados como filtro, ven un tono “rojizo” debido a la luz que atraviesa el filtro. Ahora apague la luz y vaya al exterior (suponiendo que sea un día de sol). “Mire” *con los ojos cerrados* al sol. Espere la sensación de tibieza en sus párpados y el color “rojizo” como el “visto” a través de sus párpados. Vuelva a la luz eléc-

trica. Mida la distancia R desde los párpados al filamento para la cual la intensidad, juzgada por sus detectores, es la misma que la del sol.

El experimento ha terminado y el resto es meramente aritmético. Utilice la potencia promedio P de la lámpara y la distancia R para calcular el flujo sobre sus párpados, suponiendo que la lámpara irradia con la misma fuerza en todas direcciones. Entonces la respuesta (en unidades mixtas) es que la intensidad sobre sus párpados, promediada en el tiempo es

$$\langle S(z,t) \rangle \equiv S = \frac{P}{4\pi R^2}. \quad (145)$$

Entonces, ésta es también la intensidad promediada en el tiempo de la luz del sol sobre sus párpados, al menos en el rango de colores que pueda detectar (incluyendo algo de infrarrojo detectado por sus párpados). Suponiendo que el “espectro” de colores de la lámpara y el del sol no son demasiado diferentes, podemos esperar que el flujo *total* del sol, incluyendo el ultravioleta que presumiblemente no es detectable con esta técnica, está dado por la ecuación (145). S es la llamada “constante solar” y figura en el *Handbook of Physics and Chemistry*. Allí encontrará que S es igual a 1,94 “pequeñas calorías” por centímetro cuadrado por minuto. Para convertir las unidades, utilicemos el hecho de que 1 pequeña caloría = 4,18 julios y que 1 julio/seg = 1 vatio. De acuerdo con el *Handbook*, la constante solar *al final de la atmósfera terrestre* es

$$S = \frac{(1,94)(4,18) \text{ joule}}{60 \text{ s}} = 135 \text{ milivatio/cm}^2. \quad (146)$$

Suponiendo que el valor usado es del *Handbook*, ecuación (146) ¿cuál es el valor cuadrático medio del campo eléctrico en voltios/cm?

$$S = 0,135 \times 10^7 \text{ erg/cm}^2 \text{ s} = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle,$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{(12,57)(0,135 \times 10^7)}{3 \times 10^{10}} = 5,6 \times 10^{-4},$$

$$E_{\text{rom}} = \langle E^2 \rangle^{1/2} = 2,4 \times 10^{-2} \text{ ues} = 2,4 \times 10^{-2} \text{ statvolt/cm}.$$

Pero

$$1 \text{ statvolt} = 300 \text{ voltios}$$

de esta forma

$$E_{\text{rom}} = 7,2 \text{ volt/cm}. \quad (147)$$

Obsérvese que, dado que todas nuestras fórmulas están en unidades ues y CGS, debe convertirse de CGS a ues, obtener la respuesta y luego convertir a las unidades que sean necesarias.

Medición del flujo de energía de radiación electromagnética. En el ejemplo dado, sus ojos y párpados fueron usados para determinar la constante solar en la superficie terrestre. Sus ojos y los sensores de calor de sus párpados son típicos de muchos detectores de radiación, en el sentido que éstos detectan la media cuadrática; responden a la intensidad incidente pero son insensibles a la información de fase. (Éste es también el caso de la detección de sonido mediante sus oídos.) Entonces, la propiedad adecuada para describir el flujo incidente no es el valor instantáneo de $S(z,t)$, sino que es más apropiado su promedio temporal, sobre un ciclo de oscilación

$$S \equiv \langle S(z,t) \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2(z,t) \rangle. \quad (148)$$

(Para una onda plana, esta intensidad promediada en el tiempo es independiente de la posición z .)

Un detector cuadrático típico consiste en un filtro pasabanda, (usado para pasar radiación de la frecuencia deseada y excluir otra radiación de “fondo”) seguido de un “elemento sensible” que absorbe todo el flujo incidente sin pérdidas (por reflexión) y da una “señal de salida” proporcional a (o al menos dependiente de) la cantidad de energía absorbida. Una gran cantidad de tales detectores usan un *calorímetro*, como elemento sensible a la absorción de energía. La cantidad de energía absorbida por unidad de tiempo es determinada midiendo la variación del aumento de temperatura en algún material absorbente o midiendo el exceso de temperatura del elemento sensible, en equilibrio, con una envoltura normal (que puede ser algo muy reproducible y muy frío, como helio líquido), con el equilibrio mantenido por una pérdida de calor constante, entre el elemento sensible y la envoltura. Tal detector debe tener incluido un dispositivo de calibración, donde se pueda (por ejemplo) excluir temporalmente la radiación externa y en cambio conectar una corriente a través de una resistencia común, contenida en el elemento sensible. La potencia disipada por la resistencia es fácilmente medible, midiendo la corriente y la caída de potencial y debe igualar la potencia absorbida de la radiación, la cual da el mismo exceso de temperatura. Existen muchos refinamientos ingeniosos de este método.

Otra clase de detectores son los *contadores de fotones*. Un tubo fotomultiplicador es un contador de fotones. Cada vez que el “fotocátodo” de un fotomultiplicador absorbe un fotón, se produce un “fotoelectrón”. Este fotoelectrón es entonces acelerado a través de un potencial de alrededor de 100 voltios a un “dinodo multiplicador”, donde un fotoelectrón produce 3 ó 4 electrones secundarios. Éstos son acelerados a un segundo dinodo, donde cada uno produce 3 ó 4 electrones más, etc. Finalmente, después de unos diez pasos de amplificación de este tipo, es decir, después de 10 dinodos, se tienen alrededor de $(3,5)^{10}$

electrones por cada fotón incidente, los cuales son entonces colectados por una “placa colectora” o ánodo. Éstos son pasados a través de una resistencia, dando un pulso de potencial. Los pulsos son registrados y pueden ser contados. Cada pulso corresponde a la absorción de *exactamente un fotón que tiene una energía electromagnética $h\nu$* , donde ν es la frecuencia de oscilación, y h es la constante de Planck. Para una frecuencia dada ν , la *eficiencia de detección $e(\nu)$* del fotomultiplicador puede ser determinada usando alguna fuente de radiación normal. Entonces, la *velocidad de conteo promedio R* (en cuentas por segundo), promediadas sobre algún intervalo de tiempo t_0 , está dada por el número de cuentas observados N , dividido por el tiempo t_0 :

$$R = \frac{N \pm \sqrt{N}}{t_0}, \quad (149)$$

donde la “desviación normal” del número de cuentas, estimación convencional de la incertidumbre estadística en la medición, se toma como la raíz cuadrada del número de cuentas. La cantidad medida R es usada para determinar el flujo de energía en erg/cm² seg por la relación

$$R = \left(\frac{S}{h\nu} \right) A e(\nu) = \frac{1}{h\nu} \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2(z, t) \rangle A e(\nu), \quad (150)$$

donde A es el área del fotocátodo (en cm²), S es la intensidad promediada en el tiempo, es decir, el flujo de energía (en erg/cm² seg), $S/h\nu$ es el *flujo de fotones* promediado en el tiempo, en fotones/cm² seg, y $e(\nu)$ es la eficiencia de detección. La eficiencia de detección es la probabilidad de que un fotón incidente en el fotocátodo sea absorbido, produciendo un fotoelectrón. Las eficiencias de detección típicas para fotomultiplicadores están en un rango entre 1 y 20 %.

Un ejemplo de un detector que *no* sigue una ley cuadrática, es una antena receptora, un circuito resonante sintonizado alimentado por el potencial inducido en la antena (por las ondas provenientes de un transmisor distante), un amplificador y un osciloscopio. La señal del osciloscopio muestra la fase instantánea de la radiación incidente, así como su intensidad, es decir, da una señal proporcional al campo eléctrico instantáneo en la antena, en lugar del cuadrado del campo eléctrico promediado en el tiempo. Es posible medir la fase y la onda electromagnética con seguridad ilimitada sólo si se tiene un número de fotones tan enorme que no se pueda distinguir las cuentas de los fotones individuales. De esta manera puede “describirse” el campo eléctrico como una función del tiempo por la absorción de un gran número de fotones durante cada “instante”. No es posible determinar la constante de fase φ de un solo fotón en una onda luminosa descrita por $E_x = A \cos(\omega t - kz + \varphi)$.

Intensidades normales para luz visible — potencia en candelas. El “Bureau of Standards” (EE. UU.), es guardián de la llamada “candela normal”. Su brillo es aproximadamente el de una candela común. Una *candela normal* tiene, por definición, una potencia de salida total, emitida en todas direcciones de alrededor de 20,3 milivatios de luz visible (tomados en una frecuencia en el pico de visibilidad, alrededor de 5560 Å):

$$1 \text{ cd} = 1 \text{ candela} = 20 \text{ milivatios de luz visible} \quad (151)$$

Brillo superficial. Cada parte de la superficie radiante de la llama de una vela, irradia luz en todas direcciones. Cuando se mira la llama de una vela, ésta parece uniformemente brillante en toda su superficie. También parece tan “brillante” cuando se la mira de cerca como cuando se la mira desde lejos. Igualmente se cumple para la luna, o un trozo de papel blanco. Esto es aproximadamente cierto para la superficie de una lámpara incandescente con envoltura esmerilada. El “brillo superficial” se define como la energía de luz visible que escapa por unidad de área por unidad de tiempo. Puede ser medido en vatios de luz visible por unidad de área o en candelas por unidad de área. Una llama de vela ordinaria tiene un área superficial de alrededor de 2 cm² y una salida total de alrededor de una candela. Así, el brillo superficial de una vela está dado por

$$\text{Brillo superficial de la vela} \approx \frac{1 \text{ cd}}{2 \text{ cm}^2} = 0,5 \text{ cd/cm}^2. \quad (152)$$

Una lámpara incandescente ordinaria, de 40 vatios, 115 voltios, con filamento de tungsteno, tiene una *eficiencia luminosa absoluta* de alrededor de 1,8 % (de acuerdo con el *Handbook of Physics and Chemistry*, bajo “cantidades fotométricas”; por comparación, una lámpara de 100 vatios tiene una eficiencia de alrededor de 2,5 %). Esto significa que alrededor del 1,8 % de los 40 vatios disipados como “pérdida I^2R ” en el filamento, emerge como radiación visible. Gran parte del resto es radiación invisible. (Una pequeña cantidad es perdida también por conducción en la base de la lámpara a través de la entrada al filamento. Algo del infrarrojo se absorbe en la envoltura de vidrio, como demuestra el hecho de que la envoltura de vidrio se calienta mucho — aun en una envoltura de vidrio claro, que es casi perfectamente transparente a la radiación visible.)

Estimemos el brillo superficial de una lámpara de 40 vatios. (Podemos comparar nuestros resultados con el tabulado en el *Handbook*, 2,5 cd/cm².) Nuestro bulbo tiene un diámetro aproximado de 6 cm. Si encendemos la lamparilla y la miramos, vemos que, en oposición a la luna, no es uniformemente brillante sobre el área proyectada. Es casi uniformemente brillante cerca del centro, pero sufre un crecimiento

repentino en brillo en un radio correspondiente al “ancho total del brillo semimáximo” de un diámetro de alrededor de 2 cm; es decir, tiene la apariencia de la proyección de una superficie esférica de 2 cm de diámetro, de brillo aproximadamente uniforme. El brillo superficial de esta esfera “efectiva” es la potencia visible dividida por la superficie. El área es $4\pi r^2 = 4\pi = 12,6 \text{ cm}^2$. La potencia visible es 40 vatios multiplicados por la eficiencia, 0,0176. Expresando la respuesta en candelas por centímetro cuadrado, cd/cm^2 , donde 1 cd/cm^2 es 20 milivatios/ cm^2 , encontramos

Brillo superficial de una lámpara de 40 vatios igual a

$$\frac{(40)(0,0176)}{(12,6)(20 \times 10^{-3})} = 2,8 \text{ cd}/\text{cm}^2. \quad (153)$$

El valor dado en el *Handbook* es $2,5 \text{ cd}/\text{cm}^2$.

La “opacidad” de una lámpara opaca ordinaria (la clase considerada arriba) consiste en un despulido de la superficie interior. Otro tipo común de bulbo es el “opalino”. Contrariamente a lo que ocurre con una lámpara despulida, una “opal” da una proyección más uniformemente brillante. Se ve como la luna, pero más brillante.

¿Por qué la luna no se ve más brillante cuando está más cerca? Veamos por qué el brillo superficial aparente de algo que emite luz en todas las direcciones, como un pedazo de papel blanco (o la luna, o el sol, o el cielo azul) no depende de lo lejos que se encuentre el observador de la superficie. Supongamos que miramos una pared que está completamente cubierta con lámparas incandescentes, con envolturas “opalinas”. Sea D la densidad de lámparas en la superficie, medida en lámparas por unidad de área de pared. Por definición, el brillo superficial de la pared es el mismo que el de una lámpara sola. Ahora, la sensación visual de brillo depende de la cantidad de energía luminosa de la fuente que entra en el ojo dentro de un “cono normal”, con su ápice en el ojo y con una cierta apertura angular. De esta manera, se “mira” sólo una pequeña parte de una superficie brillante en cualquier instante, y la sensación de brillo que se tiene depende de la energía que entra en el ojo de la parte de superficie interceptada por el cono normal. Supongamos que la distancia desde el ojo a la pared es R , y además que se “mire” un área ΔA de la pared. El ángulo sólido $\Delta\Omega$ subtendido hasta el ojo por el área ΔA está definido como

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{R^2}, \quad (154)$$

donde el área ΔA se toma como el área proyectada perpendicular a la línea de mirada, y donde se supone que ΔA es pequeña, tal que cual-

quier dimensión lateral de la región ΔA es muy pequeña comparada con R . Un ángulo sólido dado $\Delta\Omega$, constante, corresponde a un cono de ápice angular dado. La *sensación de brillo es proporcional a la energía que entra en el ojo a partir de algún ángulo sólido pequeño y constante* (es decir, un cono dado) subtendido hasta el ojo por una parte de la superficie. El número N de lámparas luminosas que están dentro del cono constante, de ángulo sólido $\Delta\Omega$ es la densidad D de lámparas multiplicado por el área ΔA

$$N = D \Delta A = D \Delta\Omega \cdot R^2. \quad (155)$$

Supongamos ahora que nos alejamos de la pared con lámparas luminosas. Como D y $\Delta\Omega$ son constantes, el número N de lámparas luminosas que se ve es proporcional a R^2 . Sin embargo, la intensidad aportada a su sensación de brillo por una sola lámpara es $1/R^2$ porque la potencia P de cada lámpara (en erg/seg) se distribuye uniformemente sobre un área $4\pi R^2$. Estas dos tendencias se compensan entre sí. El número de lámparas N que contribuyen por $1/R^2$ es constante. De esta manera la intensidad luminosa S (en erg/cm² seg) que llega al ojo proveniente de un cono de ángulo sólido fijo $\Delta\Omega$, es constante:

$$S \text{ (en el ojo)} = \frac{NP}{4\pi R^2} = D \frac{\Delta\Omega}{4\pi} P. \quad (156)$$

Así, la pared de lámparas luminosas se ve igualmente “brillante” tanto si se está cerca como lejos de ella, como sucede con un trozo de papel blanco.

En la discusión anterior, supusimos que la línea de observación era perpendicular a la pared de lámparas luminosas. Supongamos ahora que la pared está en un ángulo algo grande con respecto a la línea de observación. Debe argüirse entonces que, dado que son interceptadas más lámparas por el cono de ángulo sólido constante, la superficie debe verse más brillante dado que está inclinada. Sin embargo, éste no es el caso. Las lámparas luminosas son objetos tridimensionales esféricos. Cuando se mira la pared inclinada, las lámparas oscurecen parcialmente unas a otras. Si se toman dos lámparas despulidas brillando (u opalinas) y oscurecemos parcialmente (o totalmente) una de ellas, no hay contribución luminosa de la lámpara oscurecida. El área de “superposición” proyectada, no es más brillante que la proyección de una sola lámpara.

Cuando una lámina de papel blanco, o una superficie espolvoreada con sal, o azúcar, o la superficie de la luna está alumbrada por la iluminación del cuarto o del sol, el material es iluminado hasta una profundidad considerable. La luz que emerge de la superficie ha sido dispersada muchas veces. El efecto neto es una superficie que reemite luz, de una forma algo así como una pared de muchas láminas, cubierta de lámparas luminosas opacas. Para ver que gran parte de la luz emergente

proviene de una considerable profundidad, puede extenderse una lámina de papel esponjoso blanco sobre su superficie oscura. Agregando luego una segunda lámina, una tercera, etc. Los papeles se ven más y más “blancos” mientras más láminas se le agregan.

Iluminación — candela - pie. La intensidad luminosa total (en erg/cm^2 seg) recibida en un lugar dado, se denomina a veces *iluminación*. La iluminación es proporcional al brillo superficial de la fuente y al ángulo sólido total, subtendido entre el lugar y la fuente. Por ejemplo, si la luna fuese de un diámetro doblemente mayor, su brillo superficial no cambiaría (dado que éste se debe a su iluminación por el sol). Sin embargo, el ángulo subtendido será cuatro veces el (primer) ángulo sólido, y el flujo luminoso S sobre la tierra será cuatro veces mayor. La iluminación aportada por una candela normal a una distancia de un pie se llama *candela-pie*. Es fácil demostrar a partir de la ecuación (151) que

$$1 \text{ candela-pie} \approx 1,8 \mu\text{w}/\text{cm}^2 \text{ (de luz visible)} \quad (157)$$

De acuerdo con la Tabla 4.3, que da algunos valores típicos de brillo superficial para varias superficies interesantes, una candela es aproximadamente tan brillante como el cielo. Esto significa que si se sostiene una candela con el cielo como fondo, será difícil ver la llama de la candela. Por supuesto, el color es diferente: la candela es amarilla, el cielo es azul.

Aplicación: Comparación entre una lámpara de 40 vatios y la luna

Éste es un ejemplo numérico: ¿A qué distancia deberá estar una lámpara de 40 vatios, de diámetro “efectivo” de 2 cm, para proveer la misma iluminación que toda la luna? De acuerdo con la Tabla 4.3, la lámpara tiene una superficie 10 veces más brillante que la luna llena. Para producir la misma iluminación, deberá subtender un ángulo sólido de $1/10$ del subtendido por la luna, es decir, debe subtender $1/\sqrt{10} = (1/3,2)$ veces el diámetro angular ordinario de la luna. El diámetro angular de la luna es de alrededor de $\frac{1}{2}$ cm a un brazo de 50 cm de longitud, el cual es $1/100$ radianes. Por lo tanto, la lámpara necesita subtender un diámetro angular de $1/320$ radianes. Así, $(1/320) = 2 \text{ cm}/R$; $R = 2(320) = 640 \text{ cm} = 6,4 \text{ metros}$. Por supuesto, 6,4 metros debe ser la distancia para “luz de luna llena” para *cualquier* lámpara de 40 vatios, sea opaca, o no. Una lámpara no opaca se verá más brillante pero producirá la misma iluminación.

Aplicación: Satélite especular a modo de luna

Supongamos que labriegos de Kansas y parte de Nebraska, que viven en una región granjera de un diámetro de 330 kilómetros (la longitud de Kansas de este a oeste), quieran arar sus campos de noche, con la

Tabla 4.3 Brillo superficial

Superficie	Brillo superficial candela/ cm^2
Candela	0,5
Lámpara opaca de 40 vatios	2,5
Cielo despejado	0,4
Luna	0,25
Sol	160 000
Lámpara no opaca de 40 vatios (con fi- lamento)	200

EXTRAÍDO DE: *Handbook of Chemistry and Physics*, ed. 48. (Chemical Rubber Co., Cleveland, publicación anual), en “cantidades fotométricas”.

luz de la luna llena *durante todo el mes*. El Departamento de Agricultura da con la solución: un satélite terrestre hecho con plástico hinchable en forma de un disco circular y con una superficie altamente reflectante. Si los granjeros quisiesen luz equivalente a pleno sol, el satélite especular más pequeño para hacer el trabajo debería ser un espejo plano que tuviese el tamaño del área de la región granjera de Kansas y Nebraska. Esto sería imposible con la tecnología de satélites actual. Pero estos labriegos quieren solamente luz de luna llena. De acuerdo con la Tabla 4.3, la luna es 640 000 veces menos brillante que el sol. O sea, los granjeros quieren 64×10^4 veces menos intensidad que la dada por el sol. Por lo tanto, el satélite especular puede tener un área 64×10^4 veces menor que la región granjera e interceptar aún suficiente luz solar para satisfacer a los labradores. (En lugar de ser un espejo plano, el espejo deberá ser ligeramente divergente tal que pueda esparcir la luz del sol sobre la región de labranza.) De esta manera, el diámetro del espejo puede ser 8×10^3 veces menor que el diámetro de la región. Por lo tanto, el diámetro requerido es de $330 \text{ km}/800 = 410$ metros. ¡Esto es factible!

Problemas y experimentos caseros

4.1 El extremo de una cuerda en $z = 0$ es alimentado armónicamente por una frecuencia de 10 cps y con una amplitud de 1 cm. El extremo más alejado de la cuerda está en el infinito (o en cambio, la cuerda “termina” de forma tal que no hay reflexiones). La velocidad de fase es 5 metros/seg. Describir (exactamente) el movimiento de un punto de la cuerda, situado a 325 cm del extremo excitado. ¿Cuál es el movimiento de un segundo punto localizado a 350 cm de dicha terminal?

4.2 La velocidad de fase v_ϕ fue introducida para describir ondas de propagación. Esta satisface $v_\phi = \lambda \nu$. También sabemos lo que λ y ν significan para ondas estacionarias; por lo tanto podemos encontrar v_ϕ estudiando ondas estacionarias en lugar de ondas de propagación.

(a) Dada una cuerda de piano de 1 metro y con una frecuencia A440 (440 cps) para su modo más bajo, encontrar la velocidad de fase.

(b) Demostrar que para una cuerda de violín o piano, fija en ambos extremos, el período T del *modo más bajo* está dado por el tiempo “de ida y vuelta” requerido para que un pulso viaje desde un extremo al otro de la cuerda y vuelva al primer extremo, viajando siempre con la velocidad de fase. ¿Cuáles son los períodos de los modos superiores?

(c) Explicar el resultado del punto (b) pensando en el sonido del martillo del piano cerca de un extremo de la cuerda, generando un “paquete de ondas” o “pulsación” que se propaga hacia ambos lados a la velocidad de fase. Piense en el análisis de Fourier de la *dependencia en el tiempo* para el movimiento de cualquier punto fijo en la cuerda. Es necesario solamente, el tipo de análisis de Fourier estudiado en el Capítulo 2.

(d) Considerar una cuerda fija en $z = 0$ y libre en $z = L$. Demostrar que el período del modo más bajo es igual al tiempo que tarda la pulsación en ir de una punta a otra y volver *dos veces* a la velocidad de fase. Puede explicar, de una manera simple, ¿por qué este resultado es tan diferente del de la parte (b)? ¿Por qué debe la pulsación realizar dos viajes?

4.3 Supongamos que la cuerda de piano estudiada en la parte (a) del Prob. 4.2 tiene un diámetro de 1 mm y está hecha con acero, teniendo una densidad de $7,9 \text{ g/cm}^3$. Encontrar la tensión en dinas y en libras ($980 \text{ dinas} = 1 \text{ g-peso}$; 1 kg pesa 2,2 libras).

Respuesta: alrededor de 1100 lbs.

4.4 Velocidad de fase para ondas en un resorte muy extensible. (a) Medir la velocidad de fase mediante el método descrito en el Prob. 4.2, es decir, usando ondas estacionarias.

(b) *Cálculo:* Demostrar "teóricamente" que la velocidad de fase de un resorte muy extensible ("slinky") (consistente en un número fijo de vueltas, es decir, una cantidad fija de materia real) es proporcional a la longitud del resorte. Así, si se dobla la longitud estirándola, la velocidad de fase aumenta en un factor 2.

(c) Verificar esto experimentalmente, usando ondas estacionarias como en la parte (a).

(d) Enviar una "pulsación" corta o un "paquete de ondas" a lo largo del resorte. Al mismo tiempo, suelte todo el resorte desde el reposo en una configuración tal que dé oscilaciones en el modo transversal más bajo. ¿Es el tiempo de "ida y vuelta" para la pulsación, igual al período del modo más bajo?

4.5 Amortiguamiento en bandas de goma. Hacer una "soga de goma" de dos o tres pies de longitud, uniendo varias bandas de goma abiertas, para formar una sola cinta. Trate de verificar que la velocidad de fase para ondas longitudinales es mayor (si lo es) que para las ondas transversales. Se encontrará que los modos longitudinales son altamente amortiguados. Mantenga una de las bandas entre sus labios cerrados. Estírela súbitamente. Espere. Suéltela repentinamente. ¿Qué le dicen (si le dicen algo) los resultados de este experimento con respecto al amortiguamiento? ¿Por qué son mucho más amortiguados los modos longitudinales que los modos transversales? Dicho de otro modo, ¿cómo pueden obtenerse oscilaciones transversales decentes con un amortiguamiento tan grande?

4.6 Medición de la velocidad del sonido con paquetes de onda. Aquí hay dos métodos:

(a) Consiga un ayudante que detone un explosivo a media milla o algo así. Ponga en marcha un cronómetro cuando ve el destello luminoso proveniente de la explosión. Deténgalo cuando escuche el sonido. Mida la distancia. Realice el experimento a dos distancias diferentes, que difieran en un factor de orden 2. Haga un gráfico del retardo en tiempo en función de la distancia para estos dos puntos, ¿intersecta el origen? Si no lo hace: ¿por qué no lo hace? Si no lo hace, ¿puede usted determinar la velocidad? ¿Cómo?

(b) Busque un patio de escuela o un campo de juego con un espacio amplio, en uno de cuyos extremos haya un edificio tal que pueda usted obtener un eco claro cuando golpee las manos estando a una distancia de 50 yardas o algo así de la pared. El tiempo de "ida y vuelta" es entonces del orden de dos o tres décimas de segundo. Esto es difícil de medir seguramente, aun con un cronómetro. Aquí le damos un método que requiere sólo un reloj ordinario (con manecilla para segundos). Deposite el reloj en el suelo, donde pueda mirarlo cuando golpee las manos. Comience a aplaudir rítmicamente, lentamente al principio. Escuche su aplauso y el eco. Aumente el ritmo hasta que el eco llegue en coincidencia con la próxima palmada. Éste puede ser un ritmo fácil de seguir de dos veces por segundo. Mantenga este ritmo durante 10 segundos más o menos, mirando el reloj y contando los aplausos simultáneamente. (Esto puede llevarle algunos minutos de práctica.) Mida la distancia a la pared que está dando el eco. El resto es aritmética.

Experimento casero

Experimento casero

Experimento casero

234 Ondas de propagación

4.7 Línea de transmisión coaxial. Demostrar que la capacidad por unidad de longitud, C/a , para una línea de transmisión coaxial, con un conductor interno de radio r_1 , y conductor externo de radio r_2 y con vacío entre los conductores cilíndricos interno y externo, está dada por (en ues, es decir, cm de capacidad por cm de longitud a lo largo del eje)

$$\frac{C}{a} = \frac{1}{2 \ln (r_2/r_1)}.$$

Demostrar que la autoinductancia por unidad de longitud, L/a , está dada (en ues) por

$$\frac{L}{a} = \frac{2}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Para obtener C/a , utilice $Q = CV$ y la ley de Gauss (Vol. II, Sec. 3.5). Para obtener L/a , use $L = (1/c)\Phi/I$, donde Φ es el flujo magnético producido por una corriente I [Vol. II, Sec. 7.8, ecs (7.53) y (7.54)].

4.8 Línea de transmisión de alambres paralelos. Primero trabaje sobre el Problema 4.7, en el cual puede hacer uso de la simetría. Este problema carece de aquella simetría pero puede ser fácilmente considerado, utilizando el principio de superposición: Calcule la contribución del campo de un solo alambre; luego multiplíquela por 2. Demostrar que C/a y L/a están dadas por

$$\frac{C}{a} = \frac{1}{4 \ln [(r + D)/r]},$$
$$\frac{L}{a} = \frac{4}{c^2} \ln \frac{r + D}{r},$$

donde r es el radio de cualquier alambre y $r + D$ es la distancia desde el eje de un alambre hasta la superficie del otro. Observe que el cálculo es muy similar al del Problema 4.7, excepto que se encuentra un interesante factor 2. Explique este factor.

4.9 Demostrar (por ejemplo, mediante un simple argumento basado en simetría) que los campos magnético y eléctrico son cero fuera del conductor externo de una línea de transmisión coaxial y dentro del conductor interno. Demostrar que los campos magnético y eléctrico son fuera de la región entre las placas de una línea de transmisión de placas paralelas.

4.10 Demostrar que la autoinductancia de una línea de transmisión de placas paralelas está dada por la ecuación (59), Sección 4.2, para corriente alterna y para corriente continua, mientras la longitud de onda sea larga comparada con la placa de espesor d_0 . Ver la discusión en la Sección 4.2, incluyendo la ecuación (60). Utilice la ecuación (60).

4.11 De acuerdo con la Tabla 9.1, Vol. II, Sección 9.1, la constante dieléctrica del aire a TPN, es 1,00059. (Suponer que su permeabilidad magnética es la unidad.) Así, de acuerdo con la ecuación (63), Sección 4.3, el índice de refracción del aire a TPN deberá ser $\sqrt{1,00059} = 1,00029$. Esto concuerda muy bien con el valor experimental dado en la Tabla 4.1, Sección 4.3. Por otro lado, la cons-

tante dieléctrica del agua es 80. Su índice de refracción *no es* $\sqrt{80} \approx 9$, sino alrededor de 1,33. ¿Por qué hay aquí esta enorme discrepancia?

Experimento casero

4.12 Prisma de agua — dispersión del agua. Fabrique un prisma de agua de la siguiente manera: Pegue dos portaobjetos formando una cavidad en forma de V. Selle los extremos con masilla, arcilla, cinta adhesiva o algo así. Llénela con agua (¡Evite las pérdidas!) Mantenga el prisma cerca de su ojo y observe las cosas a través. Los bordes coloreados que ve en los objetos blancos se llaman aberraciones cromáticas cuando son encontrados en un lente (lugar en el que no son deseadas). Observe ahora una fuente de luz blanca puntual o lineal. La mejor fuente de luz puntual para éste y otros experimentos caseros es una simple linterna. Quite el "lente" de vidrio. Cubra el reflector de aluminio con un trozo de tela negra (oscura) con un agujero a través del cual pueda pasar la lamparita. Por supuesto que esto no puede hacerse con una linterna de "haz sellado". La mejor fuente lineal de luz es una lámpara de 25 ó 40 vatios con vidrio transparente y filamento recto de unas 3 pulgadas.) Ponga ahora el *filtro púrpura* de su equipo de óptica entre su ojo y la fuente de luz. (No permita que el filtro se moje. ¡Es de gelatina y se disolvería!) Verá dos "fuentes virtuales", una roja y la otra azul. (Para comprender el filtro, observe la fuente de luz blanca con y sin él pero usando la red de difracción en lugar del prisma. Puede ver que el verde es absorbido mientras que el rojo y el azul son transmitidos.) Suponga que el azul transmitido por el filtro tiene longitud de onda de 4500 Å en promedio y que el rojo tiene 6500 Å. (Después que haya estudiado redes de difracción se le pedirá que mida estas longitudes de onda con mayor precisión.) Mida la separación angular en su ojo entre las fuentes virtuales roja y azul. Un método sencillo consiste en colocar cerca de la fuente un trozo de papel marcado con líneas. Camine hacia la fuente. La separación angular de las líneas va cambiando y puede conseguir que las líneas marcadas "coincidan" con las dos fuentes virtuales. Entonces podrá decir por cuántos centímetros están separadas. La separación angular es esa distancia dividida por la que media entre su ojo y la fuente. Inclíne el prisma para comprobar hasta qué punto la separación angular de las fuentes virtuales depende sensiblemente del ángulo de incidencia del haz sobre el primer porta objetos. Deduzca una fórmula para la deflexión del haz de luz como función del ángulo del prisma y del índice de refracción. (*Sugerencia:* Una incidencia normal sobre la primera placa es más fácil para la deducción. Por consiguiente, haga el experimento de esa manera, o por lo menos vea si conviene.) Mida el ángulo del prisma. ¿Contribuyen los portaobjetos (con caras paralelas) a la separación angular o deflexión? ¿Cómo puede encontrarlo experimentalmente? Por último, halle un valor para el grado de variación del índice de refracción del agua por cada mil unidades angstrom. ¿Cómo es respecto del agua? (Véase tabla 4.2, Sec. 4.3.) (Puede ser que, a pesar de tener el agua un índice menor, tenga mayor dispersión que el vidrio. ¿Es ése el caso?) Como sorpresa agradable, repita el experimento usando aceite mineral pesado. Pruebe con otros líquidos transparentes.

4.13. Una cuerda infinita de densidad lineal de masa 0,1 g/cm y tensión de 100 lb (1 lb = 454 g; 1 g = 980 dinas) es impulsada en $z = 0$ en movimiento armónico de 1 cm de amplitud y 100 cps de frecuencia. ¿Cuál es el flujo medio de energía temporal o vatios?

Resp. Alrededor de 40 vatios. (Su respuesta debe ser algo más precisa que esto; o sea, ¿es 35 vatios? ¿44 vatios?

4.14 Uno de los mejores aparatos para demostraciones de ondas es una máquina vibradora de torsión. Consiste en un largo "espinazo" en la dirección z con "costillas" transversales con espaciamiento a de alrededor de 1 cm. El espinazo es un alambre de acero de sección cuadrada con dimensiones transversales de

aproximadamente 2 por 2 mm. Cada costilla es una varilla de hierro de unos 0,5 cm de diámetro y 30 cm de longitud, ajustada en su parte media al espinazo de acero. Sea K la constante elástica angular del alambre. Eso significa que el impulso rotativo restaurador es el producto de K por el ángulo de torsión en radianes, sea I el momento de inercia de una varilla.

(a) Deduzca una fórmula para la velocidad de la onda y la impedancia para ondas torsionales (ondas de torsión del alambre). Defina la impedancia Z como "impulso rotativo = $Z \times$ velocidad angular". Suponga que la longitud de onda es grande comparada con el espaciamento entre costillas a .

(b) Muestre que la ley de dispersión exacta está dada por $\omega^2 = 4\omega_1^2 \sin^2 [(1/2)ka]$ y encuentre una expresión para ω_1 .

(c) Hasta ahora hemos despreciado toda fuerza restauradora debida a la gravedad. Suponga ahora que cuando todas las varillas oscilan juntas (de manera que el espinazo de alambre nunca sufre torsión), lo hacen con frecuencia angular ω_0 alrededor de su posición de equilibrio horizontal. ¿Cuál es la ley de dispersión? Para la respuesta y algunos resultados experimentales, véase B. A. Burgel, *Am. J. Phys* 35, 913 (1967).

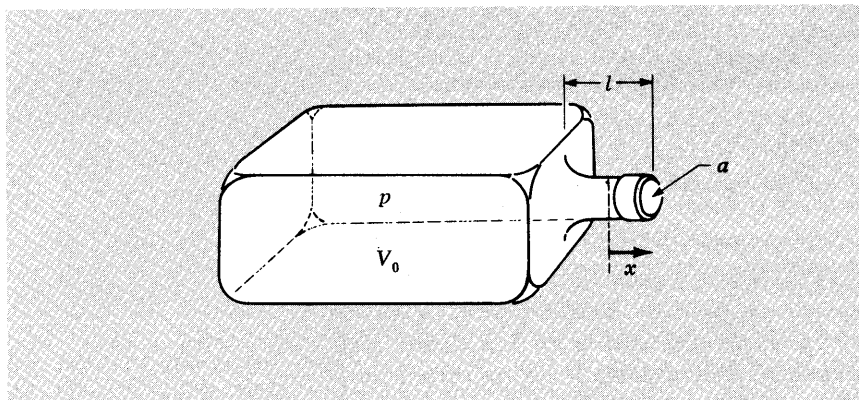
Experimento casero

4.15 Botella de whisky como resonador (resonador de Helmholtz). Si sopla transversalmente la boca de un porrón o botella obtiene un tono, debido a que ha excitado el modo más bajo. Si trata de estimar qué frecuencia debe esperarse, suponiendo que la botella actúa como un tubo uniforme cerrado en un extremo de manera que la longitud desde la boca al fondo es $(1/4)\lambda$, se sorprenderá. El tono es mucho más bajo de lo que pensó. He aquí la deducción aproximada de Helmholtz. Da resultados bastante buenos. (Usando una botella de Jim Beam vacía, yo predije 110 cps y encontré 130 de acuerdo con mi piano.) Suponga que el aire contenido en el gran volumen V_0 actúa como un resorte que está sujeto a una masa que es el aire del cuello de la botella. Esta masa es $\rho_0 al$, donde l es la longitud del cuello, a su área y ρ_0 la densidad del aire. La aproximación de Helmholtz consiste en suponer que todo el movimiento está en el cuello y que toda la fuerza restauradora proviene de cambios de presión en V_0 .

(a) Muestre que, si x es el desplazamiento diferencial hacia afuera del fluido a lo largo del cuello y toda la fuerza restauradora F_x se debe a la diferencia de presión $p - p_0$, donde p es la presión en V_0 y p_0 es la presión de equilibrio, entonces

Problema 4.15

$$F_x = - \frac{\gamma p_0 a^2 x}{V_0},$$



donde γ es la "relación de calores específicos" aproximadamente igual a 1,4 para aire.

(b) Muestre que esto da al modo único una frecuencia angular ω dada por

$$\omega^2 = v^2 \frac{a}{V_0 l},$$

donde v es la velocidad del sonido. Al usar este resultado se puede reemplazar l por el largo "efectivo" del cuello, que es la longitud real más alrededor de 0,6 de radio del cuello a cada lado. Si la longitud real del cuello es nula, la fórmula sirve bastante bien (en ese caso la longitud l se debe completamente a "correcciones de extremos".) Ese caso corresponde a algo parecido a los recipientes rectangulares en los que se envasa el adelgazador de pinturas.

Si sopla muy fuerte a través de la boca de su botella, puede excitar los modos más altos. Una vez que los ha oído soplando fuertemente, puede usualmente escuchar su presencia débil aun cuando esté soplando suavemente como para excitar principalmente el modo más bajo. No hay una manera sencilla "unidimensional" de calcular las frecuencias de resonancia más altas esperadas. Encontrará que dos botellas de forma diferente tienen relaciones de frecuencia muy distinta para el primero y segundo de sus modos, aun cuando pueda calcular bastante bien las frecuencias del modo más bajo de cada una usando la aproximación de Helmholtz.

4.16 Velocidad del sonido en aire, helio y gas natural. Consiga un silbato común. Tóquelo y recuerde el tono. Conéctelo ahora a un tubo de helio (disponible en cualquier laboratorio o departamento de física) y toque el silbato usando helio. ¿Cuál es el tono ahora? Mida experimentalmente la relación de tono para helio comparado con aire. El método más fácil es reconocer los tonos y luego usar una tabla de frecuencia en función del tono (que se encuentra en el *Handbook of Physics and Chemistry*, o vea el Exp. casero 2.6). Muestre que la relación de tonos teórica esperada es de alrededor de 3 a 1. Experimentalmente puede obtener sólo 2, aproximadamente. ¿Por qué? ¿Puede mejorar el experimento? ¿Cómo son comparadas ante sí las longitudes de onda del sonido en el silbato en los casos de helio y aire? En lugar de aire o helio use gas natural conectando el silbato o un mechero o a la salida de gas de un hornillo. ¿Cuál es la relación de tonos? ¿Qué puede aprender acerca de las propiedades moleculares del gas midiendo la relación de tonos para gas y aire?

Experimento casero

4.17 Encuentre el campo eléctrico rcm (raíz cuadrática media) (promediado sobre todas las frecuencias) en un punto del espacio a 1 metro de una lámpara de 40 vatios.

4.18 Medición de la constante solar en la superficie terrestre. Este experimento se describe en la Sección 4.4, pág. 224. Haga el experimento y dé el resultado en vatios/cm². Puede probar usando varias capas de vidrio, o tal vez solamente el vidrio de una ventana, para reducir el "calor" infrarrojo detectado por sus párpados y proveniente de la lámpara, en la suposición de que la atmósfera terrestre ya ha hecho esto para la luz del sol en una buena proporción. Entonces, limitándose a luz visible (tal como se ve a través de los párpados cerrados), tal vez uno pueda acercarse a la constante solar fuera de la atmósfera terrestre. La temperatura del filamento de tungsteno es menor que la del sol, y el espectro de longitudes de onda depende del color. Encuentre un gráfico de energía emitida en función de la longitud de onda para la temperatura de la superficie del sol, que es de aproximadamente 5000 °K y uno para la temperatura del tungsteno que es alrededor de 3000 °K. Estimando aproximadamente la frac-

Experimento casero

ción del flujo total que es visible para cada caso, vea si está sub o el flujo total del sol (incluyendo el invisible), comparándolo con la lámpara sólo para frecuencias visibles.

4.19 Velocidad de conteo del fotomultiplicador. Suponga que tiene un fotomultiplicador con las siguientes propiedades: área del fotocátodo 1 cm^2 , eficiencia 5 %, promediada sobre el espectro visible. Suponga que tiene una vela que emite una potencia de 1 bujía de luz visible. ¿A qué distancia del fotomultiplicador debe situarse la vela para que la velocidad de conteo de salida alcance el bajo valor de 10 cuentas por segundo? (Queremos que sea bajo para poder oír las cuentas individuales.) Alternativamente, si la vela está a 1 metro, ¿qué tamaño de pinchazo dará el mismo resultado en una pantalla opaca que cubre el fotomultiplicador? *Unidades:* Un fotón de un electronvolt de energía tiene una longitud de onda de unos 12345 Å (los dos últimos dígitos son erróneos; sin embargo ésta es una sencilla y famosa regla nemotécnica). Por consiguiente, si tiene 2 eV, tiene 6170 Å . Tome todos los fotones en el verde, o sea 5500 Å . Además, $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ erg}$.

4.20 Luz de candil y romance. Si un candil tuviese el mismo brillo intrínseco que la luna, proporcionaría la misma iluminación que ésta al colocarlo a una distancia tal que subtienda en su ojo el mismo ángulo sólido que la luna. Según la Tabla 4.3, Sección 4.4, un candil tiene doble brillo que la luna. Suponga que la luz de la luna llena proporciona una "iluminación perfecta para el romance". Mida el área aproximada, proyectada horizontalmente, de una llama de candil, calcule a qué distancia debe estar el candil para producir "iluminación perfecta" tal como se definió más arriba.

4.21 Luz de luna. De acuerdo con el ejemplo que sigue a la Tabla 4.3, Sección 4.4, una lámpara de 40 vatios, de diámetro efectivo de 2 cm, da la misma iluminación que la luna cuando se la coloca a una distancia de 6,4 metros. Ese cálculo comenzó con el brillo de la superficie, tal como lo da la Tabla 4.3 y el diámetro efectivo tal como se calculó previamente. Por supuesto, que una lámpara de 40 vatios con vidrio transparente proporcionará la misma iluminación. (El brillo del filamento de tungsteno es mucho mayor que el de la superficie despulida, pero la salida total de potencia es la misma.) Use estos hechos para calcular la iluminación proporcionada por la luz de luna llena en unidades de microvatios de luz visible por centímetro cuadrado de superficie iluminada. (Tenga en cuenta la eficiencia de la lámpara.)

Resp. Entre 0,1 y $0,2 \mu\text{w}/\text{cm}^2$. (Su respuesta deberá ser con 2 cifras significativas; por ejemplo, 0,13 ó 0,18, o lo que corresponda.)

4.22 Luz del sol. El sol subtiende aproximadamente el mismo ángulo sólido que la luna. (Si va a comprobarlo con una regla mantenida a la longitud de un brazo, asegúrese de usar un filtro adecuado. Los polaroides casi cruzados de su equipo de óptica le servirán.) Use la Tabla 4.3, Sección 4.4 y los resultados del Problema 4.21 para encontrar la iluminación proporcionada por el sol.

Resp. Unos $90 \text{ mw}/\text{cm}^2$ de luz visible.

4.23 Eficiencia luminosa del sol. Suponga que toda la luz visible del sol atraviesa la atmósfera terrestre con atenuación despreciable. Use los resultados del Problema 4.2 y el valor que da al *Handbook* para la constante solar fuera de la atmósfera terrestre para calcular la eficiencia luminosa del sol. ¿Cómo es en comparación con la de las lámparas? (Una lámpara de 5 000 vatios y 115 voltios tiene, según el *Handbook*, una eficiencia de 4,7 %.)

4.24 Medición de la potencia de bujías y eficiencia luminosa de una lamparita.

Para este experimento necesita una lámpara incandescente (el vidrio puede ser transparente o esmerilado), una vela, dos planchas de parafina ("cera casera" usada para tapar frascos de gelatinas, dulces y conservas), y un trozo de hoja de aluminio. La vela es su patrón. *Suponemos* que su vela se aproxima a una vela patrón y en consecuencia emite una bujía, unos 20 milivatios, de radiación visible. La lámpara es la incógnita. Su potencia total es conocida (está marcada en el bulbo). Mida su salida neta visible, comparándola con la vela de la siguiente manera. Coloque la hoja de aluminio entre las dos planchas de parafina. Mantenga este sandwich de parafina cerca de la vela; note el brillo de la plancha más cercana a la vela y la oscuridad de la más alejada. Manténgala cerca de la lámpara. Ahora (de noche, con solamente la vela y la lámpara encendidas) coloque el detector de parafina entre la lámpara y la vela con cada cara apuntando a cada fuente de luz. Modifique la colocación hasta que las dos placas aparezcan igualmente brillantes. Mida las distancias. El resto es aritmética. (Use la ley de la inversa del cuadrado.) Dé la salida neta visible de la lámpara en bujías y en vatios visibles, suponiendo que su vela es "patrón". Dé la eficiencia de la lámpara.

Con un dispositivo un poco más complicado, debiera poder medir la iluminación del sol en vatios/cm² visibles o (tomando 1 bu/cm² = 20 mw/cm²) en bujías por cm². Puede tener un problema con luz de fondo que no proviene ni del sol ni de su lámpara patrón. Conviene tener una lámpara fuerte, quizás de 200 vatios. Tal vez necesite un tubo de cartón como colimador, o una caja de cartulina con agujeros adecuados, o una tela oscura en algún lugar. Calibre la lámpara en bujías como se describió antes. Halle la distancia entre la lámpara y la parafina que dé una iluminación igual a la del sol. Basándose en la geometría, podrá calcular el flujo desde la lámpara en bu/cm² y, por consiguiente, calcular la iluminación del sol en bu/cm².

Experimento casero

4.25 Lamparitas esmeriladas. Consiga una lamparita esmerilada común y una blanca (opal) y del mismo vatiaje y diámetro del bulbo. Enciéndalas y observe. Note el "núcleo brillante" de la luz proyectada para la lámpara esmerilada. La lámpara blanca es mucho más uniforme. En consecuencia, la esmerilada tiene una superficie "efectiva" más pequeña que la blanca. Puesto que sus potencias son iguales, tendrán presumiblemente la misma potencia de salida de luz. Por lo tanto, la lámpara esmerilada debe ser más brillante sobre la pequeña superficie de su núcleo central. Observe la región central de cada lámpara encendida a través de un agujero dejado entre sus dedos curvados apropiadamente, manteniendo una distancia constante a sus ojos de manera que pueda pasar un ángulo sólido constante. ¿Qué lámpara es más brillante (en el centro)? Mida el diámetro del área proyectada del núcleo brillante de la lámpara esmerilada, manteniendo una regla contra ella. (Puede necesitar reducir el brillo observando a través de polaroids parcialmente cruzados de su equipo de óptica.) Calcule una relación de brillo superficial para las dos lámparas, tomando, como modelo de lámpara esmerilada, una esfera efectiva con diámetro igual al de su núcleo brillante. Mida la relación de brillo superficial de la siguiente manera. Coloque cada lámpara detrás de un cartón con un agujero que permita ver sólo la parte central de cada una. Haga los dos agujeros del mismo tamaño. Sitúe las lamparitas de modo que estén alejadas varios pies y se iluminen mutuamente a través de los agujeros. Utilice la técnica del sandwich de parafina, descrita en el Experimento casero 4.24, para medir la relación de brillo superficial de las regiones centrales de las dos lamparitas. ¿Cómo es su resultado respecto al calculado en base al modelo de "esfera efectiva"?

Por último, rompa las dos lámparas para ver cómo difieren los dos esmerilados. (¡Envuélvalas en una toalla antes de romperlas!) Si le parece muy caro, puede aceptar nuestra palabra de honor que las lámparas esmeriladas comunes

Experimento casero

que hemos roto son levemente rugosas en su superficie interior, lo que puede conseguirse por arenado o ataque ácido. Las lamparitas blancas están revestidas con un polvo blanco (indudablemente óxido de magnesio). El polvo se limpia tocando con el dedo y deja descubierto una envoltura de vidrio transparente. Si rompe la lamparita, salve la parte semiesférica más grande. Constituye una lente "planoconvexa" muy buena cuando se la llena parcialmente con líquido. (Para conseguir un trozo grande rompa la lamparita golpeando el *cuello*.) Puede usarlo para medir los índices de refracción de agua y aceite mineral.

Experimento casero

4.26. Impedancia del sonido. Cante una nota estacionaria dentro de un tubo de cartón mantenido ajustado a su boca, de modo que no se pierda aire por los bordes. Varíe el tono para encontrar las resonancias. (No están exactamente donde los modos libres que oye cuando pega el tubo contra su cabeza. Su boca y garganta cambian la longitud efectiva en cada extremo.) Cante una nota estacionaria que no esté en resonancia. Saque repentinamente el tubo sin dejar de cantar. El cambio de impedancia debería ser notable. Ahora cante en resonancia. Note que siente algo marcadamente diferente en su garganta. La carga *no* es puramente resistiva, sino grandemente reactiva. Consiga ahora una jarra o vaso grande o balde. Encuentre una resonancia fuerte, buscando con el canto de su voz. Cante tan bajo como pueda en la resonancia, con su boca y garganta acopladas bien cerca al sistema resonante. Si no hubiese pérdidas por radiación u otras pérdidas resistivas, la carga en su aparato cantante sería puramente reactiva. Esto es, tanta energía fluye hacia adentro de su garganta en cualquier ciclo, como sale por ella (durante otra parte del ciclo). En este caso, lo que siente en su garganta es muy distinto de lo que siente cuando canta dentro de un medio abierto. Verá que tiene dificultades para controlar el tono. Éste se tambalea porque usted es usado como carga resistiva y está experimentando una carga reactiva.

4.27 Suponga que dos ondas de propagación en una cuerda elástica con $T_0 = 1$ dina, $\rho = 1$ g/cm, y $\omega = 10^3$ rad/seg están dadas por

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A \cos(\omega t - kz + \pi), \\ \psi_2 &= A \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Encuentra la intensidad en promedio temporal de la superposición de Ψ_1 y Ψ_2 .

4.28 Tres ondas electromagnéticas planas, dadas por

$$\begin{aligned}E_{1x} &= E_0 \cos(kz - \omega t - \delta_1) = B_{1y}, \\ E_{2x} &= E_0 \cos(kz - \omega t - \delta_2) = B_{2y}, \\ E_{3x} &= E_0 \cos(kz - \omega t - \delta_3) = B_{3y},\end{aligned}$$

se propagan el mismo espacio. ¿Cuáles son las amplitudes y flujos de energía máximos y mínimos que pueden producirse ajustando los valores de las constantes δ_1 , δ_2 y δ_3 ?

4.29 "Presión" para ondas longitudinales en un resorte. Traduzca la ecuación (111), Sección 4.4, que es

$$F_z/L \text{ sobre } R = F_0 - Ka \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z}.$$

Comience con una cuerda con cuentas, de parámetros empaquetados. En el equilibrio, cada resorte es comprimido de manera que ejerce una fuerza F_0 . La constante elástica es K . La separación entre cuentas es a . Encuentre la fuerza ejercida por el resorte en la dirección $+z$ sobre una cuenta dada hacia la izquierda de la misma. Pase al límite continuo y deduzca así la relación deseada. Observe que, en el límite continuo, el producto Ka es una propiedad del resorte continuo y es independiente de la longitud a .

4.30 “Slinkies” y tiras de goma. Para una tira de goma común (o para el tipo de resorte que cierra puertas), la longitud no estirada no es despreciable en comparación con la estirada. Demuestre que, como consecuencia, la velocidad de fase para ondas transversales es menor que para longitudinales. Demuestre, por ejemplo que, si la longitud estirada es $4/3$ de la no estirada, las ondas longitudinales se propagan con el doble de velocidad que las transversales. Para un “slinky” la longitud no estirada es unos 3 cm y estirada puede medir 15 pies. ¿Cuál es la relación de velocidades en ese caso?

4.31 Las ondas de sonido ¿son perfectamente no dispersivas? En la Sección 4.2 encontramos que la velocidad de fase del sonido es constante, independiente de la frecuencia. La ley de dispersión que dio ese resultado fue

$$\omega^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} k^2,$$

que es análoga a la ley de dispersión para oscilaciones longitudinales en un resorte continuo,

$$\omega^2 = \frac{K}{M} k^2.$$

Para un resorte con cuentas, de parámetros empaquetados, la ley de dispersión es

$$\omega^2 = \frac{K \sin^2 \frac{1}{2} ka}{M \left(\frac{1}{2}a\right)^2},$$

Lo que conduce a una frecuencia de corte superior. Por analogía y razonamiento físico piense un valor para una frecuencia de corte superior para sonido en aire a PTN (presión y temperatura normales). ¿Esperaría que ondas ultrasónicas de frecuencia $\nu = 100$ Mc se propagasen a la velocidad ordinaria del sonido?

Resp. Esperamos un corte de alta frecuencia $\nu_0 \approx 10^{10}$ Hz.

Capítulo 5

Reflexión

5.1 Introducción 244

5.2 Terminación perfecta 244

Ejemplo 1: Cuerda continua 244

Compensación de impedancia 246

Carga distribuida 246

Ejemplo 2: Línea de transmisión de placas paralelas 246

Resistencia por unidad de área 247

Tela espacial 248

Ondas rectas y paralelas 248

Terminación de una onda plana en el espacio libre 249

Otros métodos de terminación perfecta 251

5.3 Reflexión y transmisión 251

Cuerda continua 251

Cómo la impedancia de carga descompensada genera reflexión 252

Coefficiente de reflexión 253

La fuerza restauradora y el desplazamiento se reflejan con signos opuestos 254

Reflexión en una frontera entre medios dispersivos 254

Transmisión en una frontera entre medios dispersivos 255

Continuidad y condición de contorno 255

Coefficientes de transmisión de amplitud 256

Caso 1: Compensación de impedancias perfecta 256

Caso 2: Rozamiento infinito 257

Caso 3: Rozamiento nulo 257

Forma general de una onda sinusoidal 257

Ejemplo 3: Reflexión de ondas de sonido 259

Extremo cerrado 259

Extremo abierto 260

Longitud efectiva de un tubo de extremos abiertos 261

Ejemplo 4: Reflexiones en líneas de transmisión 262

Ejemplo 5: Extremo cortocircuitado — impedancia nula 262

Ejemplo 6: Extremo con circuito abierto — impedancia infinita 262

Línea de transmisión de placas paralelas 263

Coefficientes de reflexión para los campos 263

Ejemplo 7: Reflexión en una línea de transmisión con una discontinuidad en ϵ 263

Ejemplo 8: Reflexión de luz visible 264

5.4 Compensación de impedancias entre dos medios transparentes 265

Capa no reflectora 265

Aproximación de pequeña reflexión 266

Solución para capa no reflectora 267

Ejemplo 9: Compensación de impedancias óptica 267

Lámina con gradación 268

Ejemplo 10: Corneta exponencial 269

Ejemplo 11: Gradación del índice de refracción 269

5.5 Reflexión en películas delgadas 269

Franjas de interferencia 269

Ejemplo 12: ¿Por qué la primera franja es blanca? 270

La franja más bonita 270

Problemas y experimentos caseros 272

Expresión para la intensidad de las franjas 271

¿Es uno más uno igual a cuatro? 271

Ejemplo 13: Franjas de Fabry-Perot en un portaobjetos 271

Capítulo 5 Reflexión

5.1 Introducción

En este Capítulo aplicaremos el concepto de impedancia para encontrar qué ocurre cuando una onda de propagación encuentra una discontinuidad en el medio. En la Sección 5.2 consideramos una carga resistiva empaquetada que “empareja” la impedancia característica del medio de la onda. Esto nos conduce a descubrir cómo fabricar “tela espacial” que pueda hacer terminar ondas electromagnéticas sin reflexión. En la Sección 5.3 consideramos reflexiones inducidas por impedancias “desparejadas”. Generalizando los resultados obtenidos para una línea de transmisión aprendemos cómo las ondas de luz son reflejadas en una discontinuidad de índice de refracción. A través del estudio de reflexiones múltiples, en la Sección 5.5 aprendemos cómo usar una hoja de vidrio para que nos diga algo acerca del tiempo medio de decaimiento de los átomos de neón excitados.

5.2 Terminación perfecta

Si un transistor se acopla a un medio completamente abierto y lo impulsa a una frecuencia en su rango dispersivo, el transmisor emite ondas de propagación. Su terminal de salida experimenta una fuerza de arrastre puramente resistiva proporcional a la impedancia característica. Ésta depende del medio y también de la configuración geométrica de las ondas. (Por ejemplo, una línea de transmisión de placas paralelas tiene una impedancia diferente a la de una de alambres paralelos.)

En lo que concierne al transmisor, éste no puede decir si está realmente irradiando ondas de propagación en un medio abierto o meramente impulsando una carga resistiva empaquetada. Si desconectáramos la antena de la radioemisora local y la reemplazáramos por un resistor equivalente, el oscilador no podría notar la diferencia. (Esto está algo simplificado en exceso, en el sentido de que una antena de radio también tiene inductancia y capacitancia. En consecuencia, para “engañar” completamente al oscilador, tendríamos que reemplazar la antena por un circuito *LRC* adecuado. En este circuito, la resistencia R es la “resistencia de radiación” y ésta es la impedancia característica de que estamos hablando.) Comencemos por un ejemplo más sencillo que una antena de radio.

Ejemplo 1: Cuerda continua

Si se tuviera que reemplazar la cuerda (que está siendo agitada por la terminal de salida del transmisor) con un “amortiguador” adecuado, el

transmisor debiera experimentar la misma fuerza de arrastre que cuando está emitiendo ondas de propagación en una cuerda infinita. Por *amortiguador* queremos significar un dispositivo (que llamaremos R , del inglés *right*, “derecha”) con la siguiente propiedad: Si su terminal de entrada es forzado a tomar una velocidad $u(t)$, el amortiguador responde a la entrada impulsora (que llamaremos L , del inglés *left*, o “izquierda”), reaccionando con una fuerza opuesta *proporcional a la velocidad*.

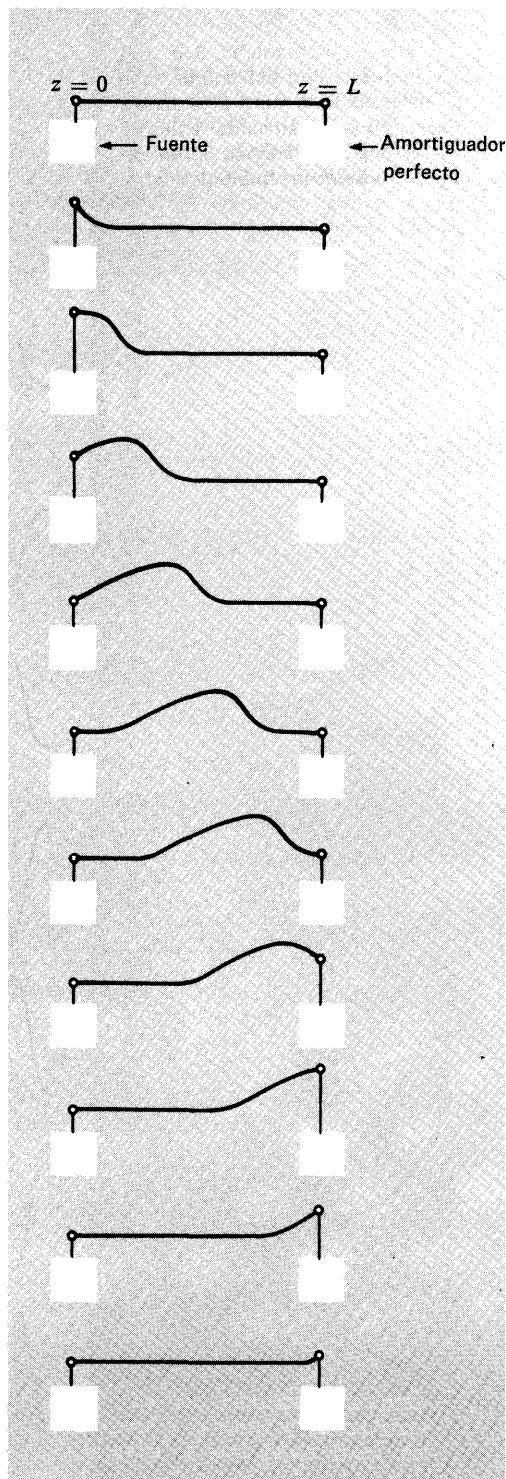
$$F(R \text{ sobre } L) = -Z_R u(t), \quad (1)$$

Donde Z_R es una constante positiva llamada *impedancia* del amortiguador. Se dice que es “puramente resistiva” puesto que $F(R \text{ sobre } L)$ es proporcional a la velocidad. (Un dispositivo compuesto por una masa inercial o un resorte, reaccionaría con una fuerza proporcional a la aceleración o al desplazamiento, respectivamente. En esos casos, el aparato ofrecería una carga “reactiva” mejor que resistiva.) Ahora bien, cuando el transmisor está emitiendo ondas de propagación en un sistema abierto con impedancia característica Z , la terminal de salida del transmisor experimenta una fuerza de arrastre

$$F(R \text{ sobre } L) = -Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{z=0}, \quad (2)$$

donde $\partial \psi / \partial t$ es la velocidad de la cuerda en $z = 0$ y en consecuencia también de la terminal de salida. Por lo tanto, vemos que si Z_R es igual a Z , el transmisor experimenta la misma reacción “puramente resistiva” cuando impulsa la terminal de entrada del amortiguador que cuando impulsa una cuerda infinitamente larga. Una característica de una onda de propagación es que todo punto corriente abajo en el medio tiene la misma “experiencia” que la terminal de salida del transmisor, pero en un tiempo posterior. Por lo tanto, para cualquier punto corriente abajo, z , de un sistema que transmite ondas de propagación, el punto L inmediatamente a la izquierda de z no puede decir si el punto R inmediatamente a la derecha de z es realmente el primer punto de una continuación del resorte hasta infinito o es meramente la terminal de entrada de un amortiguador con impedancia $Z_R = Z$.

Fig. 5.1 Si la cuerda termina perfectamente, la fuente no puede decir su longitud. Por lo que puede decir la fuente, la cuerda puede estar conectada a una cuerda infinitamente larga, o estar directamente conectada a la terminal de entrada del amortiguador. Aquí se la muestra conectada a una cuerda finita perfectamente terminada.



Compensación de impedancia. Esto nos muestra que la manera de obtener una terminación perfecta de una cuerda continua, de forma tal que no haya reflexiones de ondas de propagación transversales incidentes sobre la terminación estriba en sujetarla a una carga resistiva consistente en un amortiguador perfecto de impedancia

$$Z_R = Z = \sqrt{T_0 \rho_0}. \quad (3)$$

Cuando se satisface la ecuación decimos que la impedancia de la carga “compensa” la impedancia característica de la cuerda. En la Figura 5.1 se muestra un ejemplo de terminación perfecta.

Carga distribuida. Un amortiguador es una carga resistiva “empaquetada”, o sea, que ocupa una región pequeña en comparación con una longitud de onda.

Una manera de conseguir una terminación perfecta efectiva sin el riguroso requerimiento de diseño necesario para satisfacer la condición de compensación de impedancia [ecuación (3)], es usar una carga muy grande “distribuida” que provea una pequeña fuerza de arrastre, comenzando en el punto $z = L$ donde se desea comenzar a absorber la energía de la onda. Esta fuerza de arrastre se aplica entonces en forma continua y uniforme a lo largo de la cuerda en todo z mayor que L . Si la fuerza de arrastre absorbe solamente una pequeña fracción de la energía de la onda en una distancia de una longitud de onda, se ve que no introducirá una reflexión significativa, y absorberá gradualmente toda la energía de la onda.

Ejemplo 2: Línea de transmisión de placas paralelas

Este ejemplo conducirá a un resultado muy general. El extremo de entrada de la línea se muestra en la Fig. 5.2, junto con una plancha de material resistivo que podría usarse para reemplazar la línea de transmisión como carga sobre el transmisor o para terminar la línea de transmisión sin reflexión. Para la dirección de corriente indicada, la resistencia de la plancha es la resistividad ρ multiplicada por la longitud y dividida por el área de la sección transversal (Vol. II, Sección 4.7):

$$R = \rho \cdot \frac{(\text{longitud})}{(\text{área})} = \frac{\rho g}{dw}. \quad (4)$$

Pero la impedancia característica Z de una línea de transmisión de placas paralelas es:

$$Z = \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w}. \quad (5)$$

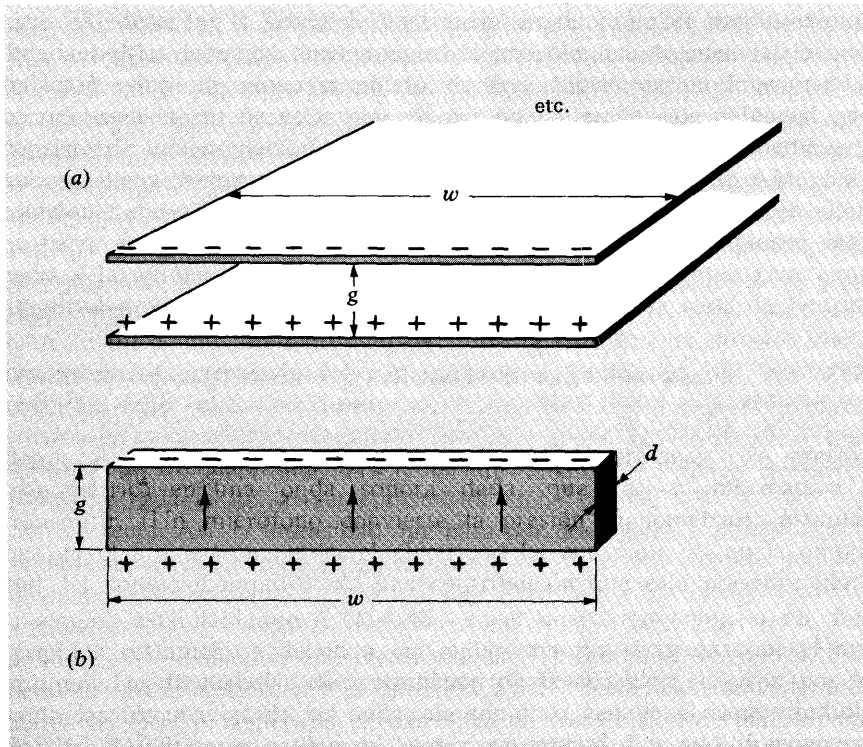


Fig. 5.2 Terminación de una línea de transmisión de placas paralelas. (a) Línea de transmisión. (b) Plancha resistiva. Cuando la diferencia de potencial a través de la plancha tiene el signo indicado por los signos más y menos, la corriente fluye en la dirección de las flechas.

Si R va a ser una terminación perfecta necesitamos que $R = Z$. Igualando las ecuaciones (4) y (5), encontramos:

$$\frac{\rho}{d} = \frac{4\pi}{c}, \quad (6)$$

donde ρ está en ues (statohm-cm) y d está en cm. La relación ρ/d está en statohm.

Resistencia por unidad de área. Esta placa puede caracterizarse de un modo útil, que es independiente del espesor d , como sigue. Cortemos de este material de espesor d , un cuadrado de L por L . Apliquemos un voltaje V entre dos extremos opuestos del cuadrado. Esto da una corriente que fluye paralela a la superficie de la hoja. La resistencia del cuadrado es igual a la resistividad multiplicada por la longitud en el sentido de la corriente (o sea L) dividida por el área perpendicular a la corriente (o sea, Ld). Por lo tanto, la resistencia del cuadrado es

$$R = \frac{\rho L}{Ld} = \frac{\rho}{d}. \quad (7)$$

Obsérvese que esto es independiente de la longitud L del borde del cuadrado. Consecuentemente, ρ/d puede caracterizarse, para cualquier material, como la resistencia por unidad de área (de cualquier tamaño) para corriente que fluye de un borde del cuadrado al opuesto. Por lo tanto, la ecuación (6) nos dice que *para una terminación perfecta de una línea de transmisión de placas paralelas, la resistencia por unidad de área debe ser $4\pi/c$* , lo que es 4π veces 30 ohms [c^{-1} statohm es igual a 30 ohms]:

Una hoja que produce terminación perfecta tiene $120\pi = 377$ ohms por unidad de área (8)

Veamos cómo podríamos aproximarnos a conseguir una terminación perfecta en la práctica. Diseñemos una plancha de terminación para una línea de transmisión de placas paralelas. Queremos una hoja de material que tenga $\rho/d = 377$ ohms, de manera que

$$d \text{ (en cm)} = \frac{\rho \text{ (en ohm-cm)}}{377 \text{ ohms}}. \quad (9)$$

Probemos con una hoja de cobre. ¿Qué ancho debe tener? En el *Handbook of Physics and Chemistry* (indicado bajo “resistivity of metals”), encontramos $\rho_{\text{Cu}} \approx 1,7 \times 10^{-6}$ ohm-cm. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (9), necesitamos una hoja de espesor $d_{\text{Cu}} \approx 1,7 \times 10^{-6}/377 \approx 0,5 \times 10^{-8}$ cm; ¡esto es *menor* que el diámetro atómico de un átomo de cobre! Parece que estamos en dificultades. ¡Volvamos al *Handbook*! Finalmente descubrimos el carbono. Tiene resistividad 3500×10^{-6} ohm-cm, lo que da $d \approx 3500 \times 10^{-6}/377 \approx 10^{-5}$ cm. Éste es un espesor factible ¡y funciona! Podemos partir de (digamos) un trozo de lona que tenga suficiente resistividad de modo que su resistencia por unidad de área sea muy grande comparada con 377 ohms. Luego preparamos una “pintura” de hollín (carbón en polvo) suspendido en agua u otro soporte líquido adecuado. Rociamos la pintura sobre la lona hasta que la resistencia sea 377 ohms por unidad de área determinada con un ohmímetro.

Tela espacial. En la jerga de microondas, un trozo de material de 377 ohms de resistencia por unidad de área es llamado tela espacial. Una onda electromagnética de propagación incidente en un plano L inmediatamente a la izquierda de la posición z no puede decir si el plano R inmediatamente a la derecha de z es realmente el comienzo de una continuación infinita de la línea hacia la derecha de R o meramente una hoja de tela espacial.

Ondas rectas y paralelas. Las ondas de propagación en una línea de transmisión coaxial o de alambres paralelos no son ondas planas, por-

que, por definición, una onda plana está compuesta por campos eléctricos y magnéticos cuyos valores en un instante dado, t , no dependen de x e y , sino solamente de z (dirección de propagación). Esas ondas son en cambio miembros de una clase más general, la de ondas *rectas y paralelas*, que incluye a las ondas planas. Las ondas rectas y paralelas son aquellas en que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} pueden depender de x e y , pero esta dependencia no varía con z la dirección de propagación. Por lo tanto, las ondas en líneas de transmisión rectas y paralelas (o sea, las que pueden construirse de alambres idénticos, rectos y paralelos) son ondas rectas y paralelas.

Una hoja de tela espacial proporciona una terminación perfecta para *toda* línea de transmisión recta y paralela, y lo hace por la siguiente razón: Se sabe que en todo entorno de un punto dado, suficientemente pequeño en la dirección transversal, una onda plana y paralela incidente no puede ser distinguida de una onda plana. Esto es, sobre una región de dimensiones suficientemente pequeñas Δx y Δy transversal a la dirección de propagación z , los campos $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ y $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ pueden considerarse constantes independientes de x e y . Además, se puede demostrar (usando las ecuaciones de Maxwell) que, para x e y dados, las ondas rectas y paralelas satisfacen relaciones análogas a las dadas para ondas planas en medios transparentes, Sección 4.4. Por lo tanto, para ondas planas y paralelas, para x e y fijos, $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ y $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ son perpendiculares entre sí y respecto a \hat{z} , tienen igual magnitud y sus signos son tales que $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ esté según $+\hat{z}$, o sea, $\mathbf{B} = \hat{z} \times \mathbf{E}$. Además, el flujo de energía "local" (en el entorno $\Delta x \Delta y$) está dado por una expresión análoga a la que se cumple para ondas planas. Por consiguiente, para ondas rectas y paralelas propagándose en el vacío, tenemos:

$$S(x,y,z,t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2(x,y,z,t), \quad (10)$$

donde S es la intensidad en erg/cm² seg. Puesto que esta relación entre el flujo de energía y los campos es, localmente, la misma que para ondas planas, las "pérdidas I^2R " de las corrientes inducidas en la tela espacial por las ondas rectas y paralelas compensarán exactamente el flujo de energía incidente igual que para ondas planas. Por lo tanto la tela espacial en cualquier entorno $\Delta x \Delta y$ absorberá la radiación recta y paralela incidente sin reflexión siempre y cuando su resistencia sea 377 ohms por unidad de área.

Terminación de una onda plana en el espacio libre. Luego de la discusión anterior, podemos imaginar que una hoja de tela espacial proporciona una terminación perfecta no sólo para ondas planas en una línea de transmisión de placas paralelas, sino también para ondas planas en el espacio libre. Esta conjetura es razonable, pero equivocada. Una onda plana que incide sobre una hoja de tela espacial experimenta

una impedancia que es exactamente ¡la *mitad* de 377 ohms por unidad de área!

Podemos entender fácilmente ese factor de $\frac{1}{2}$ considerando la línea de transmisión de placas paralelas. Si tenemos una de estas líneas extendida desde $z = -\infty$ a $z = +\infty$ podemos hacer terminar una onda incidente desde la izquierda conectando una hoja de tela espacial transversalmente a la línea en $z = 0$ *siempre que* también desconectemos el resto de la línea que va de $z = 0$ a $z = \infty$. Si no desconectamos la línea de la derecha de $z = 0$, el voltaje de la onda incidente en $z = 0$ es aplicado sobre dos impedancias iguales conectadas en paralelo siendo una de ellas la tela espacial y la otra la continuación infinita de la línea. Por lo tanto, la onda experimenta una impedancia efectiva correspondiente a dos resistencias iguales en paralelo, o sea, la mitad de cualquiera de ellas. Esto es también lo que ocurre cuando una onda plana en el espacio vacío incide sobre una hoja de tela espacial. El voltaje que se aplica sobre la hoja de tela espacial en cualquier instante es también aplicado sobre la continuación infinita del espacio a la derecha de la tela espacial. La impedancia resultante es la mitad de la tela espacial o del espacio vacío. La onda no es completamente absorbida, sino que es parcialmente reflejada, en parte absorbida y en parte transmitida.

¿Cómo podemos “desconectar” el espacio vacío a la derecha de una hoja de tela espacial? En el caso de la línea de transmisión es fácil. Se puede cortar mediante una sierra. El corte de sierra proporciona una impedancia infinita, que desconecta la línea de transmisión hacia la derecha del mismo. La onda incidente se aplica a través de la tela espacial en paralelo con una impedancia infinita. La impedancia infinita resultante es la de la tela espacial. Ahora bien, en el caso del espacio vacío no hay manera de hacer un “corte de sierra” para conseguir una impedancia infinita. Sin embargo, hay un truco ingenioso mediante el cual se puede “desconectar” el espacio hacia la derecha de $z = 0$, para una onda armónica con una única y definida longitud de onda. El truco funciona para el espacio vacío y también para la línea de transmisión. Considere la línea de transmisión: En lugar de desconectarla con un corte de sierra en $z = 0$, el truco consiste en “cortocircuitar” mediante una hoja de conductor perfecto, que tiene resistividad nula. El cortocircuito no se coloca en $z = 0$ sino en $z = 1/4\lambda$. Entonces el voltaje es siempre cero en $z = 1/4\lambda$. A la derecha del cortocircuito el voltaje tiene forma de onda estacionaria (todavía no se ha insertado la tela espacial). La corriente también tiene forma de onda estacionaria. Se ve que los lugares donde la corriente es nula están a un cuarto de longitud de onda de los lugares donde es nulo el voltaje. Por lo tanto en $z = 0$ la corriente siempre es nula. Esto es como tener impedancia infinita debida a un corte practicado en $z = 0$. (Impedancia infinita significa corriente nula.) En consecuencia, la línea de transmisión está efectivamente “desconectada” en $z = 0$ mediante un cortocircuito en $z = (1/4)\lambda$.

El mismo truco sirve para el espacio vacío. Una onda plana se termina perfectamente por medio de una hoja de tela espacial en $z = 0$ seguida de una hoja de conductor perfecto (un “espejo”) en $z = 1/4\lambda$. Toda la energía de la onda se disipa en la tela espacial.

En el caso de ondas en una cuerda, la entrada de nuestro “amortiguador perfecto” está conectada a la propia cuerda. Su otra parte móvil (la que se mueve respecto a la terminal de entrada para proveer el amortiguamiento por fricción) estaba firmemente amarrada a un soporte rígido. Esto es como estar conectada a otra cuerda de densidad infinita que se extiende desde $z = 0$ hasta ∞ . Tal cuerda tendría impedancia infinita. Esto es análogo al corte de sierra en la línea de transmisión y es la razón por la cual el amortiguador proporciona amortiguación perfecta. Si, en cambio, la otra parte móvil del amortiguador estuviese conectada a una cuerda de impedancia Z_2 extendida desde $z = 0$ hasta $+\infty$, entonces la onda incidente en $z = 0$ experimentaría una impedancia que resulta equivalente a la del amortiguador conectado en paralelo con la impedancia Z_2 de la continuación de la cuerda. De igual manera que para la línea de transmisión y para el espacio vacío, podemos tener terminación perfecta para ondas en una cuerda, siempre que la segunda conexión del amortiguador sea a un soporte sólido, o bien a un segmento de cuerda de un cuarto de longitud de onda, conectado a un anillo sin fricción que se desliza sobre una varilla, como para dar impedancia nula en la varilla e infinita en el amortiguador. Esto asegura que la conexión de salida del amortiguador no se moverá. Véase Prob. 5.32.

Otros métodos de terminación perfecta. No es siempre fácil hacer “tela espacial perfecta”. Si nos contentamos con absorber la radiación con una carga distribuida que ocupa un buen espacio, puede hacerse con reflexión despreciable sin tener que satisfacer la condición de compensación de impedancia de la terminación perfecta de parámetros empaquetados, o sea, la tela espacial. Por ejemplo, si queremos absorber un haz de linterna con una reflexión despreciable, puede hacerse entrar por un agujero practicado en el costado de una caja opaca de cartón. Revistamos la caja con material negro (o sea, absorbente) y pongamos algunos baffles de modo que la luz tenga que rebotar varias veces para salir. Si observamos ese agujero a plena luz del día, veremos que parece mucho más oscuro que un objeto negro común como el hollín. Una tal “superficie negra” es indistinguible de la tela espacial perfecta, porque esencialmente ninguna radiación que entre por el agujero, sale por él; es como el medio transparente (aire) extendido infinitamente.

5.3 Reflexión y transmisión

Cuerda continua. Supongamos que tenemos una cuerda semiinfinita con impedancia característica Z_1 que se extiende desde $z = -\infty$ hasta 0.

En $z = 0$ se sujeta a una carga que es la terminal de entrada de un amortiguador con impedancia Z_2 distinta de Z_1 . En $z = -\infty$ hay un transmisor que emite ondas que se propagan en la dirección $+z$. Por lo tanto, hay una onda de propagación incidente dada por

$$\psi_{\text{inc}}(z, t) = A \cos(\omega t - kz). \quad (11)$$

En $z = 0$ la onda incidente está dada por [haciendo $z = 0$ en la ecuación (11)].

$$\psi_{\text{inc}}(0, t) = A \cos \omega t. \quad (12)$$

Cómo la impedancia de carga descompensada genera reflexión. Llamemos L al último punto de la cuerda y R a la terminal de entrada al amortiguador. Si el amortiguador tuviese impedancia Z_1 , debería “compensar” la impedancia de la cuerda y terminar la onda incidente sin reflexión. En ese caso la “fuerza” de terminación F_{term} ejercida por el amortiguador sobre la cuerda estaría dada por

$$F_{\text{term}}(R \text{ sobre } L) = -Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{inc}}(0, t)}{\partial t}. \quad (13)$$

La fuerza real $F(R \text{ sobre } L)$ puede considerarse como la superposición de esa fuerza de terminación más un exceso de fuerza F_{exc} , por encima (o debajo) de la que es necesaria para absorber la onda incidente. Este exceso de fuerza genera una onda que se propaga en la dirección $-z$, como si R fuera la terminal de salida de un transmisor. Ésta es la onda reflejada $\psi_{\text{ref}}(z, t)$. En $z = 0$ satisface la relación que siempre se cumple cuando es emitida una onda de propagación, es decir, que la fuerza impulsora es el producto de la impedancia por la velocidad:

$$Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{ref}}(0, t)}{\partial t} = F_{\text{exc}}(R \text{ sobre } L), \quad (14)$$

donde $F_{\text{exc}}(R \text{ sobre } L)$ es como la fuerza ejercida por un transmisor. La fuerza total $F(R \text{ sobre } L)$ es la superposición de la fuerza de terminación y el exceso de fuerza, actuando cada una “independientemente”:

$$F(R \text{ sobre } L) = F_{\text{term}}(R \text{ sobre } L) + F_{\text{exc}}(R \text{ sobre } L). \quad (15)$$

Combinando las ecuaciones (13), (14) y (15), obtenemos

$$F(R \text{ sobre } L) = -Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{inc}}(0, t)}{\partial t} + Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{ref}}(0, t)}{\partial t}. \quad (16)$$

Ahora bien, la fuerza total $F(R \text{ sobre } L)$ es proporcionada por la fuerza de rozamiento del amortiguador, dada por el producto entre $-Z_2$

y la velocidad del punto L . Esta velocidad es la superposición de las contribuciones de las ondas incidente y reflejada:

$$\frac{\partial \psi(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_{\text{inc}}(0,t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{\text{ref}}(0,t)}{\partial t}. \quad (17)$$

En consecuencia, el rozamiento $F(R \text{ sobre } L)$ ejercido por el amortiguador, está dado por

$$\begin{aligned} F(R \text{ sobre } L) &= -Z_2 \frac{\partial \psi(0,t)}{\partial t} \\ &= -Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{inc}}(0,t)}{\partial t} - Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{ref}}(0,t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (18)$$

Igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones (16) y (18) encontramos (en $z = 0$)

$$-Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{inc}}}{\partial t} + Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{ref}}}{\partial t} = -Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{inc}}}{\partial t} - Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{ref}}}{\partial t},$$

o sea,

$$\frac{\partial \psi_{\text{ref}}(0,t)}{\partial t} = \left[\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right] \frac{\partial \psi_{\text{inc}}(0,t)}{\partial t}. \quad (19)$$

Coefficiente de reflexión. Entonces tenemos (integrando ambos miembros de la ecuación (19) y suponiendo que no hay constantes de integración)

$$\psi_{\text{ref}}(0,t) = R_{12} \psi_{\text{inc}}(0,t) = R_{12} A \cos \omega t, \quad (20)$$

en donde la cantidad R_{12} , llamada *coeficiente de reflexión* para el desplazamiento ψ , está dada por

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (21)$$

Puesto que la onda reflejada es sinusoidal y se propaga en la dirección $-z$, su forma para $z < 0$ se obtiene de la forma en $z = 0$ haciendo el cambio de variables $z = 0, t$ por $z, t + z/v_\varphi$, donde v_φ es la magnitud de la velocidad de fase. En consecuencia

$$\psi_{\text{ref}}(z,t) = R_{12} A \cos \left[\omega \left(t + \frac{z}{v_\varphi} \right) \right] = R_{12} A \cos (\omega t + kz). \quad (22)$$

El desplazamiento total $\psi(z,t)$ está dado por la superposición

$$\psi(z,t) = \psi_{\text{inc}}(z,t) + \psi_{\text{ref}}(z,t),$$

o sea,

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t - kz) + R_{12}A \cos(\omega t + kz). \quad (23)$$

La fuerza restauradora y el desplazamiento se reflejan con signos opuestos. Las cantidades ondulatorias físicamente interesantes para ondas transversales en una cuerda son no sólo el desplazamiento $\psi(z,t)$, sino también la velocidad transversal $\partial\psi(z,t)/\partial t$ y la proyección transversal de la tensión, $-T_0\partial\psi(z,t)/\partial z$ la que da la fuerza restauradora ejercida por la cuerda a la izquierda de z sobre la cuerda a la derecha de z . De las ecuaciones (19) y (20) vemos que la onda velocidad $\partial\psi(z,t)/\partial t$ tiene el mismo coeficiente de reflexión que la onda desplazamiento $\psi(z,t)$. Sin embargo, la onda “fuerza restauradora” $-T_0\partial\psi(z,t)/\partial z$ tiene un coeficiente de reflexión de igual magnitud que el de $\partial\psi/\partial t$, *pero de signo opuesto*. En consecuencia, tenemos

$$\psi_{\text{inc}} = A \cos(\omega t - kz), \quad \psi_{\text{ref}} = R_{12}A \cos(\omega t + kz); \quad (24)$$

$$\frac{\partial\psi_{\text{inc}}}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kz), \quad \frac{\partial\psi_{\text{ref}}}{\partial t} = R_{12}[-\omega A \sin(\omega t + kz)]; \quad (25)$$

$$\frac{\partial\psi_{\text{inc}}}{\partial z} = kA \sin(\omega t - kz), \quad \frac{\partial\psi_{\text{ref}}}{\partial z} = -R_{12}[kA \sin(\omega t + kz)]. \quad (26)$$

De las ecuaciones (25) vemos que, en $z = 0$, la contribución de la onda reflejada a la velocidad es R_{12} veces la contribución de la onda incidente. De las ecuaciones (26) vemos que, en $z = 0$, la contribución de la onda reflejada a la fuerza restauradora es $-R_{12}$ veces la contribución de la onda incidente. Por lo tanto, podemos resumir las ecuaciones (24), (25) y (26) definiendo *coeficientes de reflexión para ψ , $\partial\psi/\partial t$ y $\partial\psi/\partial z$* :

$$R_{\psi} = R_{\partial\psi/\partial t} = R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (27)$$

$$R_{\partial\psi/\partial z} = -R_{12}. \quad (28)$$

Nótese que R_{12} debe estar entre -1 y $+1$.

Reflexión en una frontera entre medios dispersivos. Suponga que la cuerda con impedancia Z_1 extendida desde $z = -\infty$ hasta $z = 0$ está unida allí a una cuerda de impedancia Z_2 que se extiende hasta $+\infty$. El punto L inmediatamente a la izquierda de $z = 0$ no sabe si el punto R a la derecha de $z = 0$ es el comienzo de una cuerda infinita de impe-

dancia Z_2 o es la terminal de entrada de un amortiguador de impedancia Z_2 . Por consiguiente, los coeficientes de reflexión de las ecuaciones (27) y (28) nos dan nuevamente la onda reflejada en el medio 1. Nótese que $R_{21} = -R_{12}$. Por lo tanto, el signo del coeficiente de reflexión cambia si las propiedades de los dos medios son intercambiadas. Por ejemplo: R_ψ es negativa para una onda incidente desde una cuerda liviana a una pesada (considerando que la tensión es la misma en ambas cuerdas); R_ψ es positiva para una onda incidente, desde una cuerda pesada, sobre una liviana.

Transmisión en una frontera entre medios dispersivos. El punto en $z = 0$ experimenta oscilaciones bajo la fuerza impulsora combinada de las ondas incidentes y reflejada en el medio 1. Por lo tanto actúa como fuente de ondas de propagación que van en la dirección $+z$ en el medio 2. Queremos encontrar las ondas transmitidas de desplazamiento, ψ_2 ; de velocidad transversal $\partial\psi_2/\partial t$ y de fuerza restauradora, $-T_2\partial\psi_2/\partial z$; en donde el subíndice 2 indica la onda transmitida en el medio 2. Utilizaremos las *condiciones de contorno*.

Continuidad y condiciones de contorno. Estas condiciones de contorno son que $\psi(z,t)$ sea la misma inmediatamente a la izquierda que inmediatamente a la derecha de la separación, o sea, *el desplazamiento $\psi(z,t)$ es continuo*. Por consiguiente, *la velocidad $\partial\psi(z,t)/\partial t$ es continua*. Asimismo, *la fuerza restauradora $-T_0\partial\psi(z,t)/\partial z$ es continua*. Las condiciones de contorno sobre continuidad para el desplazamiento y la velocidad de un punto en la cuerda son obvias y no necesitan comentarios. La condición de contorno sobre la fuerza restauradora no es tan obvia. (Por ejemplo, puede haber pensado que debiera ser continua la pendiente $\partial\psi(z,t)/\partial z$ más bien que el producto entre ésta y la tensión. Sin embargo, si la tensión cambia en el contorno, la cuerda presentará allí una "torcedura". La pendiente no será continua, pero sí lo será el producto de la tensión por la pendiente.) Para ver que la fuerza restauradora es continua imagine que hay un elemento infinitesimal de masa en $z = 0$. La cuerda que está a su izquierda ejerce sobre esta masa una fuerza transversal $-T_1\partial\psi_1/\partial z$. La cuerda que está a la derecha de la masa ejerce una fuerza transversal $+T_2\partial\psi_2/\partial z$. La superposición de estas dos fuerzas es la masa del elemento por su aceleración. Pero la masa es nula. Por lo tanto, la superposición es nula:

$$-T_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + T_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0,$$

lo cual significa que $T_0\partial\psi/\partial z$ es continua. (Nota: Estamos usando T_0 para denominar la tensión de la cuerda en general y T_1 y T_2 para las tensiones de equilibrio en los medios 1 y 2.)

Coefficientes de transmisión de amplitud. Sea $\varphi(z,t)$ el desplazamiento la velocidad o la fuerza restauradora. En el medio 1, la función $\varphi_1(z,t)$ es la superposición

$$\varphi_1(z,t) = \varphi_0 \cos(\omega t - k_1 z) + R\varphi_0 \cos(\omega t + k_1 z), \quad (29)$$

donde, de acuerdo con las ecuaciones (27) y (28) el coeficiente de reflexión R es igual a $R_{12} \equiv (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2)$ si $\varphi(z,t)$ representa el desplazamiento o la velocidad, e igual a $-R_{12}$ si $\varphi(z,t)$ representa la fuerza restauradora. En el medio 2 esta misma cantidad es una onda que se propaga sólo en la dirección $+z$. (Esto se debe a que, por hipótesis, la única fuerza impulsora externa está ubicada en $z = -\infty$. Ella produce la onda incidente. La discontinuidad produce las ondas reflejada y transmitida. Sin embargo, no hay nada que produzca una onda que se propague en la dirección $-z$ en el medio 2.) Por lo tanto, podemos escribir la forma de $\varphi_2(z,t)$ y al mismo tiempo definir el *coeficiente de amplitud de transmisión* T :

$$\varphi_2(z,t) = T\varphi_0 \cos(\omega t - k_2 z). \quad (30)$$

La condición de que $\varphi(z,t)$ sea continua en el contorno en $z = 0$ da

$$\varphi_2(0,t) = \varphi_1(0,t),$$

o sea,

$$T\varphi_0 \cos \omega t = \varphi_0(1 + R) \cos \omega t,$$

o sea,

$$\boxed{T = 1 + R}, \quad (31)$$

donde R es R_{12} para ψ y $\partial\psi/\partial t$ y es $-R_{12}$ para la fuerza restauradora, $-T \partial\psi/\partial z$. (Nota: Usamos T mayúscula para la tensión de la cuerda y también para el coeficiente de transmisión. En ejemplos que no sean el de la cuerda esto no causará confusión.)

Obsérvese que, puesto que R debe estar entre -1 y $+1$, T debe caer entre 0 y $+2$. En consecuencia, *el coeficiente de transmisión es siempre positivo*.

He aquí algunos casos límites interesantes:

Caso 1: Compensación de impedancias perfecta

Si $Z_2 = Z_1$, no hay onda reflejada; o sea, R_{12} es cero. El coeficiente de transmisión es la unidad. Nótese que la condición $Z_2 = Z_1$ no implica necesariamente que los dos medios sean idénticos. Si en una unión cambian la densidad de la cuerda y su tensión de tal modo que su producto se mantenga constante, entonces las impedancias $Z_1 = \sqrt{T_1 \rho_1}$

y $Z_2 = \sqrt{T_2 \rho_2}$ son iguales. Sin embargo, las velocidades de fase $v_1 = \sqrt{T_1/\rho_1}$ y $v_2 = \sqrt{T_2/\rho_2}$ no serán las mismas en los dos medios.

Caso 2: Rozamiento infinito

Si Z_2/Z_1 es "infinito", R_{12} es -1 . Entonces el punto $z = 0$ permanece fijo. El desplazamiento y la velocidad tienen coeficientes de reflexión -1 , de modo que las ondas incidente y reflejada en $z = 0$ se superponen para dar desplazamiento y velocidad nulos. Una onda incidente que consiste en un pulso de desplazamiento positivo ("hacia arriba") se convierte, después de la reflexión, en un pulso negativo ("hacia abajo"). La fuerza transversal tiene coeficiente de reflexión $+1$, de modo que la fuerza ejercida sobre la cuerda en $z = 0$ es de igual dirección que en el caso de terminación perfecta (o sea, hacia abajo) pero el doble de lo necesario para producir terminación perfecta. En consecuencia, el exceso de fuerza es hacia abajo, y genera una onda reflejada con amplitud negativa y de igual magnitud que la de la onda incidente.

Caso 3: Rozamiento nulo

Si Z_2/Z_1 es cero, el extremo de la cuerda en $z = 0$ es libre. Entonces allí la pendiente de la cuerda permanece nula. En consecuencia, el coeficiente de reflexión para la fuerza restauradora es -1 . Una onda incidente que consista en un pulso de fuerza restauradora positivo se convierte, después de la reflexión, en un pulso negativo. Los coeficientes de reflexión para el desplazamiento y la velocidad son $+1$, y la cuerda tiene, en $z = 0$, el doble de la velocidad que le correspondería si hubiese compensación perfecta de impedancia. Una onda incidente que consista en un pulso positivo de desplazamiento lo sigue siendo después de la reflexión. Los casos límites en donde Z_2/Z_1 es infinito y cero están ilustrados en las Figs. 5.3 y 5.4.

Forma general de una onda sinusoidal. Cuando en el medio 1 hay una onda incidente y reflejada tenemos:

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t - kz) + RA \cos(\omega t + kz), \quad (32)$$

donde R es el coeficiente de reflexión y cae entre -1 y $+1$. Cuando R es nulo tenemos una terminación perfecta. Entonces $\psi(z,t)$ es una onda de propagación "pura, o sea, que se propaga únicamente en la dirección $+z$. Cuando R es -1 , $\psi(z,t)$ es una onda estacionaria "pura", o sea, con nodos (ceros) permanentes. Hay un nodo en $z = 0$. Cuando R es $+1$, $\psi(z,t)$ es nuevamente una onda estacionaria "pura" con un antinodo (magnitud máxima) permanente en $z = 0$, o sea con un nodo permanente a un cuarto de longitud de onda de $z = 0$. Cuando R no es

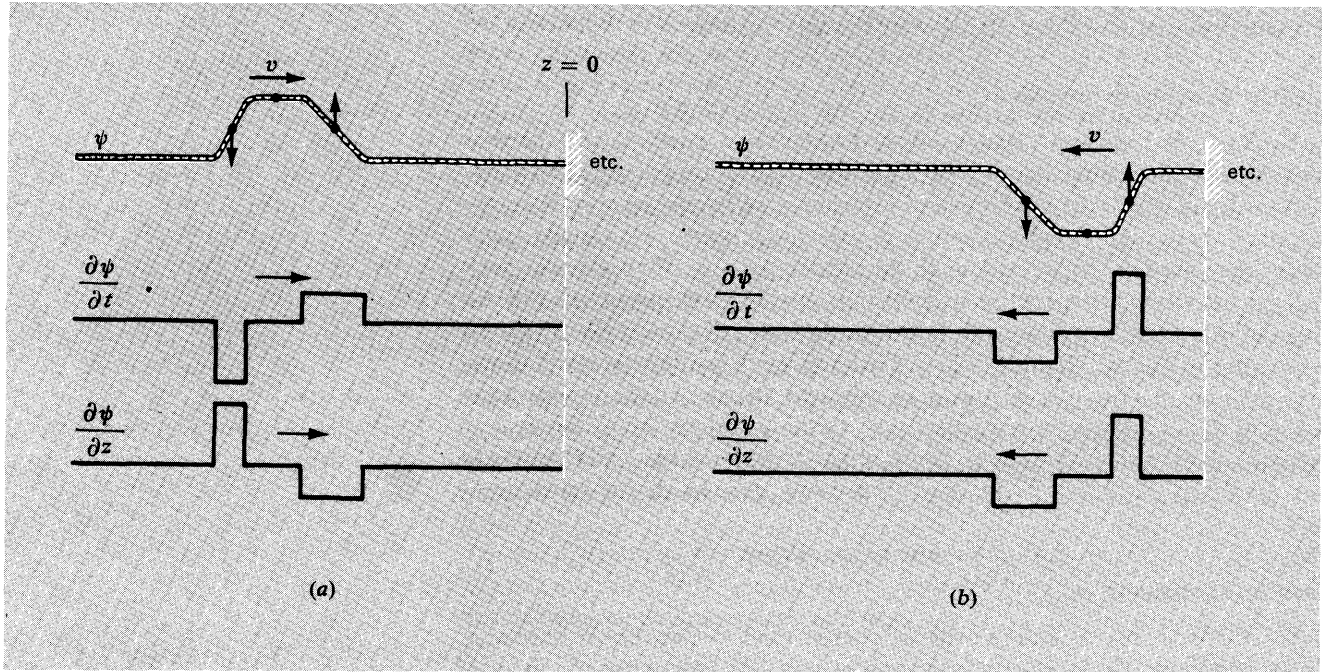


Fig. 5.3 Reflexión de un pulso incidente en un extremo fijo de la cuerda: (a) antes de la reflexión; (b) después de la reflexión. (En $z = 0$ la cuerda está unida a una cuerda con densidad infinita.) Las pequeñas flechas verticales sobre los tres puntos indican la velocidad instantánea de la cuerda en esos puntos. (El punto central representa una flecha de longitud nula.)

ni cero ni ± 1 , $\psi(z,t)$ no es una onda ni puramente estacionaria ni puramente de propagación; es una onda sinusoidal más general. La onda sinusoidal más general (para una frecuencia dada ω) puede escribirse como superposición de ondas estacionarias o como superposición de ondas de propagación (o como alguna combinación de ambas). Por lo tanto, una onda sinusoidal $\psi(z,t)$ puede escribirse de la forma

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t + \alpha) \sin kz + B \cos(\omega t + \beta) \cos kz, \quad (33)$$

lo que es una superposición de *dos ondas estacionarias con nodos desplazados en un cuarto de longitud de onda* y con distintas amplitudes y constantes de fase. Alternativamente, la misma onda $\psi(z,t)$ puede ser escrita en la forma

$$\psi(z,t) = C \cos(\omega t - kz + \gamma) + D \cos(\omega t + kz + \delta), \quad (34)$$

lo que es una superposición de *dos ondas de propagación que se propagan en direcciones opuestas* y tienen amplitudes y constantes de fase diferentes. Por ejemplo, la onda dada por la ecuación (32) está escrita como superposición de ondas de propagación; también podría haberse escrito como superposición de ondas estacionarias. Eso lo dejamos para que lo haga usted. (Prob. 5.20.)

Siguen algunos ejemplos de reflexión.

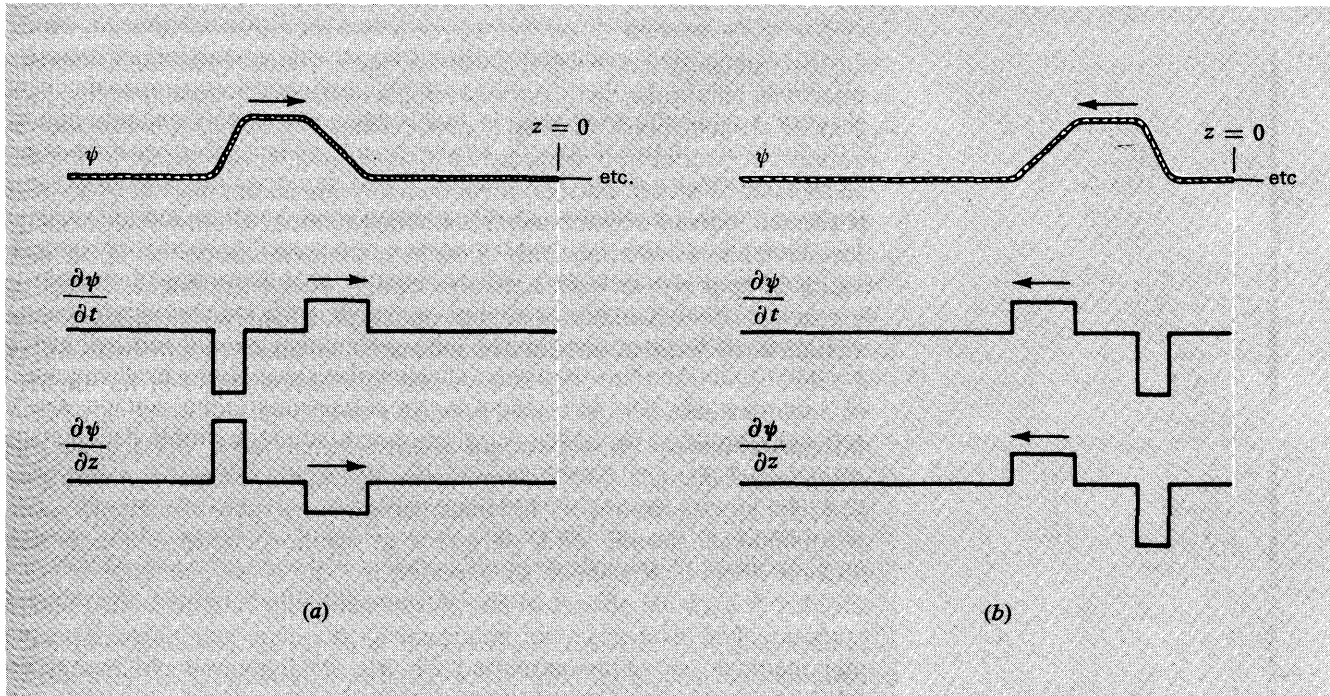


Fig. 5.4 Reflexión de un pulso desde un extremo libre: (a) antes de la reflexión; (b) después de la reflexión. (En $z = 0$ la cuerda está unida a una cuerda de densidad despreciable.)

Ejemplo 3: Reflexión de ondas de sonido

Las ecuaciones de movimiento para ondas de sonido son similares a las correspondientes a ondas longitudinales en un resorte. Éstas, a su vez, son similares a las que corresponden a ondas transversales en una cuerda continua. Sin repetir el trabajo, podemos utilizar los coeficientes de reflexión y transmisión obtenidos para la cuerda. La velocidad del aire está dada por $\partial\psi/\partial t$. La presión $-\gamma p_0 \partial\psi/\partial z$ es análoga a la fuerza restauradora $-T_0 \partial\psi/\partial z$ correspondiente al resorte.

Extremo cerrado. En el extremo cerrado de un tubo, la velocidad promedio de las moléculas de aire en la dirección z (a lo largo del tubo) es cero permanentemente. (Para toda molécula que se mueva hacia la derecha de $+z$ hacia la pared, hay otra que recientemente ha rebotado contra la pared y se mueve hacia la izquierda.) Por lo tanto, la onda de velocidad $\partial\psi/\partial t$ debe tener coeficientes de reflexión -1 en un extremo cerrado, de manera que la superposición de las ondas de velocidad incidente y reflejada dé cero. La otra onda físicamente interesante es la onda de presión “fuerza restauradora” $-\gamma p_0 \partial\psi/\partial z$. De acuerdo al desarrollo matemático que hemos hecho para la cuerda, la onda de presión debe tener un coeficiente de reflexión de igual magni-

tud y signo opuesto al de la onda de velocidad. En consecuencia, la presión debe reflejarse en un extremo cerrado, con coeficiente $+1$. Por consiguiente, la presión tiene, en un extremo cerrado, el mismo signo que para una onda de sonido que termina perfectamente, pero el doble de magnitud. A nivel “microscópico” podemos ver por qué la presión en un extremo cerrado es el doble de lo que sería si el tubo continuase: Presión es fuerza por unidad de área; fuerza es transferencia de momento por unidad de tiempo; una molécula que rebota elásticamente contra una pared invierte la componente z de su momento (si la pared es rugosa, esto se cumple sólo en promedio; y eso es lo que nos interesa). Por lo tanto, transfiere el doble de momento que entregaría si fuese absorbida sin rebotar o si simplemente siguiera por el tubo.

Extremo abierto. En el extremo abierto de un tubo tenemos un problema experimental: No queremos que el aire se escape al vacío. Preguntémonos qué ocurre si hacemos terminar el tubo abriéndolo hacia una habitación grande llena de aire a la misma presión p_0 que el aire del tubo (como se hace en el experimento casero con el tubo de cartón). En el extremo abierto el aire puede correr libremente hacia adentro y afuera. Por lo tanto, allí la velocidad no debe ser necesariamente nula (como lo es en un extremo cerrado). En lugares de la habitación suficientemente alejados del extremo abierto del tubo, la presión p es permanentemente igual a la presión de equilibrio p_0 . En el extremo del tubo, la presión no es exactamente igual a p_0 porque las ondas de presión que emergen de éste todavía se sienten. Tan pronto como una región de compresión (por ejemplo) llega al extremo abierto, el aire puede expandirse hacia los costados, mientras que dentro del tubo el movimiento del aire en la onda de sonido es puramente según z . En consecuencia, la compresión es rápidamente “aliviada”, a medida que aumenta la distancia al extremo del tubo hasta que a cierta distancia dentro de la habitación (que es del orden de un radio del tubo) la presión es esencialmente igual a p_0 . Por lo tanto, en el extremo abierto de un tubo que termina en una habitación grande, la presión es (más o menos) permanentemente nula en un lugar inmediatamente fuera del tubo. Llamemos a ese sitio (aproximado) el extremo abierto “efectivo” del tubo. Puesto que la presión es allí permanentemente nula, el coeficiente de reflexión para la presión en un extremo abierto debe ser -1 . El coeficiente de reflexión para velocidades es, en consecuencia, $+1$. La impedancia Z_2 ofrecida por la habitación es efectivamente nula. (El hecho de que el aire fluya libremente hacia afuera es lo que da impedancia nula. Nuestra fórmula para la impedancia, $Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}$ no puede ser usada para la impedancia ofrecida por la habitación porque está basada en la suposición de movimiento estrictamente longitudinal.)

He aquí una descripción “microscópica” de lo que ocurre en un

extremo abierto efectivo. Considere qué ocurre cuando una compresión llega a un extremo abierto. Antes que lo alcance se está propagando, empujando el aire hacia afuera y transfiriéndole el momento longitudinal, y siendo empujada desde adentro, mientras recibe el momento. Repentinamente la compresión llega a un extremo abierto. El aire se precipita dentro de la habitación sin tener que transferir el momento hacia afuera. Este flujo “excesivo” de aire crea un déficit de presión en el extremo abierto (una rarefacción). El aire que está hacia adentro respecto a esta rarefacción experimenta ahora menos impedancia que lo “usual” y corre a llenar la rarefacción. Esto corre la rarefacción más hacia adentro. Las moléculas que están hacia adentro siguen corriendo, etcétera. Notamos que una compresión que se propaga en la dirección $+z$ ha producido una *rarefacción* que se propaga en la dirección $-z$. Una onda de velocidad consistente en una pulsación, de componente z de la velocidad positiva y que viaja en la dirección $+z$, ha producido una onda de velocidad que viaja en la dirección $-z$ y con componente z de *igual* signo (las moléculas siempre corren en la dirección $+z$ para llenar la rarefacción). Vemos, por lo tanto, que el coeficiente de reflexión para la onda de velocidad es positiva en el extremo abierto y para la onda de presión es negativo.

Longitud efectiva de un tubo de extremos abiertos. La distancia efectiva más allá del extremo abierto de un tubo en el cual la sobrepresión es nula puede definirse experimentalmente de la siguiente manera. Considere un tubo de cartón abierto en ambos extremos. El modo de oscilación libre más bajo es aquel en que la longitud efectiva del tubo es una semilongitud de onda. (En un instante dado, cuando el aire se está precipitando hacia la derecha en el extremo derecho del tubo, está entrando aire raudamente desde la izquierda en el extremo izquierdo. En la mitad del tubo hay un cero permanente de velocidad de aire, o sea un nodo de la onda estacionaria de velocidad. También hay un antinodo de la onda estacionaria de presión). Para encontrar la longitud efectiva del tubo, golpéelo contra algo para oír el tono. (El modo más bajo es el más fácilmente excitado, y en el que oír.) Determine el tono de alguna manera. Calcule la semilongitud de onda del sonido a ese tono (frecuencia). Será un poco más larga que el tubo y puede considerarse como su longitud efectiva. Un método más fácil es usar una frecuencia impulsora standard, o sea, usar un diapasón. Luego variar la longitud del tubo cortando trozos de uno que resulte demasiado largo o deslizando una extensión del tubo (trombón) para variar su longitud. Entone la resonancia. Note que cuando la ha conseguido (o sea, tiene un máximo de sonoridad de la radiación que sale del tubo cuando es impulsada por el diapasón) el tono que oye, para oscilaciones libres obtenidas golpeando el tubo, es el mismo que la frecuencia impulsora del diapasón. En longitudes de “no resonancia”, la frecuencia natural no es la misma que la del diapasón. (¿Qué frecuencia oye cuando im-

pulsa el tubo de “no resonancia” con el diapasón, la frecuencia de oscilación natural o la del diapasón? Vea los Experimentos caseros.)

Ejemplo 4: Reflexiones en líneas de transmisión

Un voltaje impulsor $V(t)$ de un transmisor situado al extremo izquierdo L de una línea de transmisión infinita, de impedancia Z_1 , produce (en la aproximación continua) una onda de propagación de corriente $I(z,t)$ tal que en el transmisor (en $z = 0$) tenemos

$$V_0 \cos \omega t = V(t) = Z_1 I(0,t). \quad (35)$$

las ondas de propagación de corriente y voltaje están dadas por

$$V(z,t) = V_0 \cos(\omega t - k_1 z), \quad I = I_0 \cos(\omega t - k_1 z), \quad V_0 = Z_1 I_0. \quad (36)$$

En un contorno donde la impedancia característica cambia repentinamente de Z_1 a Z_2 , son generadas una onda reflejada y una transmitida. No es necesario repetir los pasos que usamos para la cuerda. Los coeficientes de reflexión y transmisión tienen formas análogas a los correspondientes a ondas en una cuerda y ondas de sonido. Antes de escribir estas fórmulas, consideremos los límites de impedancia Z_2 nula (Ejemplo 5) e infinita (Ejemplo 6) en el extremo de la línea.

Ejemplo 5: Extremo cortocircuitado — impedancia nula

Si el extremo derecho de la línea es cortocircuitado por medio de una conexión a través de un resistor de resistencia despreciable, el voltaje a través de ese extremo es permanentemente nulo. El coeficiente de reflexión de voltaje en un extremo cortocircuitado es, en consecuencia, -1 . La corriente, por otro lado, tiene coeficiente de reflexión $+1$ y el doble del valor (en ese extremo de la línea) que tendría si la línea terminase perfectamente. Un frente de ondas de voltaje positivo viajando en la dirección $+z$ es reflejado como frente de ondas de voltaje negativo. Una onda de corriente positiva es reflejada como tal.

Ejemplo 6: Extremo con circuito abierto — impedancia infinita

Si el extremo derecho es conectado a través de una resistencia infinita (o dejado “abierto” sin ningún resistor), no puede fluir corriente de un conductor al otro. Por lo tanto, en un extremo con circuito abierto, la corriente es permanentemente nula y el coeficiente de reflexión de corriente debe ser -1 . Entonces el coeficiente de reflexión de voltaje es $+1$.

De las consideraciones físicas anteriores podemos deducir que los coeficientes de reflexión para el voltaje V y la corriente I están dados por

$$R_V = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \equiv -R_{12}, \quad R_I = -R_V. \quad (37)$$

Como prueba notemos que para $Z_2 = 0$ (extremo cortocircuitado) la ecuación (37) da $R_V = -1$ como debe ser; para $Z_2 = \infty$ (extremo abierto), $R_I = -1$.

Línea de transmisión de placas paralelas. La impedancia (en statohms) está dada por [ec. (4.140), Sec. 4.4]

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w}. \quad (38)$$

En consecuencia, si (por ejemplo) la separación g se duplica al pasar de la línea 1 a la 2, la impedancia se duplica.

Coefficientes de reflexión para los campos. En lugar de considerar el potencial y la corriente, podemos fijar nuestra atención en los campos eléctrico E_x y magnético B_y . En una línea de transmisión dada el campo eléctrico es proporcional a V y el campo magnético es proporcional a I . Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} gE_x &= V \\ wB_y &= \frac{4\pi}{c} I\mu. \end{aligned} \quad (39)$$

Puesto que una onda reflejada en la línea 1 está en la misma línea de transmisión que la onda incidente, o sea, con la misma separación g , ancho w y permeabilidad μ , vemos que el coeficiente de reflexión para E_x es el mismo que para V y el coeficiente de reflexión para B_y es el mismo que para I . (Para convencerse de que no hay ningún signo menos "extra" relacionando la onda de corriente reflejada y la onda de campo magnético reflejada, haga un diagrama y use su mano derecha.) Por otro lado vemos que el coeficiente de transmisión para gE_x es el mismo que para V . Análogamente, el coeficiente de transmisión para wB_y/μ es igual al de I . Consideremos solamente los coeficientes de reflexión. Entonces tenemos:

$$\text{Campo eléctrico: } R_E = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (40)$$

El campo magnético B_y tiene un coeficiente de reflexión de igual magnitud y signo opuesto al del campo eléctrico E_x .

En el ejemplo 7 consideramos un importante caso especial.

Ejemplo 7: Reflexión en una línea de transmisión con una discontinuidad en ϵ

Suponemos que la geometría de la sección transversal (o sea, ancho w y separación g) no cambia en la frontera y que la permeabilidad magné-

tica μ tampoco cambia. (Muchos medios importantes como vidrio, agua, aire y la ionosfera tienen $\mu = 1$ en buena aproximación.) Entonces, de acuerdo con la ecuación (38), la única cantidad en la impedancia Z , que cambia en la frontera, es la constante dieléctrica ϵ . Entonces Z es proporcional a $1/\sqrt{\epsilon}$ que es igual a $1/n$ donde $n = \sqrt{\epsilon}$ es el índice de refracción (para $\mu = 1$). En consecuencia encontramos (luego de sustituir $Z_1 = 1/n_1$ y $Z_2 = 1/n_2$ en la ecuación (40) y multiplicando por $n_1 n_2$ para simplificar las fracciones)

$$R_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \quad (41)$$

Ahora generalizaremos la aplicación de este resultado. Hagamos infinitas las separaciones de las líneas de transmisión, y hagamos que los anchos crezcan proporcionalmente. Los coeficientes de reflexión para los campos locales no pueden depender de las condiciones de contorno. En consecuencia, la ecuación (41) debería cumplirse aun cuando la onda fuese emitida por una luz de alumbrado lejano o una antena de TV distante. *Los coeficientes dados por la ecuación (41) se cumplen para cualquier onda electromagnética recta y paralela que incida normalmente sobre una superficie en donde la constante dieléctrica cambia bruscamente (dentro de menos de una longitud de onda).*

Podemos aplicar de inmediato este resultado al interesante caso de luz visible.

Ejemplo 8: Reflexión de luz visible

El coeficiente de reflexión dado por la ecuación (41) vale para cualquier onda electromagnética plana que se refleje a incidencia normal en una frontera entre dos medios transparentes (si ambos tienen $\mu = 1$). En consecuencia, tomando el índice de refracción del aire igual a 1 y el del vidrio 1,50, para luz visible; al pasar *de aire a vidrio*, tenemos:

$$R_E = \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{1 - 1,5}{1 + 1,5} = -\frac{1}{5}. \quad (42)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico invierte su signo y su magnitud decrece en un factor de 5 (al pasar de vidrio a aire, el coeficiente de reflexión tiene signo opuesto, por lo tanto vale $+1/5$). El flujo de energía reflejada es proporcional al cuadrado del campo eléctrico. En consecuencia, la fracción de intensidad luminosa reflejada en una superficie aire-vidrio es $1/25$, o sea; a incidencia normal, un 4 % de la intensidad de luz incidente es reflejada. Véase Experimento casero 5.1.

5.4 Compensación de impedancias entre dos medios transparentes

Suponga que deseamos transmitir ondas de propagación de un medio a otro sin generar una onda reflejada. Podemos, por ejemplo, querer transferir energía acústica desde el aire de un altoparlante al aire de la habitación sin que se generen reflexiones. (Las reflexiones no son de desear porque hacen que la impedancia de carga efectiva sentida por el mecanismo impulsor sea una carga parcialmente reactiva con impedancia que varía con la frecuencia dando, quizá, resonancias no deseadas a ciertas frecuencias.) Como ejemplo adicional, podemos estar interesados en transferir ondas de luz visible en un lente o bloque de vidrio sin generar reflexión. (La reflexión puede querer evitarse para no perder intensidad luminosa del haz y también para que no llegue luz reflejada a alguna otra parte del aparato.) También podemos querer desarrollar un método por el cual dos hombres-rana, equipados con aparatos de respiración subacuática, puedan conversar debajo del agua. Cada buceador puede hablar bajo dentro de una máscara facial (que cubra la boca, tanto como la nariz y los ojos), pero muy poco de la onda acústica es transmitida al agua a través del vidrio debido a que el coeficiente de transmisión, T_{12} , es muy pequeño porque la impedancia sónica del agua difiere mucho de la del aire.

La solución del problema de transferir ondas de propagación de un medio a otro sin reflexión se llama *compensación de impedancias*. Discutiremos dos métodos: uno implica una “capa no reflectiva”, el otro implica “gradación” (se ve que ninguno de estos dos métodos soluciona el problema de comunicación de los hombres-rana. La solución se obtiene convirtiendo las audiofrecuencias de la voz a frecuencias supersónicas antes de intentar irradiarlas hacia el agua; a estas frecuencias es más fácil compensar impedancias. Cada buceador está equipado con un transmisor y receptor supersónico y un convertidor de frecuencias).

Capa no reflectora. Suponga que el medio 1 se extiende desde $z = -\infty$ a $z = 0$. Un dispositivo de compensación de impedancia se extiende desde $z = 0$ hasta L . El medio 3 va desde $z = L$ hasta $z = +\infty$. Deseamos compensar las impedancias entre los medios 1 y 3 para ondas de frecuencia angular ω . Esto es, no queremos que haya onda reflejada cuando una onda que viaja en la dirección $+z$ incide desde el medio 1. Ahora bien, no hay manera de que podamos “apagar” la reflexión generada en una discontinuidad de impedancia. El ingenioso truco de compensación de impedancia consiste en utilizar el hecho de que podamos generar *dos* ondas reflejadas, una debida a la discontinuidad en $z = 0$ y la otra, debida a la discontinuidad en $z = L$. Si somos hábiles, podemos disponer las cosas de modo que la *superposición* de estas dos ondas dé una onda total reflejada en el medio 1, con amplitud nula.

Llevemos la región entre $z = 0$ y L con un medio dispersivo de impedancia característica Z_2 . Parece razonable que, si resolvemos el pro-

blema de compensación de impedancias encontraremos que Z_2 está entre Z_1 y Z_3 . Supongamos que ése sea el caso. De acuerdo con nuestra fórmula para coeficientes de reflexión tenemos:

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1 - (Z_2/Z_1)}{1 + (Z_2/Z_1)}, \quad R_{23} = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{1 - (Z_3/Z_2)}{1 + (Z_3/Z_2)}. \quad (43)$$

En consecuencia (suponiendo $Z_1 < Z_2 < Z_3$), los coeficientes de reflexión R_{12} y R_{23} tienen el mismo signo. En principio eso parece descorazonador, porque queremos que las dos ondas reflejadas se cancelen a cero; pero todavía no hemos tenido en cuenta que las dos ondas reflejadas son generadas en dos lugares distintos $z = 0$ y $z = L$. Sigamos ahora una cresta dada de onda incidente: en $z = 0$ la onda es parcialmente reflejada (con coeficiente R_{12}) y parcialmente transmitida con coeficiente de transmisión T_{12} que es siempre positivo. La onda transmitida se propaga hasta $z = L$, en donde es parcialmente reflejada con coeficiente R_{23} y parcialmente transmitida. La onda reflejada vuelve a $z = 0$, donde es parcialmente transmitida con coeficiente T_{21} . En consecuencia, emerge al medio 1 en $z = 0$ viajando en la dirección $-z$, con amplitud dada por la amplitud de la onda incidente multiplicada por $T_{12}R_{23}T_{21}$, y con una constante de fase que difiere de la correspondiente a la onda reflejada en la primera superficie debido al tiempo empleado en recorrer, de “ida y vuelta”, una distancia total $2L$ en el medio 2. Por lo tanto, en el medio 1 tenemos:

$$\psi_{\text{inc}} = A \cos(\omega t - k_1 z), \quad (44)$$

$$\psi(\text{ref en } z = 0) = R_{12}A \cos(\omega t + k_1 z), \quad (45)$$

$$\psi(\text{ref en } z = L) = T_{12}R_{23}T_{21}A \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L), \quad (46)$$

donde $-2k_2 L$ es la fase (en radianes) correspondiente a una propagación de ida y vuelta equivalente a la distancia $2L$, con número de onda angular k_2 . (El signo menos se debe a que tenemos un *retardo* de fase, o sea una demora.) La onda incidente y las dos reflejadas dadas por las ecuaciones (45) y (46) están indicadas en la Fig. 5.5.

Aproximación de pequeña reflexión. Aparte de las dos ondas reflejadas mostradas, hay un número infinito de ondas reflejadas adicionales indicadas por el rayo marcado como “etc.” en la Fig. 5.5. Ahora bien, en todas nuestras aplicaciones, Z_1 , Z_2 y Z_3 , no difieren demasiado y por lo tanto los coeficientes de reflexión son pequeños en relación a la unidad. En ese caso, se ve que las dos primeras ondas reflejadas (o sea, las mostradas) dominan, y podemos, en buena aproximación, despreciar las contribuciones adicionales debidas a reflexión interna múltiple. Por ejemplo, el siguiente rayo reflejado a agregar a los dos mostrados es

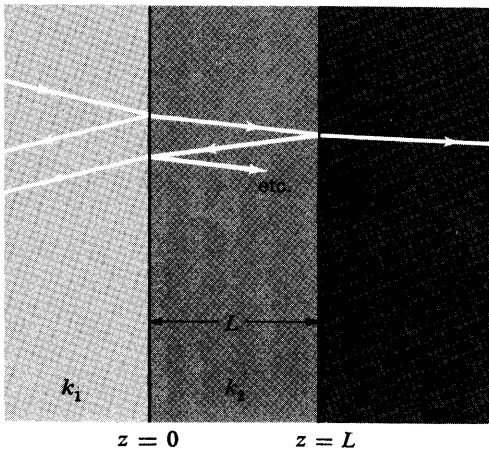


Fig. 5.5 Onda incidente y las dos primeras ondas reflejadas. Los rayos se han dibujado en incidencia no normal para evitar superposiciones en el esquema.

menor en amplitud respecto al segundo en un factor $R_{21}R_{23}$. Podemos despreciar este factor en comparación con la unidad si, por ejemplo, R_{21} y R_{23} son del orden 0,1. Con el mismo grado de aproximación podemos reemplazar $T_{12}T_{21}$ por la unidad en la ecuación (46).

$$T_{12}T_{21} = (1 + R_{12})(1 - R_{12}) = 1 - R_{12}^2 \approx 1. \quad (47)$$

Por lo tanto, en la *aproximación de pequeña reflexión*, la onda reflejada total es la suma de las contribuciones en $z = 0$ y $z = L$ dada por [usando la ec. (47) en la ec. (46)]

$$\psi_{\text{ref}} \approx R_{12}A \cos(\omega t + k_1 z) + R_{23}A \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L), \quad (48)$$

en donde la cantidad $2k_2 L$ da el corrimiento de fase de “ida y vuelta”.

Solución para capa no reflectora. Ahora tenemos a mano la solución al problema de compensación de impedancia: Primero, se elige Z_2 de tal manera que $R_{12} = R_{23}$, o sea [de acuerdo a la ec. (43)]

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_2}{Z_3}, \quad Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}. \quad (49)$$

Entonces, la ecuación (48) queda

$$\psi_{\text{ref}} \approx R_{12}A [\cos(\omega t + k_1 z) + \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L)]. \quad (50)$$

Ahora se elige la longitud L de forma que las dos contribuciones a esta superposición se cancelen mutuamente a cero, o sea de modo que tengamos “interferencia completamente destructiva”. Ése será el caso si $2k_2 L$ es π , o sea, si la distancia de ida y vuelta, $2L$, es media longitud de onda en el medio 2. *La onda reflejada total es nula si Z_2 es la media geométrica de Z_1 y Z_3 y si el espesor L de la capa no reflectiva es un cuarto de longitud de onda de la onda en la capa.*

Ejemplo 9: Compensación de impedancias ópticas

Cuando un haz de luz visible pasa a través de una plancha de vidrio, atraviesa dos superficies. En cada una de ellas la *intensidad* experimenta una reflexión dada por el cuadrado del coeficiente de reflexión de amplitud (puesto que la intensidad es proporcional al promedio temporal del cuadrado del campo eléctrico). Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (42), Sección 5.3, hay una pérdida de $(1/5)^2 = 1/25 = 4\%$ de intensidad en cada superficie. Para transmisión a través de las dos superficies de una plancha de vidrio hay una pérdida del 8%. (Estamos despreciando la “interferencia” debida a la superposición de ondas provenientes de las dos superficies. Para luz visible “blanca” común

estos efectos de interferencia son nulos cuando se promedian sobre una amplia banda de colores. Véase, sin embargo, el Experimento casero 5.10.) Esta pérdida es intolerable en un instrumento óptico que tiene muchas interfases vidrio-aire. Consecuentemente, es práctica común “revestir” los lentes con una capa no reflectiva. De acuerdo a nuestros resultados ec. (49), la impedancia del revestimiento debe ser la media geométrica de las impedancias de aire y vidrio. Por lo tanto, el índice de refracción del revestimiento debe ser la raíz cuadrada de 1 por n , o sea, para vidrio debe tener índice $\sqrt{1,50} \approx 1,22$. También debe tener un espesor de $(1/4)\lambda_2$, donde λ_2 es la longitud de onda de la luz en el revestimiento. Para la luz de longitud de onda en el vacío de 5500 Å, la longitud de onda en la capa es $5500/1,22 = 4500$ Å. Por lo tanto, el espesor del revestimiento debe ser $4500 \text{ Å}/4 = 1120 \text{ Å} = 1,12 \times 10^{-5} \text{ cm}$. Esto puede lograrse colocando la pieza de vidrio a revestir, por ejemplo un lente, en una cámara de vacío que contiene un pequeño crisol en el cual se calienta el material hasta que se evapora. Las moléculas del material evaporado vuelan en línea recta en todas direcciones y eventualmente revisten la lente del lado que mira hacia el crisol. He aquí una interesante pregunta: Suponga que la lente de vidrio ha sido revestida con una capa no reflectora de espesor $(1/4)\lambda_2$ para luz verde de longitud de onda 5500 Å. Entonces hay reflexión nula de luz verde. ¿Cuál es la intensidad reflejada para otros colores? Véase Problema 5.21.

Lámina con gradación. Una característica posiblemente problemática de la capa no reflectora de $(1/4)\lambda$ es que funciona bien sólo a ciertas frecuencias. Si disponemos de suficiente espacio, podemos hacer algo mucho mejor. Suponga que L es grande en comparación con cualquiera de las longitudes de onda que deseamos transmitir sin reflexión. Hagamos que la impedancia cambie gradualmente en la distancia L . En cualquier cuarto de longitud de onda la impedancia cambia muy poco. Para simplificar, pensemos que la impedancia va aumentando en una serie de pequeñas etapas discretas, alcanzándose una nueva etapa toda vez que la distancia z aumenta $1/4\lambda$ para alguna longitud de onda de entre las que estamos interesados en transmitir. Nos libraremos de todas las ondas reflejadas si la amplitud reflejada en una etapa en la posición z es cancelada con la que se refleja en la siguiente etapa que está a una distancia $\Delta z = 1/4\lambda$ hacia adelante. (Estamos despreciando las reflexiones múltiples.) Ahora bien, la reflexión en una delgada etapa en donde la impedancia va de Z_1 a $Z_2 = Z_1 + \Delta Z$ está dada por el coeficiente de reflexión infinitesimal ΔR , donde

$$\Delta R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \approx \frac{-\Delta Z}{2Z} \approx \frac{-1}{2Z} \left[\frac{dZ(z)}{dz} \right] \left(\frac{1}{4} \lambda \right). \quad (51)$$

Si la reflexión desde una pequeña etapa va a ser cancelada por la que proviene de la siguiente etapa, a $1/4\lambda$ más adelante, ΔR debe ser cons-

tante, independiente de z . Llamémosle α . Entonces haciendo $\Delta R = \alpha$ en la ecuación (51) queda

$$\frac{dZ}{Z} = -\frac{8\alpha}{\lambda} dz. \quad (52)$$

Ejemplo 10: Corneta exponencial

Si hacemos a λ constante, independiente de z , como, por ejemplo, para ondas de sonido en el aire de un tubo cuya impedancia cambia porque el diámetro no es constante, entonces la integración de la ecuación (52) da una dependencia exponencial de Z respecto a la distancia, como puede fácilmente demostrarse.

En altoparlantes de audio de alta fidelidad, se usa comúnmente una corneta exponencial de compensación de impedancia de modo tal que un pistón parlante de área A_1 puede transferir energía acústica a la habitación sin reflexión. En ese caso, la impedancia ofrecida al mecanismo que impulsa a A_1 puede ser elegida en forma conveniente a las propiedades de ese mecanismo. Si, en cambio A_1 fuese el área de un tubo cilíndrico impulsado por el mecanismo impulsor del parlante en un extremo, y el tubo, sin abocinar, terminara repentinamente en la habitación, entonces el tubo resonaría a toda longitud de onda para la cual el extremo abierto y el impulsado fueren antinodos de velocidad. Eso haría un revoltijo con la música.

Ejemplo 11: Gradación del índice de refracción

Análogamente, se puede conseguir compensación óptica de impedancias por el método de gradación del índice de refracción revistiendo el elemento óptico en cuestión con sucesivas capas delgadas de una mezcla variable de sustancia con índice de refracción variando desde n_1 a n_2 . Así puede hacerse que el índice vaya cambiando gradualmente de n_1 a n_2 . Este método es mejor que una única capa no reflectora pero más complicado técnicamente. En este caso, la dependencia deseable respecto a z no es exponencial. ¿Por qué? (Véase Prob. 5.22.)

5.5 Reflexión en películas delgadas

Franjas de interferencia. Cualquier caja de una docena de portaobjetos proporcionará varios ejemplos de dos placas pegadas que muestran “franjas de interferencia” vistosamente coloreadas. Análogamente, una gota de aceite de máquina liviano, colocada sobre una superficie de agua caliente se expandirá y, cuando sea suficientemente fina, mostrará la misma clase de franjas de interferencia coloreadas. Estas franjas se deben a la interferencia entre la luz reflejada en las superficies anterior y posterior de la película delgada. Supongamos, por ejemplo, que tenemos una delgada película de aire entre dos portaobjetos. Cuando las superfi-

cies se tocan, la película de aire tiene espesor nulo y, por supuesto, no hay reflexión. Eso puede ser “tomado en cuenta” notando que, siendo $R_{21} = -R_{12}$, la reflexión desde la primera superficie tiene signo opuesto a la que ocurre en la segunda, y, puesto que no hay corrimiento de fase introducido por una distancia de “ida y vuelta” nula, las dos contribuciones se cancelan mutuamente. (Si no lo hicieran tendríamos una paradoja y ¡toda la teoría de la óptica se vendría abajo!) Si ahora se aumenta el espaciamiento desde cero a $(1/2)\lambda$, entonces la distancia de “ida y vuelta” es λ . La fase relativa de las dos contribuciones es así aumentada en 2π y nuevamente tenemos reflexión neta nula. A medio camino entre estos ceros sucesivos de reflectividad, la reflexión es máxima. Por lo tanto, para un color dado, los máximos de reflexión tienen lugar cuando el espesor es $(1/4)\lambda, (3/4)\lambda, (5/4)\lambda, \dots$

Experimento casero

Ejemplo 12: ¿Por qué la primera franja es blanca?

Tomemos un portaobjetos limpio. Presionando los dos cristales al mismo tiempo que deslizamos uno sobre otro podemos lograr que se junten en contacto íntimo. (¡No hay que apretar demasiado; el vidrio se rompe!) Mantenga ambos cristales de modo que pueda ver la reflexión de una fuente amplia de luz como puede ser el cielo o una lámpara con vidrio esmerilado. Pongamos una tela oscura o algo similar debajo del portaobjetos como para reducir la luz de fondo. Ahora veremos “contornos” concéntricos que consisten en franjas coloreadas. El centro del patrón es negro. Ésta es la región entre el espesor cero y el primer máximo de luz reflejada. La primera “franja” (máximo de luz de cielo o de lámpara, reflejada) es de color esencialmente “blanco”. Veamos por qué ocurre así. El verde está en el centro del espectro visible y corresponde a $\lambda \approx 5500 \text{ Å} = 5,5 \times 10^{-5} \text{ cm}$. El espesor de la película de aire entre los cristales es aproximadamente $(1/4) 5,5 \times 10^{-5} = 1,37 \times 10^{-5} \text{ cm}$ en el centro de la primera franja verde. El azul tiene $\lambda \approx 4,5 \times 10^{-5} \text{ cm}$; en consecuencia, este mismo espesor corresponde a una fracción de longitud de onda $(1,37/4,5)\lambda = 0,30\lambda$ para el azul. Análogamente, para el rojo ($\lambda \approx 6,5 \times 10^{-5}$) este espesor es una fracción $(1,37/6,5)\lambda = 0,21\lambda$. Por lo tanto, el azul y el rojo están *también* cerca de su reflectividad máxima (correspondiente a $1/4\lambda$) en la primera franja del verde. Por eso esta primera franja es blanca.

La franja más bonita. Las sucesivas franjas son más y más coloreadas. La más monocromática será aquella donde el espesor es algún número impar N de cuartos de longitud de onda para el verde ($3/4, 5/4, \dots, N/4$) y donde el azul está a alrededor de $N + 1$ y el rojo a $N - 1$ cuartos de longitud de onda. Entonces el azul y el rojo están en mínimos de reflexión y la franja será tan verde como sea posible. El número N para la *franja más bonita* es una constante de la naturaleza que tal vez conoceremos. (Véase Prob. 5.23.)

Expresión para la intensidad de las franjas. Podemos obtener una expresión para la intensidad de un color dado reflejado desde una película de aire entre dos placas de vidrio (o para un trozo de vidrio delgado en el aire) adaptando adecuadamente nuestros resultados anteriores para la reflexión desde dos discontinuidades que separan los medios 1, 2 y 3. En el presente ejemplo, el medio 3 es de la misma clase que el 1. Por lo tanto $R_{23} = R_{31} = -R_{12}$. Entonces, se puede demostrar que la fracción de intensidad reflejada en promedio temporal está dada por (Prob. 5.24)

$$\frac{I_{\text{ref}}}{I_0} = R_{12}^2 \sin^2 k_2 L. \quad (53)$$

Para vidrio a aire o aire a vidrio, tenemos $R_{12}^2 = 0,04$. Por lo tanto,

$$\frac{I_{\text{ref}}}{I_0} \approx 0,16 \sin^2 k_2 L, \quad (54)$$

que vale cero para $L = 0$ y para $L = 1/2\lambda_2$ y alcanza su primer máximo en $L = 1/4\lambda_2$. Obsérvese que la máxima intensidad fraccional reflejada desde la película es 0,16; esto es, cuatro veces la intensidad fraccional que se refleja desde una interfase aire-vidrio única.

¿Es uno más uno igual a cuatro? ¿Cómo podemos sumar la intensidad proveniente de una superficie a otra intensidad igual, proveniente de la otra superficie, y obtener un total de cuatro veces la intensidad? De la misma manera que podemos sumarlas para obtener cero: $(1 + 1)^2 = 4$; $(1 - 1)^2 = 0$. *Primero* superponga las ondas, *luego* eleve al cuadrado y haga el promedio temporal para obtener la intensidad.

Obsérvese que si busca franjas coloreadas de la película de aire entre los dos cristales del portaobjetos, los máximos coloreados tienen intensidad fraccional 0,16. La intensidad fraccional de la luz de fondo proveniente de la superficie exterior del cubreobjetos es 0,04; la correspondiente al porta es 0,04. [No se nota la interferencia entre las superficies mencionadas porque es de un orden tan grande (o sea, ocurre a un número tan grande de cuartos de λ) que los colores se superponen completamente.] Por lo tanto, las bandas coloreadas son el doble de intensas que la luz de fondo y son fáciles de ver (especialmente si se coloca una tela oscura debajo del portaobjetos de modo que no haya fondo adicional).

Ejemplo 13: Franjas de Fabry-Perot en un portaobjetos

Si utilizamos una fuente de luz suficientemente monocromática, puede fácilmente observarse franjas de interferencia debidas a la superposición

de las amplitudes de luz reflejadas desde las dos superficies de un porta-objetos común o una hoja de vidrio de ventana. Una descripción completa de estas franjas requiere el cálculo del coeficiente de reflexión para incidencia no normal además de para incidencia normal. Eso se hace fácilmente, pero no lo haremos aquí. Sólo consideraremos la franja central, o sea, la correspondiente a incidencia normal, y preguntaremos: “¿Hasta qué punto será monocromática la fuente luminosa?” La respuesta puede obtenerse de la ecuación (53). Suponga que $L = 1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$. Si está presente un único número de onda k_2 , entonces esta franja central es un máximo o un mínimo según $\sin^2 k_2 L$ sea 1,0 ó 0,0. Si está presente una banda de números de onda Δk_2 , si es demasiado ancha, algunos números de onda corresponderán a un máximo y algunos a un mínimo y la franja estará “borrada”. ¿Cuál será la estrechez de la banda para obtener una buena franja central visible? (Podemos suponer que las franjas para incidencia no normal también serán fácilmente visibles si la franja central lo es.) Los máximos sucesivos de la ecuación (54) están separados por un aumento de π en $k_2 L$. Como criterio grosero, podemos decir que si $(\Delta k_2)L$ fuera menor que π , deberíamos obtener franjas buenas. Entonces puede demostrar que el ancho de banda requerido es (Prob. 5.25)

$$\Delta(\lambda^{-1}) \approx 3,3 \text{ cm}^{-1}, \quad (55)$$

o sea,

$$\Delta\nu = c \Delta(\lambda^{-1}) \approx 10^{11} \text{ Hz};$$

o sea, si tomamos $\lambda \approx 5,5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ (luz verde)

$$\Delta\lambda \approx 1,0 \text{ Å}.$$

Por lo tanto, se requiere que el ancho de banda sea $3,3 \text{ cm}^{-1}$ (éstas unidades son de uso común en espectroscopia). Como veremos en el Capítulo 6, el ancho de banda $\Delta\nu \approx 10^9 \text{ Hz}$ es aproximadamente el “ancho de línea natural” para un átomo que decae libremente. Eso es difícil de mejorar (excepto con un laser). Por lo tanto, para observar franjas de interferencia en un vidrio de ventana, podemos usar una buena fuente de luz de átomos que decaigan libremente. Una lámpara de neón servirá perfectamente. (Véase Exp. casero 5.10.) ¡También sirve una bola de papel higiénico encendida! (Véase Exp. casero 9.27.)

Problemas y experimentos caseros

Experimento casero

5.1 Reflexión en un vidrio. Una plancha de vidrio plana refleja aproximadamente un 8 % de luz incidente para incidencia normal, siendo reflejado un 4 % desde cada superficie. Un espejo plateado común refleja más del 90 % de

la luz visible. Tome un espejo y un trozo de vidrio limpio (por ejemplo, un portaobjetos). Compare las reflexiones desde el espejo y el vidrio manteniéndolos juntos de modo de poder ver las dos reflexiones al mismo tiempo. Observe la reflexión de una fuente de luz amplia como una lámpara, o un trozo de papel blanco, o el cielo. Compare la reflectividad del portaobjetos y la del espejo a incidencia casi normal. *Haga ahora lo mismo a incidencia casi rasante.* A esta incidencia, la fuente, la reflexión en el espejo y la reflexión en el portaobjetos debieran ser casi indistinguibles; o sea, obtiene casi 100 % de reflexión a incidencia casi rasante. A incidencia casi normal, en el vidrio debiera ser notablemente menos intensa que en el espejo.

Tome ahora cuatro portaobjetos limpios. Colóquelos uno encima de otro en una serie de "escalones" siendo el primero, el "piso", el segundo, el primer "escalón" y los dos restantes un segundo "escalón" de altura doble. Así podrá comparar simultáneamente reflexiones a incidencia casi normal desde uno, dos y cuatro portaobjetos. Observe una fuente amplia (el cielo) reflejada a incidencia casi normal. Despreciando la complicación de las reflexiones internas, deberá *transmitirse* alrededor de 0,92 a través de cada portaobjetos. Por lo tanto, cuatro portaobjetos debieran transmitir $(0,92)^4 = 0,72$, y reflejar $1 - (0,92)^4 \approx 0,28$.

Ahora hagamos una *pila* de unos doce portaobjetos limpios; debieran reflejar $1 - (0,92)^{12} = 0,64$. Comparemos con el espejo. Supongamos que la fórmula sigue siendo válida (y los portaobjetos están limpios). ¿Cuántos portaobjetos igualarán a un buen espejo si éste refleja un 93 % de la intensidad? Pruébelo; compare el primero de los portaobjetos con el espejo a incidencia casi normal. Observe también directamente la fuente a través del primero para ver la luz transmitida. (Hacen falta unos 32 portaobjetos, de acuerdo con la fórmula. No es preciso decir que deben estar libres de impresiones digitales.) (Los portaobjetos cuestan 35 centavos la docena. Tres docenas es una buena inversión para experimentos caseros.)

5.2 Interferencia en películas delgadas. (Véase Sec. 5.5.) Llene un recipiente grande con agua caliente. Ponga una gota de aceite transparente en el agua y observe cómo se dispersa. (Use un aceite ligero; el aceite para ensalada es muy pesado y no se dispersa.) Mire al cielo (u otra fuente de luz extensa) reflejada en la película de aceite a medida que ésta se extiende. (Una tela o papel negro en el fondo del recipiente lo ayudará dando un fondo oscuro y eliminando reflexiones indeseables desde el fondo del recipiente.) Debe observar que no aparecen franjas coloreadas hasta que la película se extiende hasta unos 10 por 10 cm aproximadamente. ¿Por qué ocurre esto? Observe las franjas coloreadas mientras la película continúa extendiéndose. Cuando sea lo suficientemente delgada, no obtendrá más franjas, será "negro" donde el aceite es más delgado. Ésa es la región donde el espesor de la película es menor que un cuarto de longitud de onda. *Sírvase de este hecho para estimar en forma aproximada la longitud de la luz visible.* Considere (para un cálculo) que la región "negra" es un octavo del espesor de la longitud de onda; calcule el área de la película y tenga en cuenta el tamaño original de la gota para hallar el espesor de la película que, entonces nos da la longitud de onda.

Experimento casero

5.3 Ondas estacionarias transitorias en un resorte muy extensible ("slinky"). Sujete un extremo de un resorte de este tipo a un poste telefónico o algo así. Sostenga el otro extremo. Estírelo unos 30 pies aproximadamente. Agite el extremo 3 ó 4 veces tan rápidamente como pueda. Un paquete de ondas se propaga entonces a través del medio elástico. Después que se haya divertido lo suficiente siguiendo los paquetes en su ir y venir intente algo nuevo. Esta vez, fije su atención en una región cercana al extremo fijo. Cuando el paquete de onda llega, se refleja y retorna, podrá ver *ondas estacionarias transitorias* durante el intervalo de tiempo en que los paquetes de onda incidentes y reflejados se superponen. (Puede ayudarse fijando ambos extremos del resorte, de modo que pueda observar el proceso en un rango cercano a "un extremo.") Esto le

Experimento casero

ayudará a convencerse de que una onda estacionaria siempre puede considerarse como la superposición de dos ondas propagándose en direcciones opuestas.

Experimento casero

5.4 Reflexiones internas múltiples en un portaobjetos. Haga un esquema mostrando un rayo que llega desde la izquierda e incide sobre una placa de vidrio inclinada un cierto ángulo. Muestre el primer rayo transmitido, el segundo (es decir, el transmitido después de dos reflexiones internas), el tercero... Ahora mire hacia una fuente lineal o puntual, a través de un portaobjetos. Manténgalo cerca de su ojo. Comenzando con incidencia normal incline gradualmente el portaobjetos. Busque las "fuentes virtuales" debidas a reflexiones múltiples. (El efecto es mayor cerca de la incidencia rasante.) Busque también la luz emergente, no por transmisión hacia afuera de la placa sino desde el extremo. Esta es la luz "atrapada internamente", que escapa cuando alcanza el extremo de la superficie con incidencia casi normal en vez de hacerlo con incidencia casi rasante en la que encuentra los costados del portaobjetos.

5.5 Reflexiones en líneas de transmisión. Suponga que una línea coaxial de transmisión de 50 ohms de impedancia característica, se conecta a una de 100 ohms de impedancia característica.

(a) Una pulsación de potencial de 10 voltios (valor máximo) incide desde la línea de 50 ohms hacia la de 100 ohms. ¿Cuál es la "altura" (en voltios, incluyendo el signo) de la pulsación reflejada?

(b) Una pulsación de + 10 voltios incide desde la línea de 100 Ω hacia la de 50 Ω . ¿Cuáles son las alturas de las pulsaciones reflejada y transmitida?

5.6 Acoplamiento de impedancia irreversible. Considere las líneas de transmisión del Prob. 5.5.

(a) ¿Cómo se puede insertar una resistencia común de modo que una pulsación incidente que va desde la línea de 50 Ω a la de 100 Ω se transmita sin generar ningún pulso reflejado? Se desea conocer cuántos ohms tiene la resistencia y un diseño esquemático que muestre el conductor central y el externo de cada una de las líneas en la juntura y que muestre el resistor conectado. (No se preocupe tratando de "distribuir" el resistor. Si la longitud de onda es larga comparada con el diámetro del cable, no es necesario distribuir la resistencia.)

(b) ¿Cuál es el tamaño de la pulsación transmitida? (Suponga que incide una pulsación de 10 voltios.)

(c) Ahora suponga que una pulsación de 10 voltios es enviada a través de la línea en la dirección "errónea"; o sea, desde la línea de 100 Ω a la de 50 Ω . ¿Qué ocurre? Encuentre las alturas de las pulsaciones reflejada y transmitida.

(d) Luego considere el problema de transmitir una pulsación desde la línea de 100 Ω a la de 50 Ω sin generar ninguna reflexión. ¿Cuál deberá ser el valor de la resistencia y cómo deberá ser conectada en el lugar en que se unen las dos líneas? ¿Cuál es la altura de la pulsación transmitida si inciden 10 voltios? ¿Qué ocurrirá cuando la pulsación de 10 voltios incida en la dirección inversa, o sea, desde la línea de 50 Ω a la de 100 Ω ?

5.7 Luz de longitud de onda $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ incide normalmente sobre una serie de dos discos plásticos transparentes separados por una distancia grande respecto a la longitud de onda. Si el índice de refracción de los discos es $n = 1,5$, ¿qué fracción de la luz es transmitida? Desprecie absorción, reflexiones múltiples internas y efectos de interferencia.

Resp. $I_t/I_0 = 0,85$.

5.8 Compare los coeficientes de reflexión de amplitud y de intensidad para luz con incidencia normal sobre una superficie lisa de agua (índice $n = 1,33$) para los dos casos de incidencia, del aire al agua y del agua al aire.

5.9 Reflexiones en una lámina delgada de aire. Suponga que tiene dos planchas planas de vidrio tocándose en un extremo y apartadas por una hoja de papel en el otro extremo, que está a una distancia L del extremo en que tocan. Suponga que el espesor del papel, es como el de una página de este libro. (¿Cómo podría medir esto sin un micrómetro?) Suponga que quiere que las franjas sucesivas de luz verde estén separadas por 1 mm de modo que las pueda ver fácilmente. ¿Cuán larga debe ser la longitud de la cuña?

5.10 Franjas de Fabry-Perot en el cristal de una ventana. Para esta experiencia se necesita una fuente de luz extensa y casi monocromática. La mejor fuente económica que conozco es la lámpara General Electric NE-40 (disponible, por ejemplo, en Brill Electronics 610 E, 10th St., Oakland, Calif. 94604; precio de catálogo 2,56 \$ US). Esta provee un disco circular de neón incandescente de un diámetro aproximado de 2,5 cm. Está atornillado directamente en el hueco de una lámpara 60 cps 115 volts. (Cualquier lámpara de neón trabajará casi del mismo modo; por ejemplo, un probador de continuidad de los que se obtienen en cualquier ferretería cuesta menos de 1 dólar.) Encienda la lámpara y mire hacia ella con la red de difracción (mantenga la red cerca del ojo). De esta forma podrá ver (en el espectro de primer orden, que aparece alrededor de los 15 ó 20 grados, al lado de la luz naranja central) al menos tres fuentes virtuales claramente definidas. Las tres más brillantes son una amarilla, una naranja y una roja. (Realmente hay alrededor de una docena de "líneas" brillantes en el amarillo, naranja y rojo.) El hecho de que las fuentes virtuales de luz estén claramente definidas y no mezcladas en ángulo, muestra que cada color particular es un fuente de luz monocromática (dentro de los límites de resolución del observador). Cada una corresponde a diferentes transiciones atómicas de átomos excitados de neón. El experimento es éste. Tome un trozo de vidrio común. Un portaobjetos del microscopio, un vidrio de ventana o la misma ventana de su habitación pueden servir. Sosteniendo la lámpara de neón cerca de su nariz, mire sobre la parte superior de la lámpara y observe la reflexión de la misma en el pedazo de vidrio. Si ve dos reflexiones, tome otro vidrio. (Las ventanas tienen cuñas después de muchos años de lento flujo viscoso del vidrio.) Busque "franjas", o sea, "líneas de contorno" con regiones alternadamente brillantes y oscuras en la imagen de la lámpara. Luego de un minuto de examen, las verá. Una vez encontradas, son fáciles de ver. (El vidrio debe estar aproximadamente a dos pies de usted.) Las franjas se deben a interferencias entre las superficies anterior y posterior del vidrio. Para probarlo adhiera un trozo de cinta transparente en una superficie y mantenga el vidrio primero con esa superficie cerca y después lejos. Busque las franjas en la imagen cuando la cinta adhesiva está en la región de la imagen reflejada. El lado adhesivo de la cinta es "ópticamente rugoso", o sea, hay irregularidades menores que la longitud de onda de la luz y más finas, en una escala transversal, que el espaciamiento de las franjas. En algunas regiones pequeñas, la luz va desde el vidrio a la cinta sin reflexión (el índice de la cinta es aproximadamente igual al del vidrio) y no se refleja hasta que alcanza la superficie exterior, lisa, de la cinta adhesiva. En otras zonas muy chicas, la superficie adhesiva no toca el vidrio y la reflexión ocurre en la superficie vidrio-aire (el aire entre el vidrio y el lado adhesivo de la cinta). Ahora puede usar la obtención y observación de las franjas como una forma de saber si una lámina de plástico, vidrio o celofán es "ópticamente lisa" en una escala transversal del orden del ancho de la franja. La cinta transparente tipo Scotch no lo es, el vidrio sí. Ponga a prueba las piezas de polaroid y las láminas de cuarto de onda y de media onda, de su caja de óptica. ¿Son planas en menos de una longitud de onda? Pruebe el filtro rojo de gelatina. ¿Es "ópticamente liso"? (Puede tener dificultades para encontrar un buen lugar plano para obtener una imagen reflejada decente.)

Una lámpara fluorescente común también sirve aunque no tanto como una

Experimento casero

lámpara de neón; pero es quizá más fácil de conseguir. (La famosa "línea verde de mercurio", es la luz casi monocromática que da las franjas.)

Éste es un experimento para hacerlo con lámpara de neón. (Yo no pude llevarlo a cabo con una lámpara fluorescente.) Mire las franjas de neón desde un trozo de polaroid. Ponga un trozo de polaroid enfrente de sus ojos (o anteojos de sol de polaroid). Pruebe ambas orientaciones del polaroid, que actúa como blanco. *Dé vueltas a este polaroid y repita la experiencia.* Así tendrá cuatro orientaciones: ejes paralelos y perpendiculares del polaroid y polaroid dado vuelta. Note el tamaño de las franjas. (Las franjas más anchas indican una lámina delgada.) El polaroid consiste en un sandwich de tres capas, con dos capas exteriores claras ("el pan") y la capa central de "jamón" absorbente. La pregunta es: *¿El "jamón" es ópticamente liso en ambos lados?*

He aquí otro experimento (o demostración) interesante con las franjas Fabry-Perot de neón. Por la noche, sin ninguna otra iluminación, ilumine su rostro con una lámpara de neón. Mire su imagen en un vidrio colocado a uno o dos pies. Su rostro es ahora una "fuente extensa de luz monocromática". Vea las franjas circulares concéntricas, centradas en la imagen de cada ojo. (Las franjas son solamente círculos si el vidrio es razonablemente plano.) El efecto es imponente.

Experimento casero

5.11 Estroboscopia de neón. Si tiene la lámpara descrita en el Experimento casero 5.10, puede hacer otras cosas muy interesantes. Con la lámpara a un pie de su ojo mire en una dirección tal que su línea de visión forme un ángulo alrededor de 45° con la línea desde el ojo al bulbo. ¡Note la fluctuación! Ahora, mire directamente al bulbo. ¡La fluctuación desaparece! Aparentemente, la evolución ha desarrollado nuestra visión periférica de modo de hacerla sensible a cambios muy rápidos de la intensidad de la luz. Esto parece sensato. (También puede probar esto con la pantalla de televisión. Compare la observación directa y la periférica.) Cada lámina de la NE-40 titila a 60 cps. ¡Pero están desfasadas 180° ! Cuando una está brillante, la otra está oscura. Así, puede usar esta lámpara como un estroboscopio de 60 ó 120 cps, dependiendo de cómo lo use para iluminar un objeto. Puede probar que las dos placas están fuera de fase. Enrosque la lámpara dentro de una base que no sea muy pesada, para que pueda sacudirla. Doble la lámpara de modo que ambas placas se vean de canto. Luego mueva la lámpara hacia los costados vigorosamente, aproximadamente a 4 ciclos por segundo (o más rápido si puede) con una amplitud tan grande como sea posible (de 10 ó 20 cm). Mire las rayas naranjas producidas por las placas. ¿Se producen juntas o alternadas? También puede usar esta técnica de sacudidas más un reloj común, para estimar la frecuencia. Suponga que el movimiento es sinusoidal. Mida la frecuencia y amplitud necesarias para que las dos líneas rojas parezcan una "onda cuadrada alternada". Como ya sabe que la frecuencia de la luz es algún múltiplo entero de 60 cps, entonces puede determinar la frecuencia estroboscópica por esta medición aproximada.

Nota: En lugar de sacudir la lámpara, es más fácil observar la reflexión de la lámpara en un espejo y sacudir el espejo. Así puede fácilmente obtener una "onda cuadrada alternada" en esta forma, usando la lámpara de neón. La misma técnica puede aplicarse al examen de la estructura temporal de la iluminación del tubo de televisión. Cubra la pantalla de modo de tener descubierta una zona vertical. Mueva el espejo alrededor de un eje vertical. El "diente de sierra" que verá le *mostrará* que alguna parte del tubo está emitiendo luz en cada instante. Por lo tanto, para tener un buen estroboscopio de TV, debe usar una ranura horizontal.

5.12 Continuidad de una onda en el contorno. Para la luz (u otra radiación electromagnética) que incide de un medio 1 al medio 2, nosotros encontramos que, siempre que la permeabilidad magnética del medio sea 1 (o no cambie en la discontinuidad) y siempre que la "geometría" sea constante (línea de trans-

misión de placas paralelas con sección transversal de forma constante, o plancha de material en el espacio), entonces los coeficientes de reflexión y transmisión para el campo eléctrico E_x y campo magnético B_y están dados por

$$R_E = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad T_E = 1 + R_E = \frac{2k_1}{k_1 + k_2},$$

$$R_B = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}, \quad T_B = 1 + R_B = \frac{2k_2}{k_2 + k_1},$$

donde $k = n\omega/c$ y n es el índice de refracción. Muestre que los coeficientes de reflexión y transmisión para E_x implican que tanto E_x como $\partial E_x/\partial z$ son continuos en la discontinuidad, o sea que tienen los mismos valores instantáneos a cada lado de la discontinuidad. [Para el campo en el lado izquierdo (medio 1) consideramos la superposición de las ondas incidente y reflejada.] En forma similar, vea que los coeficientes de reflexión y transmisión para el campo magnético B_y implican que B_y es continua en el límite pero que $\partial B_y/\partial z$ no es continua. Muestre que $\partial B_y/\partial z$ se incrementa en un factor $(k_2/k_1)^2 = (n_2/n_1)^2$ al cruzar del medio 1 al 2. Es importante notar que siempre nos referimos al campo total y no justo a la parte que se desplaza en una dirección particular.

5.13 Muestre que para ondas en una cuerda la condición de contorno, que es análoga a la de la permeabilidad magnética para la luz (a través de la discontinuidad) es que la densidad de masa de la cuerda sea constante. Pruebe que un incremento en la constante dieléctrica para la luz al cruzar el límite es análogo a una disminución en la tensión de la cuerda. Muestre que la velocidad transversal en la cuerda se comporta como el campo magnético en una onda luminosa, en el sentido que es continua pero que su derivado con respecto a z aumenta en un factor $(k_2/k_1)^2$ al pasar del medio 1 al 2. Muestre que la tensión transversal $-T_0 \partial \psi/\partial z$ se comporta como el campo eléctrico, ya que tanto ella como su derivado respecto a z son continuos en el límite. (En todos los casos nos referimos al campo total y no a las componentes que viajan en una dirección particular.)

5.14 Suponga que se tiene un cable coaxial en el que se ha hecho el vacío entre los conductores y que tiene (p. ej.), 50 ohms de impedancia característica. Ahora suponga que uno de los extremos del cable es prensado contra una pieza de tela espacial. En el otro extremo se mide la resistencia a la corriente continua entre los conductores interior y exterior, usando un óhmetro común. Desprecie la resistencia de los propios conductores. (El trozo de cable es tan corto como se quiera.) La resistencia se debe totalmente a la tela espacial terminal. ¿Qué lectura dará el ohmímetro? (a) Piénselo. (b) Compruébelo.

5.15 Longitud efectiva de un tubo de extremo abierto para ondas estacionarias. Use un tubo de cartón de un rollo de toallas de papel o papel encerado (o un tubo para embalaje). Use un diapasón de frecuencia C523,3 como tono patrón. Adhiera el tubo de extremos abiertos contra su oreja y preste atención. Corte una parte del tubo (si es necesario) de manera que el tono sea algo agudo (un tono más alto que el de 523,3 cps). Luego inserte un tubo un poco más pequeño para que actúe como elemento afinador, "trombón". (Por ejemplo, usando el tubo de cartón de un rollo de papel higiénico, corte primero a lo largo del tubo y luego quite un poco de cartón de manera de hacerlo más pequeño. Luego, selle la rotura a lo largo del corte con cinta adhesiva de manera que el tubo interior no tenga salidas de aire a lo largo de su pared.) El modo

Experimento casero

que escucha es el modo más bajo de un tubo de extremos abiertos. El tubo contiene media longitud de onda de la oscilación. La velocidad del sonido es 332 m/seg. En consecuencia, “espera” que la longitud del tubo sea

$$L = \frac{1}{2} \frac{v}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{3,32 \times 10^4}{523,3} = 31,7 \text{ cm.}$$

Sin embargo, encontrará que la verdadera longitud L es menor que 31,7 cm en aproximadamente 0,6 de un diámetro del tubo. Esto puede interpretarse como un “efecto de extremo” de alrededor de 0,6 del radio del tubo para cada extremo. Para comprobar que se trata de un efecto en los extremos y no de un valor erróneo para la velocidad del sonido, haga la prueba con tubos gruesos y finos.

Experimento casero

5.16 Resonancia en tubos de cartón. Tome el tubo del Experimento 5.15. Mantenga el diapasón vibrando cerca de uno de los extremos del tubo. Si la prolongación del tubo que obra como “trombón” se afina para 523,3 Hz (cps), oírás un hermoso sonido alto. Si no, varíe la prolongación en busca de una resonancia. *Pregunta:* Cuando el tono de la vibración natural del tubo difiere del tono del diapasón, ¿qué tono oírás cuando fuerce el tubo con el diapasón? (Primero, piense la respuesta usando sus conocimientos sobre oscilaciones forzadas; luego haga la comprobación.)

Esto es una forma de obtener una buena resonancia aguda. Sostenga el tubo verticalmente e introduzca el extremo inferior en un recipiente con agua, suficientemente profundo. En el extremo abierto del tubo mantenga vibrando el diapasón. Levante y baje el tubo y el diapasón buscando sintonizar en resonancia. El tubo más una corrección de extremo debe ser $\lambda/4$.

He aquí otra buena resonancia. Llene una botella de gaseosa hasta sus dos tercios de modo que cuando sople transversalmente en la boca de aquélla obtenga algo un poco más alto que 523,3. Ponga una paja en la botella. Mantenga el diapasón vibrando en la boca de la botella. Busque la resonancia extrayendo agua “chupando” con la paja.

Puede también procurar resonancias en tubos de encomienda, jarros, habitaciones y túneles tocando una “sirena” lentamente ascendente. Así oírás y también “sentirá” las resonancias fuertes. El cambio, en impedancias, puede realmente “desconectarlo” o hacerlo pasar a un tono vecino.

Experimento casero

5.17 Su sistema detector del sonido (tímpanos, nervios, cerebro), ¿es un detector de fase? ¡Averigüémoslo! Alguien dice que para sonidos de alta frecuencia se detecta la dirección evidenciando la diferencia de tiempos entre la cresta en un oído y la cresta en el otro, o sea, que se detecta un corrimiento de fase para la vibración en un tímpano respecto al otro. El problema de si esto es cierto se reduce a lo siguiente: ¿Puede detectar la diferencia entre “ambos tímpanos dentro, ambos tímpanos fuera...” y “tímpano izquierdo dentro mientras tímpano derecho fuera, tímpano izquierdo fuera mientras tímpano derecho dentro..., etc.”? (Puede ver la diferencia entre concordancia y oposición de fase.)

Primero consideremos un tubo de encomiendas de extremos abiertos (sintonizado a 523 para obtener sonidos graves.) El tubo tiene una longitud de $\lambda/2$. Esto significa que cuando el aire pasa hacia la derecha en el extremo derecho; simultáneamente pasa hacia la izquierda en el extremo izquierdo, es decir, que las velocidades en los dos extremos están desfasadas 180° cuando el tubo está en resonancia. Para decirlo de otra forma, el aire sopla hacia fuera en ambos extremos simultáneamente, y hacia dentro de los dos extremos al mismo tiempo. Ahora golpee dos diapasones 523 uno contra otro a iguales distancias de los extremos

de los brazos, y ponga un diapasón en cada extremo del tubo de modo de obtener pulsaciones. En un máximo de intensidad, cada diapasón colabora para que el aire vaya donde es necesario para obtener resonancia, es decir, en el instante en que el diapasón en una punta está empujando aire dentro del tubo, el del otro extremo también impulsa aire dentro del tubo, medio ciclo rápido (de 523 Hz) después, cada diapasón está extrayendo aire hacia fuera de su extremo del tubo. Medio ciclo de pulsación después, tenemos un mínimo en la intensidad del sonido que sale del tubo. (El mínimo es cero si golpea los diapasones a iguales distancias de los extremos.) Esto ocurre porque un diapasón está empujando aire en un extremo mientras que el otro está extrayendo aire en el otro, lo que está en oposición a lo que se desea para mantener la resonancia. Para ponerlo distinto, el movimiento inducido por los diapasones está compuesto de dos vibraciones resonantes superpuestas pero con 180° de desfase, dando cero.

Lo esencial de todo esto es que el tubo *puede* decir si los diapasones están vibrando “ambos dentro, ambos fuera” o en cambio, “uno dentro, el otro fuera; uno fuera, el otro dentro..., etc.” En un caso se está en un máximo de pulsación y en el otro en un mínimo. El problema acerca de su aparato auditivo es éste: Si sostiene un diapasón en una oreja y el otro en la otra: ¿escuchará pulsaciones o alguna otra cosa que tenga la estructura matemática de las pulsaciones? Por ejemplo, quizás su sistema le diga “viene del lado izquierdo de la habitación, viene del lado derecho, etc.”, cuando percibe el sonido a través de lo que correspondería a máximos y mínimos de pulsaciones. Esto es, si los que dicen que la dirección del sonido está determinada por las diferencias de fase están en lo cierto, el cerebro podría decirle que si un tímpano está delante del otro en una fase de, por ejemplo, 90° , entonces el sonido viene de la dirección del tímpano que está adelantado en 90° . Esta dirección se invertirá a la frecuencia de pulsación. Para contestar la pregunta haga el experimento.

Otra forma de formular la pregunta (con el tubo de cartón como un ejemplo) es ésta: ¿Tiene un agujero en la cabeza?

Experimento casero

5.18 Midiendo la fase relativa en los dos extremos de un tubo abierto. Suponga que alguien ha tomado un tubo largo, parecido a una manguera, lo ha enrollado en una caja y ha dejado asomar uno de los extremos abiertos por un extremo de la caja y el otro por el otro extremo. No se puede ver qué parte del tubo está enrollada dentro de la caja. Agregando un pequeño trombón de afinado a un extremo saliente, consigue resonancia en 523 cps de su diapasón. Esto significa que la longitud total es $1/2\lambda$, o λ , o $3/2\lambda$, o... ¿Cómo puede encontrar si la longitud del tubo es un número par o impar de semilongitudes de onda? Mantenga dos diapasones en un extremo del tubo y preste atención a las pulsaciones. Lleve el ritmo en su cabeza de modo que si retira momentáneamente un diapasón y luego vuelve a colocarlo (sin perturbar la vibración continuada de ambos diapasones), puede decir que el máximo de la pulsación aparece “acompañado” (en jerga musical) exactamente donde debería ser. Practique varias veces de modo que pueda omitir una pulsación, contar mentalmente pulsaciones y entrar en compás cuando vuelve a colocar el diapasón. (Puede ajustar la banda de goma reguladora para conseguir una frecuencia conveniente de pulsación. Si encuentra todo esto muy difícil puede usar un metrónomo.) Ahora bien, esta vez, en lugar de volver a colocar el diapasón quitado (momentáneamente) en el mismo extremo del tubo, llévelo al otro. Nuevamente atienda a las pulsaciones. (Ambos diapasones han estado vibrando continuamente durante todo este tiempo.) ¿Vuelven en compás o vuelven fuera de compás? Dependiendo del resultado experimental podrá decidir si el tubo tiene un número par o impar de semilongitudes de onda. Prediga la respuesta; luego intente el experimento con su tubo de media onda. (Fabrique otro tubo de una longitud de onda de largo para obtener el resultado opuesto.)

Experimento casero

5.19 Sobretonos en diapasones. Su diapasón C523.3, ¿no emite otra cosa que sonidos 523 cps? Golpee su diapasón contra algo duro. Podrá escuchár un tono alto tenue además del tono fuerte 523 cps. El tono alto desaparece gradualmente en dos o tres segundos. Es un modo alto del diapasón y es fuertemente amortiguado porque involucra la mayor curvatura de las puntas. ¿Qué ocurre con la nota una octava más alta, C1046? Esto es difícil de escuchar por la presencia de la fundamental, C523. Para buscarla, use un tubo resonante. Sintonice un tubo a C1046 apoyándolo contra su cabeza y prestando atención a la octava por encima de C523 (o simplemente córtelo por “teoría” restando de $\lambda/2$, 0,6 del radio R de cada extremo para obtener la longitud). Mantenga el diapasón C523 en el extremo del tubo C1046 y escuche. (Use un tubo afinado a C523 como control. Mueva el diapasón de arriba abajo entre los tubos C253 y C1046).

5.20 Onda sinusoidal general. Escriba la onda progresiva $\psi(z,t) = A \cos(\omega t - kz)$ como una superposición de dos ondas estacionarias. Escriba la onda estacionaria $\psi(z,t) = \cos \omega t \cos kz$ como superposición de dos ondas de propagación que se propagan en direcciones opuestas. Considere la siguiente superposición de ondas progresivas

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t - kz) + RA \cos(\omega t + kz).$$

Muestre que esta onda sinusoidal puede escribirse como una superposición de ondas estacionarias dadas por

$$\psi(z,t) = A(1 + R) \cos \omega t \cos kz + A(1 - R) \sin \omega t \sin kz.$$

Así, la misma onda puede pensarse como una superposición tanto de ondas estacionarias como progresivas.

5.21 Capa no reflectora. Una lente de vidrio ha sido revestida con una capa no reflectora de un cuarto de longitud de onda de espesor, para luz de longitud de onda λ_0 en el vacío. El índice de refracción de la capa es \sqrt{n} , y el del vidrio es n . Suponga que el índice de refracción es constante, independiente de la frecuencia, para todo el espectro visible de frecuencias. Llamemos I_{ref} a la intensidad reflejada promedio e I_0 a la intensidad incidente, para luz de incidencia normal. Muestre que la fracción de intensidad reflejada tiene la siguiente dependencia con la longitud de onda de la luz incidente:

$$\frac{I_{\text{ref}}}{I_0} = 4 \left[\frac{1 - \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} \right]^2 \sin^2 \frac{1}{2} \pi \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right),$$

donde λ es la longitud de onda en el vacío de la luz incidente. Tome $n = 1,5$ para el vidrio. Suponga $\lambda_0 = 5500 \text{ \AA}$ (luz verde). Entonces I_{ref} es cero para el verde. ¿Cuánto vale I_{ref}/I_0 para luz verde de longitud de onda en el vacío de 4500 Å? ¿Cuánto para luz roja de longitud de onda en el vacío de 6500 Å?

Resp. La fracción de intensidad roja reflejada es aproximadamente 2×10^{-3} , para la azul es aproximadamente el doble que para la roja. (Sus respuestas deben contener dos cifras significativas.)

5.22 Acoplamiento de impedancias por “disminución progresiva” del índice de refracción. Suponga que quiere acoplar las impedancias ópticas entre una región de índice n_1 y una región de índice n_2 , y que quiere extenderse una distancia total L en la región de transición para acoplar impedancias. ¿Cuál es la dependencia óptima en z del índice n entre los dos medios? ¿Es exponencial? ¿Por qué no?

Resp. La longitud de onda $\lambda = (c/v)/n$ debe variar linealmente con z , es decir, si la región de transición se extiende desde $z = 0$ hasta $z = L$, queremos que $\lambda(z) = \lambda_1 + (z/L)(\lambda_2 - \lambda_1)$.

5.23 La mejor franja de luz blanca. Observe las franjas concéntricas de interferencia de dos portaobjetos (de microscopio) apretados uno contra otro. El centro del modelo es negro (es decir, que no muestra cielo reflejado). La primera franja es blanca. Luego las franjas se van coloreando. Después de una docena de franjas se comienza a mezclar y superponer y son nuevamente blancas. ¿Cuál franja (aproximadamente) es la que aparece más monocromática? Para ser más preciso: defina la “mejor” franja como aquella que no sea “ni roja ni azul”, donde el rojo tiene una longitud de onda de $0,65 \mu$ (μ significa micrón; un micrón = 10^{-6} metros), el azul tiene una longitud de onda de $0,45 \mu$, y “no presente” significa que para la mejor franja, tanto la roja como la azul, den cero por interferencia destructiva. Dé el número de la mejor franja al entero más próximo, la longitud de onda para la cual la interferencia en esta franja es completamente constructiva, y el color aproximado.

5.24 Interferencia en películas delgadas. Observe que para luz monocromática de incidencia normal la intensidad reflejada por una capa de aire de espesor L entre dos vidrios de portaobjetos está dada en la aproximación para pequeñas reflexiones por

$$\frac{I_{\text{ref}}}{I_0} \approx 4R_{12}^2 \sin^2 k_2 L.$$

(Desprecie los efectos de interferencia de las dos superficies exteriores de las láminas. Estas franjas se diluyen con la dispersión de colores de cualquier luz excepto las muy monocromáticas, como se discutió en el Experimento casero 5.10, “Franjas de Fabry-Perot en el cristal de una ventana”).

5.25 Franjas de Fabry-Perot en una lámina de vidrio de 1 mm. Obtenga como resultado que, para que la luz produzca franjas de interferencias Fabry-Perot en una lámina de vidrio de 1 mm de espesor, el “ancho de línea” (o sea, el “ancho de banda”) de la luz debe ser menor que aproximadamente 3 cm^{-1} para que las franjas no sean borradas.

5.26 Reflexión múltiple. En los desarrollos siguientes deberá usar números complejos. Suponga que ψ_{inc} es la parte real de $Ae^{i(\omega t - kz)}$, donde A es real. Entonces $\psi_{\text{inc}} = A \cos(\omega t - kz)$. En $z = 0$ la impedancia sufre un cambio súbito de Z_1 a Z_2 . En $z = L$ la impedancia cambia nuevamente de Z_2 a Z_3 . Sea $R_{12} = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2) = -R_{21}$, $R_{23} = (Z_2 - Z_3)/(Z_2 + Z_3)$. Suponga que en el medio 1 hay una onda reflejada que es la parte real de $RAe^{i(\omega t + kz)}$, donde R es un complejo, y puede escribirse como $R = |R|e^{-i\delta}$.

(a) Demuestre que si despreciamos todas las contribuciones excepto la reflexión desde $z = 0$ y la primera reflexión desde $z = L$, obtenemos

$$R = R_{12} + T_{12}R_{23}T_{21}e^{-2ik_2L},$$

donde $T_{12} = 1 + R_{12}$ y $T_{21} = 1 + R_{21} = 1 - R_{12}$.

(b) Muestre por suma explícita de la serie infinita correspondiente a un número infinito de reflexiones múltiples que la solución exacta para R es

$$R = R_{12} + \frac{(1 - R_{12}^2)R_{23}e^{-2ik_2L}}{1 - R_{23}R_{21}e^{-2ik_2L}},$$

donde el primer término, R_{12} , se debe a la reflexión en la primera discontinuidad $z = 0$ y el resto se debe a una o más reflexiones en $z = L$. Demuestre que en la aproximación para pequeñas reflexiones este resultado se reduce al de la parte (a). Vea que el resultado exacto puede escribirse en la forma

$$R = \frac{R_{12} + R_{23}e^{-2ik_2L}}{1 + R_{12}R_{23}e^{-2ik_2L}}.$$

Demuestre que esta expresión exacta para R se anula para las mismas combinaciones de R_{23}/R_{12} y k_2L que la expresión aproximada para R obtenida en la "aproximación para pequeñas reflexiones" usada en la Sección 5.5. Así, la expresión aproximada da correctamente los ceros, pero es inexacta para la intensidad en los máximos.

5.27. Método de las condiciones de contorno para el cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión. La situación física es exactamente la del Problema 5.26. El método de resolución será completamente distinto. En vez de sumar una serie infinita de rayos múltiplemente reflejados, haremos la siguiente aproximación: Cada "rayo" de la superposición de rayos múltiplemente reflejados es continuo. Por lo tanto, la superposición misma es continua. Ésta es la base del método. Así no nos molestaremos en sumar sobre reflexiones múltiples. En cambio escribiremos $\psi(z, t)$ en las tres regiones: 1 ($z < 0$), 2 ($z = 0$ hasta L), y 3 ($z > L$) como la parte real de

$$\begin{aligned}\psi_1(z, t) &= e^{i(\omega t - k_1 z)} + R e^{i(\omega t + k_1 z)}, \\ \psi_2(z, t) &= F e^{i(\omega t - k_2 z)} + B e^{i(\omega t + k_2 z)}, \\ \text{y} \\ \psi_3(z, t) &= T e^{i[\omega t - k_3(z - L)]},\end{aligned}$$

donde R (reflejada), F (adelante), B (atrás) y T (transmitida) son números complejos incógnitas a ser determinados. (Por simplicidad hemos tomado como la unidad la amplitud de la onda incidente.) Tenga en cuenta que el término con amplitud compleja F es la superposición de todos los rayos múltiplemente reflejados entre $z = 0$ y L que están viajando hacia adelante en el tiempo T . En forma similar el término con amplitud compleja B es la superposición de todos los rayos que van hacia atrás. En las dos discontinuidades $z = 0$ y $z = L$, deberá aplicar las condiciones de contorno de continuidad. Suponga que $\psi(z, t)$ es continua y que $\partial\psi(z, t)/\partial z$ también lo es. (Esto significa que la tensión de la cuerda es constante, si tenemos una cuerda, o que la presión de equilibrio p_0 por el factor γ es constante, para ondas sonoras, o que la permeabilidad magnética μ es constante, para ondas electromagnéticas.) Estas condiciones de contorno en cada uno de los dos lugares da cuatro ecuaciones lineales para los cuatro números complejos T , F , B , y R . Esto es suficiente para determinar los valores de T , F , B y R . Justifique esta afirmación. Encuentre T , F , B y R . Muestre que el resultado para R es idéntico al que se obtuvo en Problema 5.26 por el método de reflexiones múltiples.

5.28 Resonancia de transmisión. (a) Muestre que por reflexión debida a dos discontinuidades (Probs. 5.26 y 5.27) la fracción de flujo de energía promediada temporalmente que no es reflejada (y que por lo tanto, por conservación de energía, debe ser transmitida) está dada por

$$1 - |R|^2 = \frac{1 - R_{12}^2 - R_{23}^2 + R_{12}^2 R_{23}^2}{1 + 2R_{12}R_{23} \cos 2k_2L + R_{12}^2 R_{23}^2}.$$

(b) Demuestre que si el medio 3 tiene la misma impedancia que el medio 1 esto se convierte en

$$1 - |R|^2 = \frac{(1 - R_{12}^2)^2}{1 - 2R_{12}^2 \cos 2k_2 L + R_{12}^4}.$$

(c) Muestre que para ciertos valores de $k_2 L$ la fracción de flujo de energía promediado no reflejado es la unidad, o sea, que para esos valores toda la energía es transmitida y nada se refleja. Llame a cualquiera de esos "valores de resonancia de k_2 con el nombre k_0 . Vea que los valores de resonancia están dados por $k_0 L = \pi, 2\pi, 3\pi$, etc.

(d) Demuestre que para k_2 suficientemente cercano a un valor k_0 de resonancia, el flujo de energía transmitido (promedio temporal) está dado por

$$1 - |R|^2 \approx \frac{(1 - R_{12}^2)^2}{(1 - R_{12}^2)^2 + R_{12}^2 [2L(k_2 - k_0)]^2}.$$

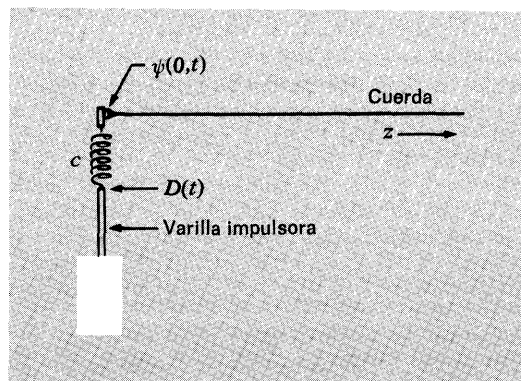
Muestre que esta forma resonante es del tipo de Breit-Wigner como se discutió en Sección 3.2 y tiene un ancho total en la semiintensidad máxima transmitida Δk_2 dado por

$$(\Delta k_2)L \approx \frac{(1 - R_{12}^2)}{|R_{12}|},$$

con tal que $|R_{12}|$ no sea mucho menor que la unidad. (Vea que para $|R_{12}| \ll 1$, la aproximación de Breit-Wigner no sirve, porque no responde excepto para valores muy cercanos a k_0 , es decir, si la aproximación no vale aún en los puntos de potencia semimáxima transmitida. En tal caso, uno debe usar el resultado exacto.) Muestre que para $|R_{12}| \approx 1$, cuando el modelo de Breit-Wigner anda para muchos anchos de resonancia fuera de k_0 , el ancho completo de resonancia está dado por

$$(\Delta k_2)L \approx 2(1 - |R_{12}|).$$

5.29 Suponga que en vez de atar la cuerda semiinfinita directamente a la salida del mecanismo impulsor, se acople al trasmisor a través de un resorte, como sigue



Problema 5.29

La tensión en la cuerda es T , la densidad de masa de la cuerda es ρ , y la constante del resorte es K . La longitud del resorte es tal que si el desplazamiento de la varilla impulsora $D(t)$ es cero y el resorte está relajado entonces $\psi(0,t)$ es cero. El movimiento de la varilla está dado por $D(t) = A \cos \omega t$. Suponga que hay una onda de propagación de la forma $\psi(z,t) = B \cos(\omega t - k + \phi)$. El problema es calcular cual es la "condición de contorno" en $z = 0$ y luego aplicarla para encontrar B/A y ϕ . (Sugerencia: El manipuleo algebraico será más fácil si usa números complejos.)

Resp. $\tan \phi = -\omega(T\rho)^{1/2}/K$, $B/A = [1 + (\omega^2 T\rho/K^2)]^{-1/2} = \cos \phi$. Note que para k muy grande se tiene $\psi(0,t) = D(t)$ como era de esperar. ¿Por qué?

5.30 Suponga que un punto a en una cuerda en $z_a = 10$ cm oscila con movimiento armónico con una amplitud de 1 cm y una frecuencia de 10 cps. Su fase es tal que en $t = 0$ el punto en la cuerda está pasando por su posición de equilibrio con velocidad hacia arriba (el desplazamiento positivo es hacia arriba).

(a) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la velocidad del punto a para $t = 0,05$ seg? Suponga que los parámetros de la cuerda (masa por unidad de longitud y tensión) son tales que la velocidad de la onda es 100 cm/seg.

(b) ¿Cuál es la longitud de onda de una onda de propagación? ¿Y de una onda estacionaria?

(c) Otro punto b en $z_b = 15$ cm oscila con la misma amplitud que la de $z_a = 10$ cm, pero con una fase relativa de 180° respecto a la oscilación en z_a . ¿Puede decir si tendremos aquí una onda de propagación pura, una onda estacionaria pura, o una combinación?

(d) Un tercer punto c en 12,5 cm también oscila con la misma amplitud que en z_a , pero desfasada 180° respecto al punto a . El punto b oscila, como dijimos arriba. Diga si ahora la onda es de propagación o estacionaria (o una combinación).

Experimento casero

5.31 Resonancias en globos de juguete. Tome un globo lleno de helio. Sosténgalo cerca de su oído y golpéelo ligeramente. Cante dentro de él y busque los tonos resonantes. Hínche con aire otro globo, hasta que tenga el mismo diámetro que el globo de helio.

Golpéelo. Estime la relación de frecuencias para los modos más bajos (los que escucha al golpear) de los globos de helio y aire. ¿Qué frecuencia va a predecir? Compare la fuerza (sonoridad) de las resonancias que obtiene cantando dentro del globo de helio con las que obtiene del globo de aire. ¿Por qué hay tal diferencia?

Tabla 5.1 Coeficientes de absorción a_i para $v = 512$ cps

Ventana abierta	1,00
Alfombras	0,20
Linoleum	0,12
Filtro de 2,5 cm de espesor	0,78
Audiencia, por persona (tomando un área efectiva de piso de 1 m ² por persona)	0,44
Madera	0,061
Yeso	0,033
Vidrio	0,027

FUENTE: Wallace C. Sabine, *Collected Papers on Acoustics*, pág. 223f. (Dover Publications, Nueva York, 1964). Una obra clásica.

5.32 Terminación de las ondas en una cuerda. (a) Suponga que tiene un amortiguador sin masa previsto de dos partes móviles 1 y 2 que pueden moverse una respecto de otra a lo largo de la dirección x que es transversal a la dirección z de la cuerda. La fricción se debe a un fluido que retarda el movimiento relativo de las dos partes móviles. La fricción es tal que la fuerza necesaria para mantener una velocidad relativa $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ entre las dos partes móviles es $Z_d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$, donde Z_d es la impedancia del amortiguador. La entrada (parte 1) está conectada al extremo de una cuerda de impedancia Z_1 que se extiende desde $z = -\infty$ a $z = 0$. La salida (parte 2) está conectada a una cuerda de impedancia Z_2 que se extiende hasta $z = +\infty$. Muestre que una onda incidente por la izquierda experimenta una impedancia en $z = 0$ que es igual a lo que experimentaría si se la conectara a una "carga" que consiste en una cuerda que se extiende desde $z = 0$ a ∞ y tiene una impedancia Z_L dada por

$$Z_L = \frac{Z_d Z_2}{Z_d + Z_2}, \quad \text{esto es,} \quad \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{Z_d} + \frac{1}{Z_2}.$$

Todo sucede como si el amortiguador y la cuerda 2 tuvieran impedancias conectadas en paralelo y forzadas por la onda incidente.

(b) Demuestre que si la cuerda Z_2 se extiende sólo hasta $z = 1/4\lambda_2$ donde λ_2 es la longitud de onda del medio 2 (suponiendo que tengamos una onda armónica con una única frecuencia), y está terminada por un amortiguador de impedancia nula (sin fricción), la onda incidente en $z = 0$ está terminada en forma perfecta. Demuestre que la conexión de salida del amortiguador en $z = 0$ no puede decir si está conectado a una cuerda de impedancia infinita o si está conectada a una cuerda de un cuarto de longitud de onda que está "cortocircuitada" por un amortiguador sin fricción en $z = 1/4\lambda_2$. En ambos casos la conexión de salida permanece en reposo.

5.33 Propiedades acústicas de las habitaciones. Las propiedades acústicas de una habitación están determinadas fundamentalmente por el "tiempo de reverberación" como una función de la frecuencia. Suponga que la habitación es forzada a un estado estacionario a una frecuencia dada. Entonces, la fuerza impulsora (que puede ser un tubo de órgano forzado eléctricamente) se desconecta súbitamente. La energía sonora almacenada decaerá en forma aproximadamente exponencial con un tiempo de vida medio τ dado por

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{E_{\text{alm}}} \frac{dE_{\text{perd}}}{dt}.$$

Al menos ésta es la forma en que se comporta un oscilador armónico unidimensional, y podemos suponer que la habitación también se comporta de esa manera. Llamemos ρ_E a la densidad de energía sonora y V al volumen de la habitación. ¿Cuál es la energía almacenada? Para una onda plana de propagación, el flujo de energía (en ergios/cm² seg) es la densidad de energía por la velocidad del sonido $v = 332$ m/seg. Las ondas de sonido en la habitación no son ondas progresivas pero pueden pensarse como una superposición de ondas progresivas que viajan en todas direcciones. Aproximadamente un sexto de la energía puede considerarse como propagándose en cada una de las seis direcciones; o sea a lo largo de los ejes x , y y z positivos y negativos.

El flujo de energía que se propaga en la dirección $+x$ y que encuentra una ventana abierta, sale por la ventana y se pierde. Se dice que una ventana abierta tiene un coeficiente de absorción $a = 1,0$. Las paredes (y cielo raso y piso) tienen un área total A que puede pensarse como la suma de áreas A_1 , A_2 , etc., con coeficientes de absorción a_1 , a_2 , etc. Deduzca la siguiente expresión aproximada para el tiempo medio de decaimiento τ

$$\tau \sum (A_i a_i) \approx \frac{6V}{v}$$

donde la suma cubre todas las paredes de la habitación. Véase la tabla de coeficientes de absorción que adjuntamos (Tabla 5-1).

En 1895, a Wallace Sabine se le pidió que "hiciera algo" sobre las terribles propiedades acústicas de la sala de lectura del Nuevo Museo de Arte Fogg, en Harvard, que había sido recientemente terminado. Nosotros ahora le pedimos que estime cuán malo era (o sea, la duración del sonido residual), dándole la siguiente información (de W. C. Sabine, *Collecte Papers on Acoustics*, p. 30, Jover, 1964): $V = 2740$ m³, forma aproximadamente cúbica, paredes y cielo raso de yeso, piso de madera. Considere también que la duración temporal audible es alrededor de cuatro veces τ . En los experimentos de Sabine se usaron escuchas humanas como detectores. Su resultado experimental para la duración temporal audible fue de 5,61 seg (que él redujo a 0,75 seg agregando varios materiales absorbentes).

Capítulo 6

Modulaciones, pulsaciones y paquetes de ondas

6.1 Introducción 288

6.2 Velocidad de grupo 288

- Señales portadoras de modulación 289
- Superposición de dos oscilaciones armónicas para dar una oscilación modulada en amplitud 289
- Superposición de dos ondas progresivas sinusoidales para obtener una onda progresiva modulada en amplitud 290
- Velocidad de modulación 291
- Velocidad de grupo 292
- Ejemplo 1: Ondas de radio de amplitud modulada* 294

- Bandas laterales 295
- Ancho de banda 296
- La « música » se propaga a la velocidad de grupo 296
- Ejemplo 2: Radiación electromagnética en el vacío* 297
- Ejemplo 3: Otras ondas no dispersivas* 297
- Ejemplo 4: Ondas electromagnéticas en la ionosfera* 298
- Ejemplo 5: Ondas de superficie en el agua* 298
- Tabla 6.1: Ondas de agua profunda* 300

6.3 Pulsaciones 300

- Diagrama del vector rotante 301
- Construcción de una pulsación 303
- Tiempo de duración de una pulsación 303
- Producto del ancho de banda — intervalo de tiempo 305
- Aporreando el piano 305
- Oscilaciones armónicas de duración limitada 305
- Ejemplo 6: Ancho de la banda de televisión* 307
- Ejemplo 7: Radiodifusora con luz visible* 307

- Solución exacta para la pulsación $\psi(t)$ producida por un espectro de frecuencias « cuadrado » 308
- Integral de Fourier 312
- Espectro de frecuencias de Fourier 312
- Propagación de un paquete de onda 314
- Producto de la longitud por el ancho de banda en número de onda 315
- Extensión del paquete de onda con el tiempo 315
- Paquetes de ondas en el agua 317

6.4 Análisis de Fourier de pulsaciones 317

- Pulsación de duración limitada 318
- De la suma de Fourier a la integral de Fourier 320
- Integral de Fourier 322
- Aplicación: Espectro cuadrado de frecuencia* 322
- Aplicación: Pulso cuadrado en el tiempo* 323
- Uso del piano para el análisis de Fourier de un aplauso 324
- Función delta del tiempo 326

- Aplicación: Oscilador armónico amortiguado — ancho de línea natural* 326
- Comparación del decaimiento libre con la oscilación forzada 328
- Formas de la línea de Lorentz — relación con la curva de resonancia 329
- Mediciones de frecuencia natural y del ancho de frecuencia 329

6.5 Análisis de Fourier de un paquete de ondas de propagación 330

- Ondas de propagación en un medio dispersivo homogéneo 332
- Ondas no dispersivas (caso especial) 332
- Ondas no dispersivas y la ecuación de las ondas clásica 333
- Las ondas que mantienen su forma satisfacen la ecuación de ondas clásicas 334

Problemas y experimentos caseros 335

Capítulo 6 *Modulaciones, pulsaciones y paquetes de ondas*

6.1 *Introducción*

Hasta ahora hemos estudiado fundamentalmente las ondas y las oscilaciones que tenían una dependencia armónica del tiempo $\cos(\omega t + \varphi)$ con una sola frecuencia ω presente. Una excepción fue el estudio de pulsaciones en la Sección 1.5. Allí aprendimos que la superposición de dos oscilaciones armónicas de la misma frecuencia aproximada, pero no exactamente, lleva a un fenómeno de pulsaciones muy interesantes. El Capítulo 6 es una extensión de nuestro estudio de pulsaciones. Estudiaremos las pulsaciones en el espacio tanto como en el tiempo y las pulsaciones que resultan de la superposición de muchos componentes de frecuencia así como las de dos componentes. Estudiaremos también cómo las pulsaciones (o, en forma más general, las “modulaciones”, para más de dos frecuencias componentes) se propagan como ondas de propagación. Resulta que las modulaciones, llamadas *grupos de ondas* o *paquetes de ondas*, llevan energía cuando se propagan y viajan a la *velocidad de grupo*.

El mejor camino para obtener una experiencia personal con los paquetes de ondas es arrojar guijarros en una laguna o charco y observar la expansión circular de los paquetes de ondas. (La caída de las gotas de agua sobre los platos también da buen resultado.) Es obvio que esta expansión circular de los paquetes de ondas transporta energía, ello puede hacer sacudir un corcho distante cuando el paquete de ondas llega a él. Si mira cuidadosamente, verá que las pequeñas olas que forman el paquete de ondas no mantienen posiciones constantes respecto al paquete. Para paquetes de ondas en el agua con longitud de onda de las olitas de más de unos pocos centímetros, las olas se propagan casi con doble rapidez que el paquete. “Nacen” en la parte posterior del paquete, se propagan al frente y decaen. Las olitas se propagan a la velocidad de fase. El paquete de ondas, como un todo, se propaga a la velocidad de grupo.

Instamos al lector a que llene un recipiente o un tubo con agua y forme algunos paquetes de ondas. (Al principio no será capaz de ver el movimiento relativo de las olitas en el paquete de ondas. Es más fácil de apreciar al arrojar guijarros o gotas de agua en un gran charco donde se puede seguir el progreso de la onda por un corto número de segundos. Hay muy poco tiempo para ello en un recipiente pequeño.)

6.2 *Velocidad de grupo*

En el Capítulo 4 vimos varios ejemplos que mostraban que la velocidad de fase de una onda sinusoidal de propagación no es necesaria-

mente la velocidad con que se transporta la energía o la información. Por ejemplo, encontramos que la velocidad de fase de la luz en la ionosfera es mayor que c . Si las señales pudieran propagarse a una velocidad mayor que c , la teoría de la relatividad sería errónea.

Señales portadoras de modulación. Una señal no puede difundirse con una onda armónica de propagación que involucre solamente una única frecuencia. Esto se debe a que una onda de propagación armónica marcha y sigue siempre igual, siendo cada ciclo igual al anterior. No transporta información excepto que está allí, por así decir. Si quiere enviar un mensaje debe *modular* la onda, lo que significa cambiar algo, de modo que pueda ser descifrado en un “receptor” distante. Puede cambiar usted de amplitud, es lo que se llama *modulación de amplitud*. Por ejemplo, se puede modular la amplitud de modo que se envíen una serie de puntos y rayas en código Morse; cada modelo de puntos y rayas representa una letra del alfabeto. Alternativamente, se puede variar la frecuencia o la constante de fase en alguna forma que pueda ser descifrada; estas formas se llaman *modulación de frecuencia y modulación de fase*, respectivamente. En cualquiera de estos casos, la fuerza impulsora no está dada por una fuerza armónica simple.

Para descubrir cómo se propagan las señales, debemos estudiar las ondas de propagación emitidas dentro de un medio abierto por un transmisor en $z = 0$ cuyo desplazamiento $D(t)$ no tiene la simple dependencia armónica en el tiempo de $D(t) = A \cos \omega t$, sino una dependencia más complicada, $D(t) = f(t)$. Ocurre que una gran cantidad de clases de funciones $f(t)$ pueden ser expresadas como una superposición lineal (suma) de funciones armónicas de la forma $A(\omega) \cos [\omega t + \varphi(\omega)]$, donde la amplitud $A(\omega)$ y la constante de fase $\varphi(\omega)$ son diferentes para cada frecuencia ω y están determinadas por la función $f(t)$ que debe ser expresada como una superposición. Más adelante estudiaremos cómo determinar las amplitudes $A(\omega)$ y las constantes de fase $\varphi(\omega)$ por el método del análisis de Fourier. Por ahora vamos a considerar una superposición que contiene sólo dos términos. Esto será suficiente para darnos algunos resultados muy interesantes, que eventualmente nos permitirán entender cómo se propaga un pulso o un grupo de ondas en un medio dispersivo (en donde la velocidad de fase depende de la longitud de onda).

Superposición de dos oscilaciones armónicas para dar una oscilación modulada en amplitud. Supongamos que un transmisor en $z = 0$ impulse una cuerda que se extiende desde $z = 0$ a $+\infty$. El transmisor oscila en una superposición de dos movimientos armónicos con frecuencias angulares ω_1 y ω_2 . No perderemos ningún resultado interesante si consideramos que las amplitudes y las constantes de fase de las dos

contribuciones son las mismas. Por lo tanto, suponemos que para el desplazamiento del terminal oscilante de salida del trasmisor tenemos

$$D(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t. \quad (1)$$

De nuestro estudio previo de pulsaciones [véase Sec. 1.5, ec. (1.80) a (1.85)], sabemos que la superposición dada por la ecuación (1) puede ser escrita en la forma de una *oscilación modulada en amplitud*,

$$D(t) = A_{\text{mod}}(t) \cos \omega_{\text{pro}} t, \quad (2)$$

donde

$$A_{\text{mod}}(t) = 2A \cos \omega_{\text{mod}} t, \quad (3)$$

con

$$\begin{aligned} \omega_{\text{mod}} &= \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2), \\ \omega_{\text{pro}} &= \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Si ω_1 y ω_2 son dos magnitudes comparables, la frecuencia de modulación ω_{mod} es pequeña comparada con la frecuencia promedio ω_{pro} . Entonces, la forma de la ecuación (2) puede pensarse como una *oscilación casi armónica* a la frecuencia ω_{pro} con una amplitud que es casi, pero no exactamente constante; está armónicamente *modulada en amplitud* a la relativamente lenta frecuencia de modulación ω_{mod} . Una oscilación más general de amplitud modulada tendrá la forma de la ecuación (2), pero con $A_{\text{mod}}(t)$ dado por la superposición de muchos términos diferentes de forma similar a la ecuación (3), teniendo cada término su propia frecuencia de modulación y su propia amplitud y constante de fase. Por ejemplo en modulación de amplitud de radio ν_{pro} será la “*frecuencia de propagación*” de quizás 1000 kc (kilociclos por segundo). Las frecuencias de modulación serán frecuencias audibles en el rango de 20 cps a 20 kc.

Superposición de dos ondas progresivas sinusoidales para obtener una onda progresiva modulada en amplitud. Examinemos las ondas progresivas irradiadas por un trasmisor cuyos terminales de salida oscilan con la dependencia del tiempo dado por las ecuaciones (1) ó (2). El medio está acoplado al trasmisor de tal manera que, en $z = 0$, $\psi(z, t)$ está dada por:

$$\psi(0, t) = D(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t. \quad (5)$$

Debido a que las ondas satisfacen el principio de superposición, las dos contribuciones al desplazamiento del trasmisor dadas por la superposición lineal, ecuación (5), darán dos ondas progresivas “independien-

tes". Así la onda progresiva $\psi(z,t)$ será la superposición de dos ondas sinusoidales progresivas $\psi_1(z,t)$ y $\psi_2(z,t)$ que estarán presentes si una o la otra de las oscilaciones del transmisor $A \cos \omega_1 t$ o $A \cos \omega_2 t$ se presentan por sí mismas. Sabemos que $\psi_1(z,t)$ se obtiene de $\psi_1(0,t)$ reemplazando $\omega_1 t$ por $\omega_1 t - k_1 z$. Esto expresa justamente el hecho de que la velocidad de fase es ω_1/k_1 . En forma similar, $\psi_2(z,t)$ se obtiene reemplazando $\omega_2 t$ por $\omega_2 t - k_2 z$. De modo que la onda progresiva $\psi(z,t)$ se obtiene haciendo ambos reemplazos en la ecuación (5):

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A \cos(\omega_2 t - k_2 z). \quad (6)$$

Por supuesto, podemos hacer las mismas sustituciones de $\omega_1 t - k_1 z$ por $\omega_1 t$ y $\omega_2 t - k_2 z$ por $\omega_2 t$ en ecuaciones (2), (3) y (4) para encontrar la forma de la onda de propagación análoga a la oscilación casi armónica modulada en amplitud dada por ecuaciones (2), (3) y (4). En esta forma obtenemos la *onda de propagación casi sinusoidal, modulada en amplitud*.

$$\psi(z,t) = A_{\text{mod}}(z,t) \cos(\omega_{\text{pro}} t - k_{\text{pro}} z), \quad (7)$$

donde (como puede ver fácilmente)

$$A_{\text{mod}}(z,t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} z), \quad (8)$$

con

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2), \quad (9)$$

$$k_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2),$$

$$\omega_{\text{pro}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad (10)$$

$$k_{\text{pro}} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Note que $\omega_{\text{pro}} t - k_{\text{pro}} z$ se obtiene donde teníamos $\omega_{\text{pro}} t$ reemplazando ω_1 con $\omega_1 t - k_1 z$ y reemplazando $\omega_2 t$ con $\omega_2 t - k_2 z$. En forma similar, $\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} z$ se obtiene donde teníamos ω_{mod} haciendo esos mismos reemplazos.

Velocidad de modulación. Ahora nos preguntamos algo muy interesante: ¿con qué velocidad se propaga la modulación? Suponga que ω_{mod} es pequeña respecto a ω_{pro} . Entonces, la salida del transmisor en $z = 0$ tiene la forma de oscilación modulada en amplitud (se muestra en Fig. 1.13, Sec. 1.5). El problema es a qué velocidad se propaga una modulación dada de la cresta de onda (por ejemplo, un lugar donde $A_{\text{mod}}(z,t) = +1$). La respuesta se obtiene al inspeccionar la ecuación (8); se ve que para seguir un valor constante dado (tal como una cresta) de la modulación de amplitud $A_{\text{mod}}(z,t)$, se necesita mantener un valor constante para su argumento $\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} z$. Así, si t se incrementa en

dt , z debe crecer un dz de tal manera que el incremento de $\omega_{\text{mod}}t - k_{\text{mod}}z$, llamémoslo $\omega_{\text{mod}}dt - k_{\text{mod}}dz$, sea cero

$$\omega_{\text{mod}}dt - k_{\text{mod}}dz = 0. \quad (11)$$

Para satisfacer esta condición, debemos viajar a la *velocidad de modulación*

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = v_{\text{mod}} = \frac{\omega_{\text{mod}}}{k_{\text{mod}}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}.} \quad (12)$$

Ahora, ω y k están relacionadas por una relación de dispersión:

$$\omega = \omega(k). \quad (13)$$

Esta relación de dispersión da ω_1 , una vez que se especifica k_1 y da ω_2 una vez especificada k_2 :

$$\omega_1 = \omega(k_1), \quad \omega_2 = \omega(k_2). \quad (14)$$

Por todo esto la velocidad de modulación dada por la ecuación (12) puede ser expresada (usando un desarrollo en serie de Taylor de $\omega(k)$ en $k = k_{\text{pro}}$)

$$v_{\text{mod}} = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} = \frac{d\omega}{dk} + \dots, \quad (15)$$

donde las derivadas de la función $\omega(k)$ están calculadas para el número de onda promedio k_{pro} .

Velocidad de grupo. En la mayoría de las aplicaciones interesantes de la ecuación (12), ω_1 y ω_2 difieren sólo una pequeña fracción de su valor promedio. Por lo tanto, podemos despreciar todos los términos excepto el primero en la ecuación (15). La cantidad $d\omega/dk$, calculada en un valor promedio de k conveniente, es llamada *velocidad de grupo*.

$$\boxed{\text{Velocidad de grupo} \equiv v_g = \frac{d\omega}{dk}.} \quad (16)$$

Vemos que una “señal” consistente en una cresta de onda de amplitud modulada se propaga, no a la velocidad de fase promedio $v_{\text{pro}} = \omega_{\text{pro}}/k_{\text{pro}}$, sino a la velocidad de grupo $v_g = d\omega/dk$.

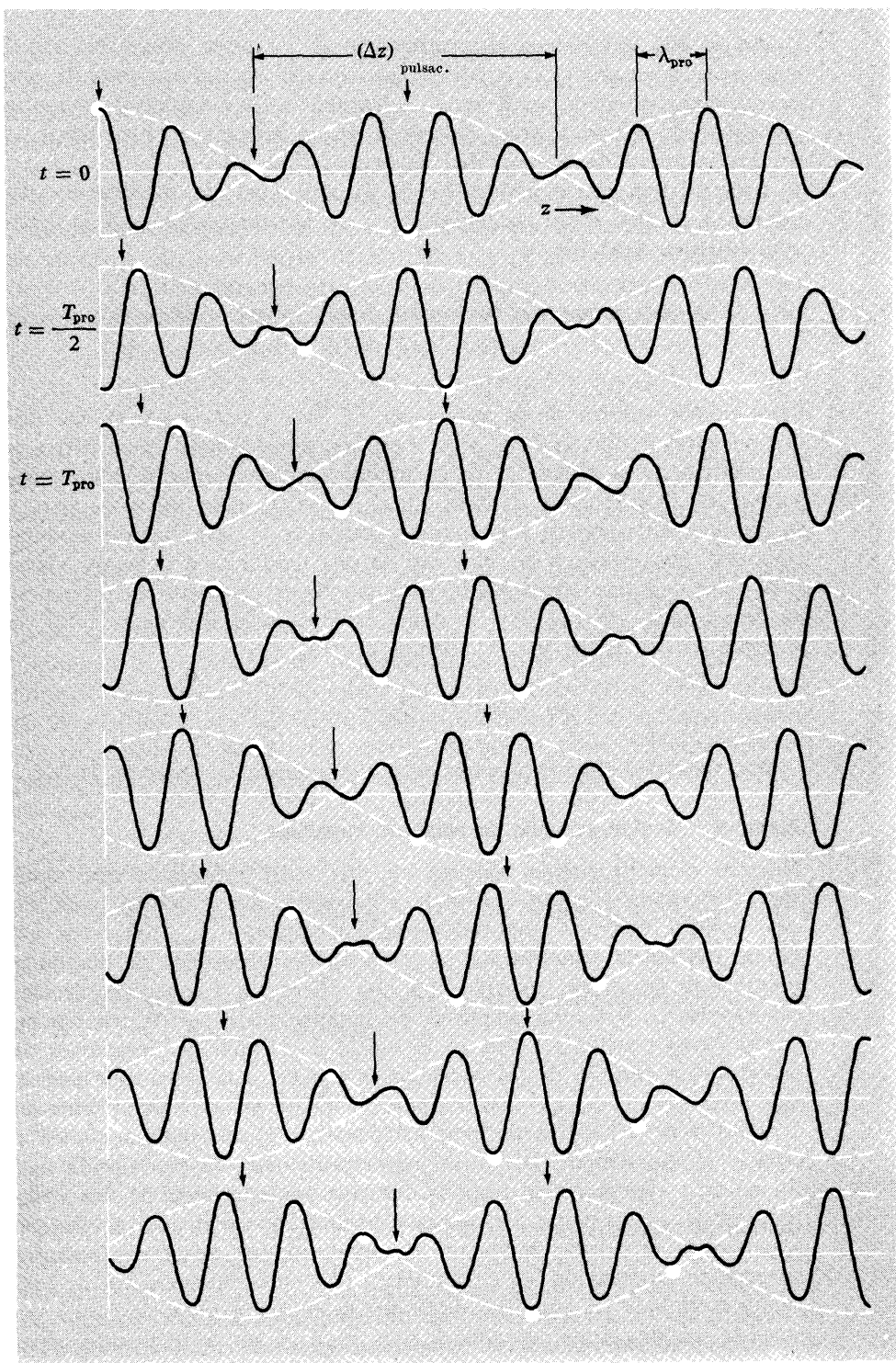


Fig. 6.1 Velocidad de grupo. Las flechas siguen las pulsaciones que se propagan a la velocidad de grupo v_g . Los círculos abiertos siguen a las crestas de onda particulares que se propagan a la velocidad promedio de fase v_{pro} .

En la Fig. 6.1 vemos la propagación de la onda progresiva $\psi(z,t)$ dada por la ecuación (7) o por la (6), con las especificaciones de que la frecuencia promedio es 8 veces la frecuencia de modulación y que la velocidad de grupo $d\omega/dk$ (calculada en la frecuencia promedio) es igual a la mitad de la velocidad de fase $\omega_{\text{pro}}/k_{\text{pro}}$.

Ésta es una breve deducción de la velocidad de modulación. La diferencia de fase entre las ondas 1 y 2 de la superposición de la ecuación (6) está dada por

$$\begin{aligned}\varphi_1(z,t) - \varphi_2(z,t) &= (\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1) - (\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2) \\ &= (\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)z + (\varphi_1 - \varphi_2).\end{aligned}$$

Para ciertos valores de la diferencia de fase $\varphi_1(z,t) - \varphi_2(z,t)$, las dos componentes están en fase, y se produce interferencia constructiva y un máximo de la magnitud de la modulación de amplitud. Para otros valores de la diferencia de fase $\varphi_1(z,t) - \varphi_2(z,t)$, están fuera de fase, y se produce interferencia destructiva y ceros de la amplitud de modulación. Así, para viajar a la velocidad de una modulación debemos viajar a la velocidad que corresponde para mantener constante la diferencia de fase $\varphi_1(z,t) - \varphi_2(z,t)$. Por lo tanto, tomamos la diferencia total de la expresión de arriba y la igualamos a cero:

$$(\omega_1 - \omega_2)dt - (k_1 - k_2)dz = 0.$$

La velocidad de modulación es dz/dt , que da la ecuación (12).

Ejemplo 1: Ondas de radio de amplitud modulada

Nuestro ejemplo simple consiste en una onda progresiva que puede ser considerada *o como* una onda progresiva casi armónica modulada en amplitud, con una amplitud variable lentamente $A_{\text{mod}}(z,t)$ y con una rápida frecuencia armónica ω_{pro} , *o como* una superposición de dos ondas progresivas armónicas exactas con dos diferentes frecuencias armónicas rápidas ω_1 y ω_2 . La amplitud de modulación $A_{\text{mod}}(z,t)$ era por supuesto “casi constante” sólo en la escala de tiempo de duraciones del orden de un período de las oscilaciones rápidas a la frecuencia angular ω_{pro} . Realmente, $A_{\text{mod}}(z,t)$ varió sinusoidalmente en el tiempo (para un z dado) a la frecuencia de modulación ω_{mod} , y sinusoidalmente en el espacio (a un tiempo fijo) con el número de onda de modulación k_{mod} . En nuestro ejemplo, comenzamos con una superposición de dos ondas progresivas exactamente armónicas y encontraremos que es equivalente a una onda progresiva modulada en amplitud que tenga una sola frecuencia de modulación ω_{mod} . También podríamos comenzar con la oscilación modulada en amplitud dada por la ecuación (2) y descubrir que consiste en una superposición de dos oscilaciones exactamente armó-

nicas. Al describir la salida de un transmisor de radio de amplitud modulada (AM), debemos tener en cuenta no sólo una frecuencia de modulación, sino un rango completo de frecuencias de modulación. La corriente en la antena es impulsada por una diferencia de potencial que consiste de una oscilación casi armónica a una frecuencia promedio ω_{pro} que se llama *frecuencia portadora*. (En la radio comercial AM, cada estación tiene asignada una única frecuencia portadora que cae en alguna parte en el rango entre 500 y 1600 kc.) El potencial impulsor aplicado a la antena transmisora no tiene amplitud constante. Tiene una amplitud modulada que puede ser expresada como una serie de Fourier

$$A_{\text{mod}}(t) = A_0 + \sum_{\omega_{\text{mod}}} A(\omega_{\text{mod}}) \cos [\omega_{\text{mod}} t + \varphi(\omega_{\text{mod}})], \quad (17)$$

donde $A_{\text{mod}}(t) - A_0$ está dispuesto para ser proporcional a la presión manométrica en una onda sonora dada, que es la información a transmitir. (Un micrófono convierte la presión manométrica instantánea en el aire en un potencial eléctrico.) La constante A_0 en la amplitud del potencial impulsor da una contribución que está presente tanto si alguien está hablando o cantando en el micrófono como si no. Los términos restantes se deben a las ondas sonoras recogidas por el micrófono. Las frecuencias de modulación en la ecuación (17) son por lo tanto las frecuencias de las ondas de sonido. Caen en el rango audible de 20 a 20 000 cps y se llaman "audiofrecuencias". Las audiofrecuencias son pequeñas comparadas con la frecuencia portadora. El potencial impulsor $V(t)$ está dado por una oscilación casi armónica en la frecuencia ω_{pro} :

$$\begin{aligned} V(t) &= A_{\text{mod}}(t) \cos \omega_{\text{pro}} t \\ &= A_0 \cos \omega_{\text{pro}} t + \sum_{\omega_{\text{mod}}} A(\omega_{\text{mod}}) \cos [\omega_{\text{mod}} t + \varphi(\omega_{\text{mod}})] \cos \omega_{\text{pro}} t. \end{aligned} \quad (18)$$

Estas expresiones pueden ser escritas como una *superposición de oscilaciones exactamente armónicas*

$$\begin{aligned} V(t) &= A_0 \cos \omega_{\text{pro}} t \\ &\quad + \sum \frac{1}{2} A(\omega_{\text{mod}}) \cos [(\omega_{\text{pro}} + \omega_{\text{mod}})t + \varphi(\omega_{\text{mod}})] \\ &\quad + \sum \frac{1}{2} A(\omega_{\text{mod}}) \cos [(\omega_{\text{pro}} - \omega_{\text{mod}})t - \varphi(\omega_{\text{mod}})]. \end{aligned} \quad (19)$$

Bandas laterales. El potencial de amplitud modulada $V(t)$ es entonces una superposición de oscilaciones armónicas que consisten de un único término con frecuencia ω_{pro} llamada la oscilación portadora, una suma de muchas oscilaciones armónicas con frecuencias $\omega_{\text{pro}} + \omega_{\text{mod}}$, llamada la *banda lateral superior*, y una suma de muchas oscilaciones armó-

nicas con frecuencias $\omega_{\text{pro}} - \omega_{\text{mod}}$, llamada la *banda lateral inferior*. Para poder irradiar ondas progresivas que lleven toda la información en sonidos en el rango de audiofrecuencias desde cero a 20 kc, el potencial $V(t)$ debe consistir en una superposición de componentes armónicas con frecuencias angulares ω en un rango de frecuencias que va desde la menor frecuencia de la banda lateral inferior a la mayor frecuencia de la banda lateral superior. De este modo las frecuencias irradiadas ocupan la *banda de frecuencias*

$$\omega_{\text{pro}} - \omega_{\text{mod}}(\text{máx}) \leq \omega \leq \omega_{\text{pro}} + \omega_{\text{mod}}(\text{máx}), \quad (20)$$

o sea,

$$\nu_{\text{pro}} - \nu_{\text{mod}}(\text{máx}) \leq \nu \leq \nu_{\text{pro}} + \nu_{\text{mod}}(\text{máx}). \quad (21)$$

Ancho de banda. Se llama *ancho de banda* a la diferencia entre la máxima frecuencia y la mínima frecuencia:

$$\text{Ancho de banda} \equiv \Delta\nu = \nu(\text{máx}) - \nu(\text{mín}) = 2\nu_{\text{mod}}(\text{máx}). \quad (22)$$

De modo que para transmitir la portadora y dos bandas laterales y dar a la modulación en amplitud que ocupe el rango completo de frecuencias audibles se requiere un ancho de banda de dos veces 20 kc ó 40 kc. (En realidad, estaciones comerciales de radio AM tienen permitido radiodifundir en un ancho de banda de 10 kc. Por lo tanto, sólo pueden llevar información audible en el rango de cero a 5 kc. Esto es completamente adecuado para las conversaciones corrientes y bastante adecuado para música; la nota más alta en el piano tiene una frecuencia de aproximadamente 4,2 kc.)

La “música” se propaga a la velocidad de grupo. La fuerza impulsora $V(t)$ dada por la ecuación (18) o (19) lleva a radiación de ondas electromagnéticas progresivas. Estas ondas pueden ser consideradas como una superposición de componentes armónicas que ocupan una cierta banda de frecuencias $\Delta\omega$ centrada en ω_{pro} . Alternativamente pueden considerarse como una única onda de propagación casi armónica con una “rápida” frecuencia de oscilación ω_{pro} igual a la frecuencia portadora y con una amplitud “casi constante”, lentamente variable $A_{\text{mod}}(z,t)$, consistente en una superposición de términos como los de la ecuación (8). (En aquel ejemplo, donde hay solamente dos componentes armónicas, la banda lateral superior consiste en una única frecuencia $\omega_1 = \omega_{\text{pro}} + \omega_{\text{mod}}$; la banda lateral inferior consiste de la única frecuencia $\omega_2 = \omega_{\text{pro}} - \omega_{\text{mod}}$.) Las modulaciones se propagan a través del medio (aire, ionosfera,...) a la velocidad de modulación. En el caso de una estación de radio AM con (por ejemplo) una frecuencia portadora de 1000 kc y un ancho de banda de 20 kc, la banda de frecuencias se extiende desde 995 kc a 1005 kc. Como el ancho de banda es pequeño comparado con la fre-

cuencia promedio, esperamos que los términos mayores despreciados en el desarrollo en serie de Taylor [ec. (15)] sean realmente despreciables, y que la velocidad de grupo dada por la ecuación (16) sea realmente adecuada para describir la propagación de las modulaciones.

Modulación de frecuencias y de fase y los tópicos relacionados se discuten en los Problemas 6.27 a 6.32. (Existe otra importante técnica de modulación denominada *modulación por código de pulsaciones* *.)

Ahora podemos considerar algunos ejemplos físicos de velocidades de grupo. En los casos que involucran ondas electromagnéticas progresivas, no nos limitaremos a la frecuencia de radio AM ($\nu \sim 10^3$ cps) sino que también incluiremos luz visible ($\nu \sim 10^{15}$ cps), microondas ($\nu \sim 10^{10}$ cps), y otras frecuencias.

Ejemplo 2: Radiación electromagnética en el vacío

La relación de dispersión está dada por

$$\omega = ck. \quad (23)$$

Las velocidades de fase y de grupo están dadas por

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c. \quad (24)$$

Así la velocidad de fase y la de grupo son ambas iguales a c para la luz (u otra radiación electromagnética) en el vacío. Las modulaciones se propagan a la velocidad c .

Ejemplo 3: Otras ondas no dispersivas

Las ondas luminosas en el vacío son no dispersivas, o sea que la velocidad de fase no depende de la frecuencia (o de número de onda). Siempre que éste sea el caso, la velocidad de fase, ya que en general tenemos:

$$\omega = v_\phi k, \quad (25)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk}. \quad (26)$$

Por lo tanto, las velocidades de grupo y de fase se igualan si dv_ϕ/dk es cero. Otros ejemplos de ondas no dispersivas son las *ondas sonoras audibles*, donde tenemos

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} k, \quad (27)$$

* I. S. Mayo. "Pulse-Code Modulation", *Scientific American*, pág. 102 (marzo 1968).

y las ondas transversales en una *cuerda continua*, donde tenemos

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k. \quad (28)$$

Ejemplo 4: Ondas electromagnéticas en la ionosfera

La relación de dispersión para ondas sinusoidales es

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (29)$$

para frecuencias que exceden la frecuencia de corte, $\nu \approx 20$ Mc. Diferenciando la ecuación (29) con respecto a k obtenemos

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2c^2 k, \quad (30)$$

o sea,

$$\left(\frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d\omega}{dk}\right) = v_\varphi v_g = c^2. \quad (31)$$

De este modo la velocidad de fase y la velocidad de grupo están dadas por

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} \geq c, \\ v_g &= c \left(\frac{c}{v_\varphi}\right) \leq c. \end{aligned} \quad (32)$$

Vemos que aunque la velocidad de fase siempre es mayor que c , la velocidad de grupo es siempre menor que c . Es por eso que una *señal* no puede ser transmitida a una velocidad mayor que c .

Ejemplo 5: Ondas de superficie en el agua

En el equilibrio, la superficie de una masa de agua es plana y horizontal. Cuando está presente una onda, hay dos tipos de fuerzas restauradoras que tienden a aplanar las crestas de la onda y a restablecer el equilibrio: una es la gravedad, la otra es la tensión superficial. Para longitudes de onda de unos pocos centímetros, la gravedad domina. Para longitudes de onda del orden del milímetro, domina la tensión superficial.

Debido a la gran incompresibilidad del agua, el exceso de agua que aparece en la cresta de la onda debe fluir desde las regiones vecinas deprimidas. Las gotas de agua individuales en una onda de agua realizan por lo tanto un movimiento que es una combinación de movimiento longitudinal (hacia adelante y hacia atrás) y de un movimiento trans-

versal (hacia arriba y abajo). Si la longitud de onda es pequeña comparada con la profundidad de equilibrio del agua, tenemos las llamadas ondas de agua profunda. Entonces las gotas individuales de agua en una onda de propagación se mueven en círculos. Un pato flotante (o una gotita en la superficie) realiza un movimiento circular uniforme cuyo radio es igual a la amplitud de la onda armónica y con un período igual al de la onda. En la cresta de una onda de propagación, el pato tiene su máxima velocidad hacia adelante; en un mínimo, tiene su máxima velocidad hacia atrás. Las gotas de agua debajo de la superficie se propagan en círculos más pequeños; resulta que el radio de giro decrece exponencialmente con la profundidad. El movimiento se hace despreciable a unas cuantas longitudes de onda debajo de la superficie.

La relación de dispersión para ondas de agua profunda está dada aproximadamente por

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho} k^3, \quad (33)$$

donde $\rho \approx 1,0 \text{ gm/cm}^3$ y $T \approx 72 \text{ dinas/cm}$ (tensión superficial) para el agua; $g = 980 \text{ cm/seg}^2$.

Le mostraremos que cuando g y $(T/\rho)k^2$ son iguales de modo que la gravedad y la tensión superficial contribuyan igual a la fuerza restitutiva por unidad de desplazamiento y por unidad de masa (es decir, a ω^2), entonces las velocidades de fase y de grupo son iguales. Puede comprobar que esto ocurre a una longitud de onda $\lambda = 1,70 \text{ cm}$. Las velocidades de fase y de grupo son entonces ambas de 23 cm/seg . Para longitudes de onda mucho menores de $1,7 \text{ cm}$ domina la tensión superficial; entonces la velocidad de grupo es $1,5$ veces la velocidad de fase. Para longitudes de onda mucho mayores que $1,7 \text{ cm}$ domina la gravedad, en ese caso, la velocidad de grupo es la mitad que la de fase (véase Prob. 6.19).

En la Tabla 6.1 damos parámetros de onda para rangos de longitudes de onda desde 1 mm (tales como las que pueden ser excitadas por un diapasón que impulse un vaso de plástico lleno de agua) hasta 64 metros (ondas oceánicas muy largas).

Aplicación

Aquí hay un ejemplo que utiliza la Tabla 6.1. Suponga que participa en un picnic en una playa. Alguien pregunta sobre la longitud de onda de las olas en el océano abierto a veinte o treinta millas de la costa. Les pide que si esperan un minuto les dirá la longitud de onda. Toma su reloj y cuenta las olas que rompen en la playa. Encuentra un promedio de 12 olas por minuto, es decir, una cada 5 segundos: $\nu = 0,2 \text{ cps}$. El tiempo se mantuvo constante durante varios días, de modo que puede suponer que las ondas están en estado estacionario

Tabla 6.1 *Ondas de agua profunda*

λ , <i>cm</i>	ν , <i>cps</i>	v_ϕ , <i>cm/seg</i>	v_g , <i>cm/seg</i>	$\frac{v_g}{v_\phi}$
0,10	675	67,5	101,4	1,50
0,25	172	43,0	63,7	1,48
0,50	62,5	31,2	44,4	1,42
1,0	24,7	24,7	30,7	1,24
1,7	13,6	23,1	23,1	1,00
2	11,6	23,2	21,4	0,92
4	6,80	27,2	17,8	0,65
8	4,52	36,2	19,6	0,54
16	3,14	50,3	25,8	0,51
32	2,22	71	35,8	0,50
100	1,25	125	62,5	0,50
200	0,884	177	88,5	0,50
400	0,625	250	125	0,50
800	0,442	354	177	0,50
1600	0,313	500	250	0,50
3200	0,221	708	354	0,50
6400	0,156	1000	500	0,50

(aparte de los vientos locales que no afectan la marejada del gran océano). La frecuencia es entonces de 0,2 cps en el mar, así como en su playa. (Por supuesto que la longitud de onda es diferente, porque las olas que rompen en la playa no son ondas de aguas profundas. *La longitud de onda depende de la profundidad del agua en su playa local. La frecuencia impulsora del estado estacionario, no.*)

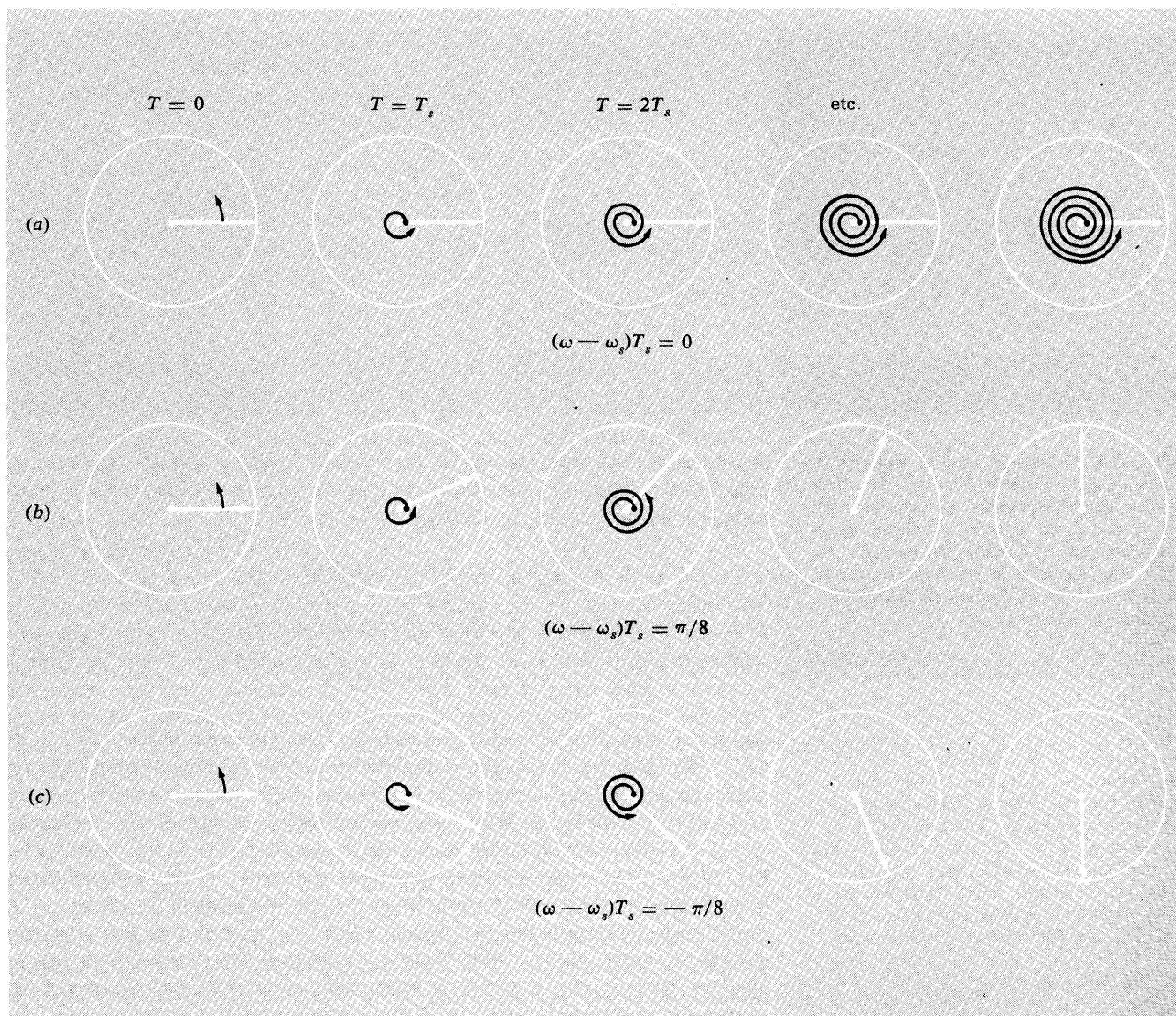
De acuerdo con la tabla, la longitud de onda de las olas en el océano abierto será aproximadamente 40 metros. Las crestas de olas que ahora rompen en la playa, ¿cuánto han viajado en la última hora?

Si la mayor parte del tiempo se propagaron en agua profunda, entonces de acuerdo con la Tabla 6.1 la velocidad de fase fue alrededor de 8 m/seg, es decir, alrededor de 29 000 metros por hora. Por lo tanto, las olas han viajado casi 30 kilómetros (20 millas) en la última hora, y como el tiempo se mantuvo constante por muchas horas, puede confiar en que su estimación de la longitud de onda en el océano abierto es buena.

Si no está en la playa pero está junto a un sismógrafo a diez o veinte millas de la playa, puede responder a la misma pregunta.

6.3 Pulsaciones

Queremos considerar una situación en que un trasmisor en $z = 0$ describe un movimiento que es una superposición de muchas oscilaciones



armónicas, todas con igual amplitud y con frecuencias muy próximas que caen en una banda angosta entre la menor, ω_1 , y la mayor, ω_2 . Ya hemos considerado la situación cuando hay sólo dos frecuencias. En aquel caso obteníamos modulaciones que se propagaban con la velocidad de grupo.

Diagrama del vector rotante. Para prepararnos para el caso más complicado que involucre muchas componentes armónicas con frecuencias

Fig. 6.2 Fotos estroboscópicas del vector restante complejo $e^{i\omega t}$. Las espirales son para ayudarle a tener en cuenta el número de rotaciones del vector. El intervalo de tiempo entre instantáneas es $T_s = 2\pi/\omega_s$.

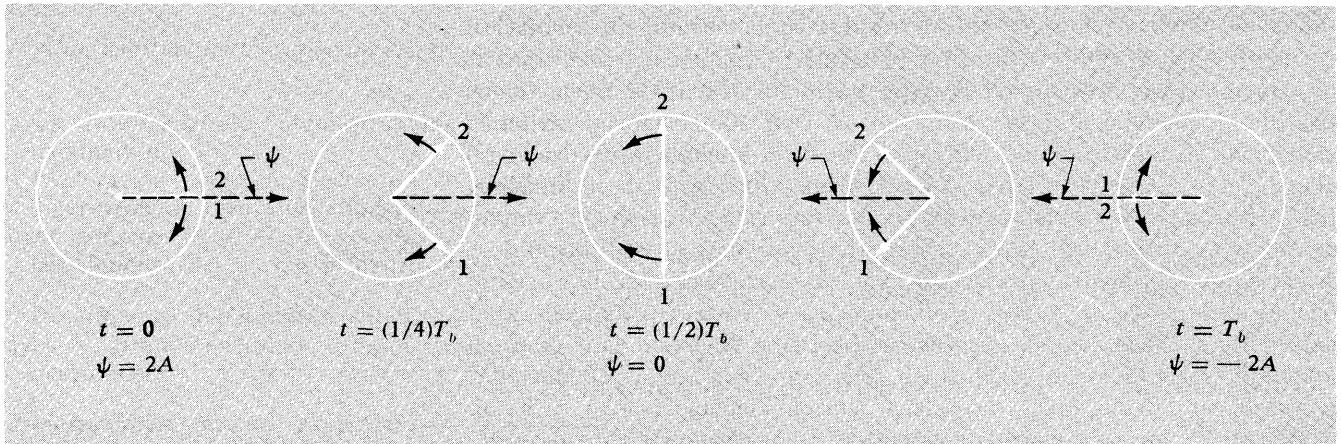


Fig. 6.3 Pulsación en la superposición de $\psi(t) = Ae^{i\omega_1 t} + Ae^{i\omega_2 t}$. Los destellos estroboscópicos se toman para $\omega_s = \omega_{\text{pro}}$ y en conjunto cubren exactamente una pulsación de período T_b . [En este ejemplo la frecuencia de pulsación es $\frac{1}{4}$ de la frecuencia promedio; o sea $\omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{4} \omega_{\text{pro}}$.]

ligeramente distintas, vamos a reexaminar el caso de dos frecuencias usando la técnica del *diagrama del vector-rotante*. (Véase Vol. I, página 125.) La oscilación armónica:

$$\psi(t) = A \cos \omega t \quad (34)$$

es la parte real de la oscilación armónica compleja

$$\psi_c(t) = Ae^{i\omega t}, \quad (35)$$

donde el subíndice c indica complejo. Una representación gráfica de $\psi_c(t)$ está dada por un vector de longitud A en el plano complejo, rotando en el sentido contrario a las agujas del reloj con una frecuencia angular ω . [La proyección de este vector rotante sobre el eje horizontal (o sea en el eje real), da el movimiento armónico de la ecuación (34).] En lugar de observar este vector rotante a través de un ciclo, podemos imaginar que tomamos “instantáneas estroboscópicas”. Entonces, si el estroboscopio tiene la misma frecuencia que el vector rotante, el vector parecería estar quieto, o sea, cada foto tomaría al vector en la misma posición. (Véase Fig. 6.2a.) Si la frecuencia angular ω del vector rotante es ligeramente mayor que la del estroboscopio, ω_s , el vector parecerá rotar lentamente hacia adelante (en sentido contrario al de las agujas del reloj) a la frecuencia angular *diferencia* $\omega - \omega_s$ (véase figura 6.2b); si, en cambio $\omega - \omega_s$ es negativo, el vector parecerá rotar lentamente en la dirección “retrógrada” (en el sentido de las agujas del reloj) (véase Fig. 6.2c). El subíndice s indica estroboscopio.

Ahora consideremos una superposición de dos ondas armónicas que tienen la misma amplitud, pero frecuencias ligeramente distintas

$$\psi(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t. \quad (36)$$

“Estroboscopiamos” (tomamos fotos estroboscópicas de) el vector rotante $Ae^{i\omega_1 t}$ y $Ae^{i\omega_2 t}$ a la frecuencia

$$\omega_s = \omega_{\text{pro}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2). \quad (37)$$

Así (considerando $\omega_2 - \omega_1$ como positiva) $\omega_2 - \omega_{\text{pro}}$ es positiva y $\omega_1 - \omega_{\text{pro}}$ es negativa. Recalcamos que $\psi(t)$ puede ser escrita [como en la ec. (2), Sec. 6.2] como el producto de una amplitud de variación lenta $A(t)$ por una oscilación rápida de frecuencia ω_{pro} . Nuestra frecuencia estroboscópica ω_{pro} hará que la oscilación rápida “permanezca quieta” y sólo $A(t)$ cambiará entre fotos. De este modo se obtienen las instantáneas mostradas en la Fig. 6.3.

Construcción de una pulsación. Consideremos ahora el caso en que $\psi(t)$ es una superposición de muchas oscilaciones todas de igual amplitud A , de constante de fase cero y distribuidas uniformemente en la banda de frecuencias, entre ω_1 y ω_2 . Las oscilaciones ocupan entonces un ancho de banda $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. El diagrama correspondiente al vector estroboscópico se ve en la Fig. 6.4.

En $t = 0$ la amplitud total $A(t)$ de la superposición ψ es NA . En un tiempo t ligeramente anterior a $2\pi/\Delta\omega$, que es el período para una pulsación entre las frecuencias extremas ω_2 y ω_1 la amplitud total $A(t)$ es cero, ya que la contribución de las componentes está uniformemente distribuida en fase. (Cuando $N \rightarrow \infty$, este primer cero ocurre exactamente en $t = 2\pi/\Delta\omega$.) Un largo tiempo después de $t = 2\pi/\Delta\omega$, las contribuciones vectoriales estarán aún ampliamente distribuidas en fase, aunque no tan uniformemente, de modo que la amplitud total $A(t)$ permanece pequeña por un largo tiempo. Todos los vectores alcanzan nuevamente la misma fase [y $A(t)$ retorna a su valor original NA] sólo cuando las pulsaciones entre contribuciones vecinas en frecuencia alcanzan otra vez su máximo. Como las contribuciones vecinas tienen diferencia de frecuencia $\Delta\omega/(N - 1)$, el período para pulsaciones entre frecuencias vecinas es $(N - 1)$ veces el período de la pulsación correspondiente a la separación de frecuencias $\Delta\omega$. Así, si $N \rightarrow \infty$, la amplitud total $A(t)$ se mantiene pequeña “para siempre”, y no retorna nunca a su valor original. Tenemos así lo que se llama una *pulsación*, es decir, una función del tiempo que es significativamente distinta de cero sólo durante un intervalo de tiempo limitado.

Tiempo de duración de una pulsación. Vamos a notar la duración de una pulsación, o sea, el intervalo de tiempo durante el cual $\psi(t)$ es “sustancial”, por el símbolo Δt . Este intervalo está dado aproximadamente por el tiempo en $t = 0$, cuando todas las componentes de frecuencia entre ω_1 y ω_2 están en fase, hasta el tiempo t_1 , cuando todas las componentes de

frecuencia están distribuidas uniformemente en fase sobre un intervalo total de fase de 2π radianes:

$$\Delta t \approx t_1, \quad (38)$$

donde

$$(\omega_2 - \omega_1)t_1 = 2\pi. \quad (39)$$

Así el ancho de banda $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ y el intervalo de tiempo Δt satisfacen la relación

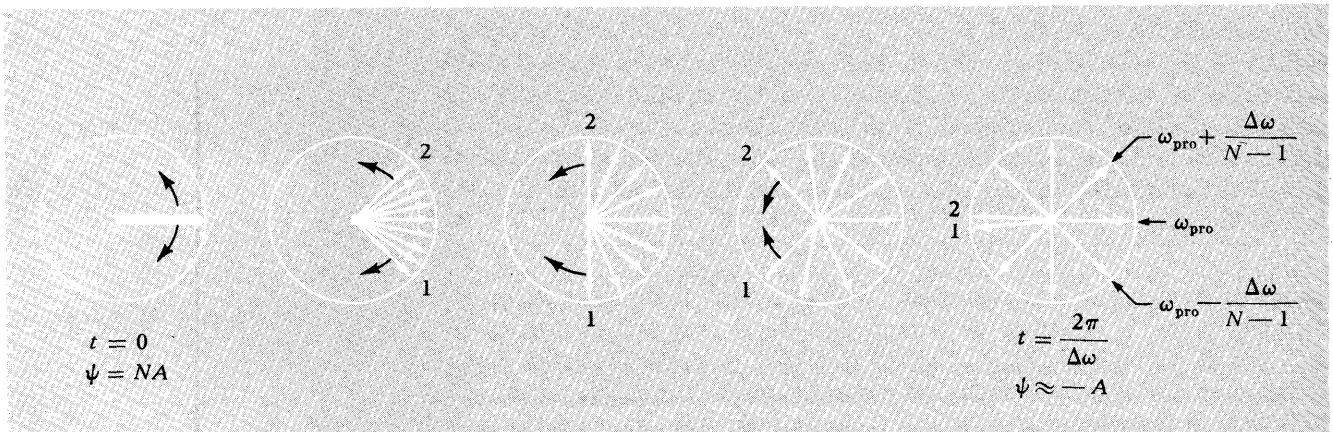
$$\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi, \quad (40)$$

o sea,

$$\boxed{\Delta\nu \Delta t \approx 1.} \quad (41)$$

La ecuación (41) es un ejemplo específico de una relación matemática muy general (y muy importante) entre el tiempo de duración Δt de un pulso $\psi(t)$ y el ancho de banda $\Delta\nu$ del espectro de frecuencias de las componentes armónicas que se superponen para formar la pulsación. Esta relación es de extensa aplicabilidad en toda la física, siempre que se presenten fenómenos con la forma de una pulsación en el tiempo o en alguna otra variable. La relación general es independiente de la forma específica detallada de $\psi(t)$, siempre que $\psi(t)$ tenga características que definen una pulsación, digamos que $\psi(t)$ sea substancialmente distinta de cero solamente un único intervalo limitado de tiempo de duración Δt .

Fig. 6.4 Fotos instantáneas de N oscilaciones ($N = 9$ aquí) distribuidas uniformemente dentro del intervalo de frecuencia $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. La frecuencia estroboscópica es ω_{pro} . La oscilación de frecuencia $\omega = \omega_{\text{pro}}$ “se observa quieta”.



Producto del ancho de banda - intervalo de tiempo. La relación *general* que existe entre el ancho de banda de frecuencias $\Delta\nu$ y el tiempo de duración Δt que describe un pulso está dado por

$$\Delta\nu \Delta t \geq 1. \quad (42)$$

El signo de desigualdad en la ecuación (42) resultó del hecho de que, si superponemos un número de oscilaciones armónicas que ocupan una banda de frecuencia $\Delta\nu$, sólo obtenemos una pulsación de duración tan corta como $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$ eligiendo las constantes de fase relativas en forma apropiada. En el ejemplo de la Fig. 6.4, todas las componentes armónicas tienen la misma constante de fase. Si sus constantes de fase no fueran todas iguales, no habría ningún tiempo en que todas las componentes estuvieran exactamente en fase (como lo están en $t = 0$ en el ejemplo), es decir, no habría un tiempo en que la superposición $\psi(t)$ fuera todo lo grande que es posible. Entonces, el intervalo de tiempo durante el cual $\psi(t)$ es substancialmente distinta de cero (o sea, no demasiado inferior a su valor máximo), deberá ser elegido como un intervalo más ancho. En el límite en que las fases están elegidas completamente al azar, la duración Δt se hace arbitrariamente larga. En ese límite extremo no se puede reconocer una pulsación.

Aporreando el piano. Suponga que usted inventa un método para hacer sonar todas las teclas de un piano simultáneamente. El ancho de banda del sonido que resulta es de alrededor de 4000 cps (en rango del piano). Así, si todas las cuerdas fueran excitadas exactamente en fase a $t = 0$, obtendría un sonido que sería muy fuerte durante un tiempo Δt dado por $\Delta t \approx 1/4\,000 \approx 0,2$ miliseg, y sería relativamente débil después de ese tiempo. Si en su método de golpear todas las teclas al unísono simplemente hace uso de sus brazos o de una tabla larga u otro objeto, entonces es imposible excitar todas las cuerdas en el mismo instante dentro de una pequeña fracción de su período, es decir, una pequeña fracción de alrededor de 10^{-3} seg. En cambio, las constantes de fase es más probable que sean esencialmente casuales. El sonido no tiene entonces el carácter de una pulsación, pero suena como un sonido uniforme.

Oscilaciones armónicas de duración limitada. Ésta es otra ilustración de la ecuación (41). Supongamos que un oscilador es puesto en marcha o llega rápidamente (en unos pocos ciclos) a una amplitud constante A , oscila durante n ciclos de aumento a la oscilación armónica $A \cos \omega_0 t$, luego es desconectado y desaparece en unos pocos ciclos, como se muestra en la Fig. 6.5. Como la oscilación no continúa para siempre, no es

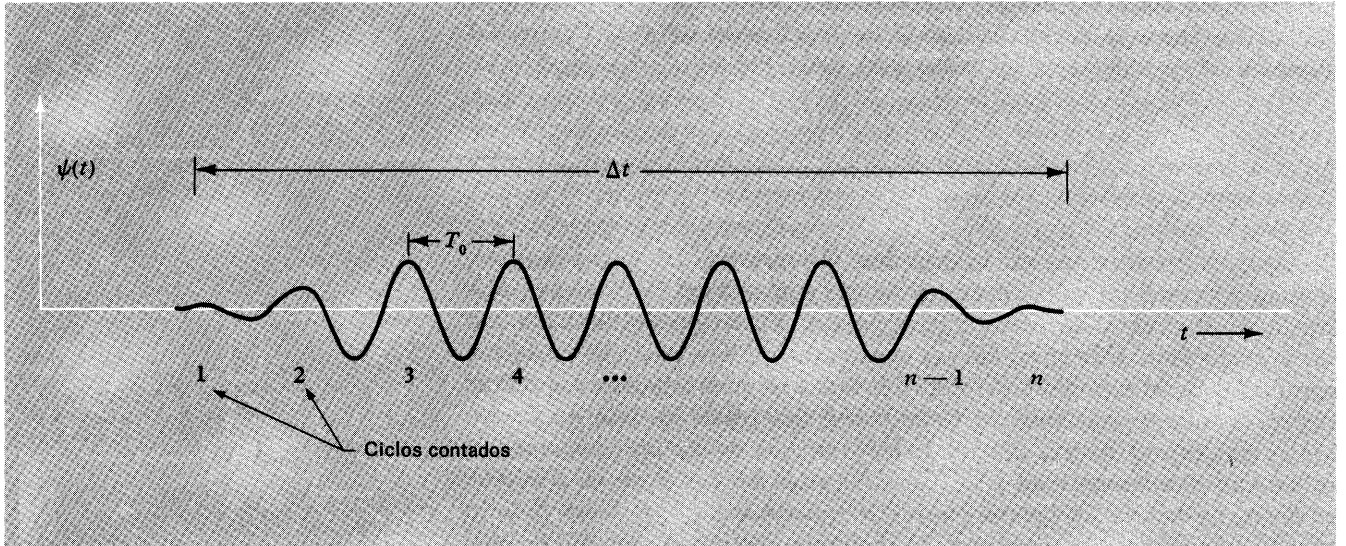


Fig. 6.5 Oscilación armónica de duración limitada.

una oscilación armónica pura de frecuencia ω_0 . Es cierto que la frecuencia (angular) $\omega = \omega_0$ domina, pero de acuerdo a lo que hemos dicho no puede ser la única frecuencia ω presente. Debe haber una banda de frecuencias centrada en $\omega \approx \omega_0$. Veremos aquí una forma muy simple para estimar (en forma grosera) el ancho de banda $\Delta\omega$. Usando la definición de frecuencia como número de ciclos por segundo, contamos simplemente el número total de ciclos en el intervalo de tiempo Δt durante el cual el oscilador es puesto en marcha y lo dividimos por Δt . Así contando n ciclos encontramos

$$\nu(\text{dominante}) = \frac{n}{\Delta t}, \quad (43)$$

que está obligada a ser aproximadamente igual a $\nu_0 = T_0^{-1}$ de acuerdo con la Fig. 6.5. Sin embargo, al inspeccionar la Fig. 6.5 vemos que no es posible especificar n exactamente. Hay una incerteza del orden de $\pm \frac{1}{2}$ ciclo en cada extremo del pulso, donde debemos decidir: “¿Contamos uno más o está terminado?”. Puede advertir que “no interesa demasiado, especialmente si n es grande, pues el error es pequeño comparado con n ”. Sí, pero es justamente *ese* error lo que nos interesa. De acuerdo con la ecuación (43), un ancho de banda de incerteza Δn de un ancho aproximadamente 1 en el número de ciclos n lleva un ancho de frecuencia fraccional $\Delta\nu/\nu$ dado por

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta n}{n} \approx \frac{1}{n}. \quad (44)$$

Tomando el producto de las ecuaciones (43) y (44) se obtiene $\Delta\nu \approx 1/\Delta t$.

Ejemplo 6: Ancho de la banda de televisión

La figura en la pantalla de TV consiste en una configuración en forma de rejilla rectangular de puntos negros y blancos. Un punto dado es "blanco" si la pantalla fosforescente de TV fue recientemente (dentro de $\approx 1/50$ seg) impresionada por un haz de electrones en ese lugar. La separación entre puntos es de aproximadamente 1 mm. Una pantalla tipo de 50×50 cm tiene 500 líneas con 500 puntos por línea, o sea 25×10^4 puntos. Cada punto se renueva cada $1/30$ seg. (Cada dos líneas horizontales una se omite durante un barrido dado del haz de electrones sobre la pantalla. Las líneas omitidas son impresionadas en el siguiente barrido. Así una región dada de la pantalla que incluye muchas líneas horizontales tiene una velocidad de fluctuación de 60 cps. Ésta es la velocidad "estroboscópica" de la TV.) Por lo tanto, la velocidad a la cual las instrucciones "encender, apagar", deben enviarse al haz de electrones que es aproximadamente de $30 \times 25 \times 10^4$ ó 8×10^6 veces por segundo. Las tensiones de antenas, transmisora y receptora deben tener por lo tanto alrededor de 10^7 pequeños pulsos de tensión, con orden encender-apagar por segundo. En cada pulso se puede perder no más que $\Delta t \approx 10^{-7}$ seg para evitar superposiciones. Por lo tanto, el ancho de banda requerido es $\Delta \nu \approx 1/\Delta t \approx 10^7$ cps = 10 Mc. Las frecuencias de onda de transmisión, usadas para el rango de TV van aproximadamente desde 55 a 210 Mc. De acuerdo con nuestra discusión sobre ondas de radio AM, se puede pensar que los 10 Mc estarán extendidos sobre una banda lateral superior y una inferior de "modulación de frecuencias". En realidad, por una técnica ingeniosa la onda de transmisión y una de las bandas laterales se han "eliminado". Son filtradas y nunca se aplican a la antena transmisora (pero se regeneran en el receptor, a partir de la información contenida en la única banda lateral transmitida). Esta técnica, llamada transmisión en una única banda lateral, disminuye el requerimiento para el ancho de banda a la mitad aproximadamente a 5 Mc. Así entre los 55 y los 210 Mc hay una cantidad de "espacio de frecuencias" que permite aproximadamente 30 estaciones de TV cada una empleando 5 Mc de ancho de banda. Si hubiera más estaciones, no sería posible sintonizarlas una a una, habría interferencia entre ellas.

Ejemplo 7: Radiodifusora con luz visible

Un *laser* es un dispositivo del que se espera que dé tanto control sobre la radiación electromagnética en las frecuencias de luz visible, como se tiene actualmente en las frecuencias de radio y microondas. Muchos individuos trabajan arduamente para desarrollar técnicas que modulen la salida de luz en una forma análoga al modo en que las transmisiones de radio o TV modulan su portadora. Supongamos que se desarrolla una técnica conveniente de modulación sobre la mayor parte del rango

de frecuencias visibles. Entonces podemos considerar cuántos canales de TV pueden ser acomodados dentro del “espacio de frecuencia” que permite el rango de frecuencias visibles de la luz. La luz va a ser usada como la portadora. El ancho de banda que se requiere es de 10 Mc por canal. La luz visible tiene longitudes de onda desde alrededor de 6500 Å (roja) a 4500 Å (azul), es decir, frecuencias desde $\nu = c/\lambda = 3 \times 10^{10}/6,5 \times 10^{-5} \approx 4,6 \times 10^{14}$ Hz $= 4,6 \times 10^8$ Mc hasta $\nu = 3 \times 10^{10}/4,5 \times 10^{-5} \approx 6,6 \times 10^{14}$ Hz $= 6,6 \times 10^8$ Mc. Así es que la banda total de frecuencias que podrían obtenerse es de 4,6 a $6,6 \times 10^8$ Mc, o sea, una banda de 2×10^8 Mc. Esto permitiría 2×10^7 canales de TV que no se superponen, cada uno de ellos con un ancho de banda de 10 Mc. (Quizá podríamos exigir que al menos uno en un millón de estos canales sean distribuidos a televisión educativa.)

Solución exacta para la pulsación $\psi(t)$ producida por un espectro de frecuencias “cuadrado”. Ahora encontramos una expresión explícita para la pulsación $\psi(t)$ formada por la superposición de N diferentes componentes armónicos que tienen igual amplitud A , iguales constantes de fase (cero), y frecuencias distribuidas uniformemente entre la menor ω_1 y la mayor ω_2 . Ésta es la superposición que se ilustra en las “instantáneas estroboscópicas” de la Fig. 6.4. Está dada por

$$\psi(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos (\omega_1 + \delta\omega)t + A \cos (\omega_1 + 2\delta\omega)t + \dots + A \cos \omega_2 t, \quad (45)$$

donde $\delta\omega$ es el espaciamiento de frecuencias entre contribuciones vecinas, o sea,

$$\delta\omega \equiv \frac{\omega_2 - \omega_1}{N - 1} = \frac{\Delta\omega}{N - 1}. \quad (46)$$

La ecuación (45) expresa $\psi(t)$ como una *superposición lineal sobre muchas componentes exactamente armónicas*. Nosotros queremos encontrar otra expresión para $\psi(t)$ en la forma de una *oscilación casi armónica con una sola frecuencia de oscilación “rápida”*, ω_{pro} dada por

$$\omega_{\text{pro}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad (47)$$

y teniendo una amplitud $A(t)$ que es “casi constante” en la escala de tiempos de las oscilaciones rápidas. Esto es, de nuestra experiencia con una superposición de dos oscilaciones armónicas (Sec. 5.2), esperamos encontrar una expresión de la forma

$$\psi(t) = A(t) \cos \omega_{\text{pro}} t. \quad (48)$$

Realmente podemos encontrar tal expresión. Resulta que si el ancho de banda $\Delta\omega$ es pequeño comparado con ω_{pro} , entonces $A(t)$ es lentamente variable en la escala de tiempos de las oscilaciones rápidas. (Sin embargo, nuestra respuesta debe ser totalmente independiente de esa condición.) Habremos escrito $\psi(t)$ como una oscilación casi armónica de amplitud modulada. Encontramos que $\psi(t)$ tiene la forma de un pulso, como ya habíamos mostrado en forma cualitativa en la discusión que seguía a la Fig. 6.4. De la expresión exacta estamos en condiciones de ver qué es lo que significa realmente el enunciado de que: el producto del ancho de banda por el tiempo de duración es aproximadamente la unidad.

Para simplificar el álgebra, usaremos números complejos. La ecuación (45) de superposición es la constante A por la parte real de la función compleja $f(t)$ donde

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{i\omega_1 t} + e^{i(\omega_1 + \delta\omega)t} + e^{i(\omega_1 + 2\delta\omega)t} + \dots + e^{i(\omega_1 + \Delta\omega)t} \\ &\equiv e^{i\omega_1 t} S, \end{aligned} \quad (49)$$

donde [haciendo $a = e^{i\delta\omega t}$ y usando $\Delta\omega = (N-1)\delta\omega$] la suma S es la serie geométrica

$$S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} aS &= a + a^2 + \dots + a^{N-1} + a^N, \\ (a-1)S &= a^N - 1, \\ S &= \frac{a^N - 1}{a - 1} = \frac{e^{iN\delta\omega t} - 1}{e^{i\delta\omega t} - 1} \\ &= \frac{e^{(1/2)(iN\delta\omega t)}}{e^{(1/2)(i\delta\omega t)}} \cdot \left[\frac{e^{(1/2)(iN\delta\omega t)} - e^{-(1/2)(iN\delta\omega t)}}{e^{(1/2)(i\delta\omega t)} - e^{-(1/2)(i\delta\omega t)}} \right] \\ &= e^{(1/2)i(N-1)\delta\omega t} \frac{\text{sen } \frac{1}{2}N\delta\omega t}{\text{sen } \frac{1}{2}\delta\omega t} \\ &= e^{(1/2)i\Delta\omega t} \frac{\text{sen } \frac{1}{2}N\delta\omega t}{\text{sen } \frac{1}{2}\delta\omega t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{i\omega_1 t} S = e^{i[\omega_1 + (1/2)\Delta\omega]t} \frac{\text{sen } \frac{1}{2}N\delta\omega t}{\text{sen } \frac{1}{2}\delta\omega t} \\ &= e^{i\omega_{\text{pro}} t} \frac{\text{sen } \frac{1}{2}N\delta\omega t}{\text{sen } \frac{1}{2}\delta\omega t}. \end{aligned}$$

Finalmente, $\psi(t)$ es la constante A por la parte real de $f(t)$,

$$\psi(t) = A \cos \omega_{\text{pro}} t \frac{\text{sen } \frac{1}{2}N\delta\omega t}{\text{sen } \frac{1}{2}\delta\omega t},$$

o sea:

$$\psi(t) = A(t) \cos \omega_{\text{pro}} t, \quad (50)$$

donde

$$A(t) = A \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta \omega t}{\sin \frac{1}{2} \delta \omega t}. \quad (51)$$

La ecuación (51) es exacta. Vamos a controlar, para ver si se reduce a la forma familiar para las pulsaciones cuando hay solamente dos términos. Haciendo $N=2$ en la ecuación (51) y usando la identidad $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, con $x = \frac{1}{2} \delta \omega t$, obtenemos

$$\begin{aligned} N = 2: \quad \psi(t) &= [2A \cos \frac{1}{2} \delta \omega t] \cos \omega_{\text{pro}} t \\ &= 2A \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) t \cos \omega_{\text{pro}} t. \end{aligned}$$

Ésta es la misma expresión encontrada para pulsaciones en la Sección 1.5.

Una forma más conveniente para la ecuación (51) se obtiene poniendo la constante A en función de $A(0)$, el valor de $A(t)$ para el tiempo $t = 0$. Una inspección de la ecuación (51) muestra que debe tenerse mucho cuidado al evaluar $A(t)$ para $t = 0$ porque tanto el numerador como el denominador de la ecuación (51) se anulan en ese punto. Este problema se resuelve fácilmente desarrollando el numerador y el denominador en una serie de Taylor en $t = 0$. Haciendo $\theta \equiv \frac{1}{2} \delta \omega t$, tenemos

$$\frac{\sin N\theta}{\sin \theta} = \frac{N\theta - \frac{1}{6}(N\theta)^3 + \dots}{\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots}. \quad (52)$$

Para θ suficientemente pequeño, podemos despreciar todos los términos excepto el primero en el numerador y el denominador. De este modo encontramos

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin N\theta}{\sin \theta} \right\} = N. \quad (53)$$

Entonces la ecuación (51) da

$$A(0) = NA, \quad A = \frac{A(0)}{N}, \quad (54)$$

es decir,

$$A(t) = A(0) \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta \omega t}{N \sin \frac{1}{2} \delta \omega t}. \quad (55)$$

Ahora vayamos al otro límite interesante, cuando N es muy grande. Cuando N se hace suficientemente grande, el espaciamiento de frecuencias $\delta\omega$ entre componentes armónicos vecinos se hace lo suficientemente chico, de modo que no puede resolverse por ningún aparato experimental que imaginemos. (Esto es física, no matemáticas, nosotros *siempre* debemos pensar en algún aparato, eventualmente.) Por lo tanto podemos pensar en las componentes de frecuencia como si estuvieran distribuidas en forma continua. Un N tan grande recibe la denominación de “infinito”. Para N muy grande se puede despreciar la diferencia entre N y $N - 1$. Entonces

$$N = \text{grande:} \quad N\delta\omega \approx (N - 1)\delta\omega = \Delta\omega. \quad (56)$$

Hagamos que N tienda a “infinito” y $\delta\omega$ a “cero”. El producto es siempre el ancho de banda $\Delta\omega$. En el denominador de la ecuación (55), en el término $\sin \frac{1}{2}\delta\omega t$, supondremos que $\delta\omega$ tiende a cero pero que t no tiende a infinito (el experimento debe terminar alguna vez). En ese caso podemos despreciar todo excepto el primer término en la serie de Taylor para $\sin \frac{1}{2}\delta\omega t$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} A(t) &= A(0) \frac{\sin \frac{1}{2}N\delta\omega t}{N\sin \frac{1}{2}\delta\omega t} \\ &= A(0) \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta\omega t}{N \cdot \frac{1}{2}\delta\omega t}, \\ &= A(0) \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta\omega t}{\frac{1}{2}\Delta\omega t}, \end{aligned} \quad (57)$$

y

$$\psi(t) = A(t) \cos \omega_{\text{pro}} t. \quad (58)$$

Ahora volvamos a la expresión para $\psi(t)$ como una superposición, ecuación (45), y expresémosla en una forma apropiada que corresponda al límite $\delta\omega \rightarrow 0$. Podemos usar las ecuaciones (54) y (56) para escribir

$$A = \frac{A(0)}{N} = \frac{A(0)}{\Delta\omega} \delta\omega. \quad (59)$$

Entonces la superposición de la ecuación (45) puede ser expresada como

$$\psi(t) = \frac{A(0)}{\Delta\omega} [\delta\omega \cos \omega_1 t + \delta\omega \cos (\omega_1 + \delta\omega)t + \cdots + \delta\omega \cos \omega_2 t]. \quad (60)$$

Pero, en el límite $\delta\omega \rightarrow 0$, la expresión entre corchetes es justamente la integral de $\cos \omega t$ por $d\omega$ (reemplazamos la letra δ por d), integrada desde $\omega = \omega_1$ a ω_2 . Por lo tanto, la ecuación (60) se convierte en

$$\psi(t) = \frac{A(0)}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega t d\omega. \quad (61)$$

Integral de Fourier. La ecuación (61) es un ejemplo de una *superposición continua de armónicos o integral de Fourier*. Resulta que cualquier función (razonable) no periódica $\psi(t)$ puede ser expresada como una superposición continua de Fourier de la forma general

$$\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (62)$$

Las funciones continuas $A(\omega)$ y $B(\omega)$ se llaman *coeficiente Fourier* de $\psi(t)$ por analogía con el mismo nombre dado a las constantes en una serie de Fourier que consiste en frecuencias discretas.

Por comparación de la ecuación (61) y (62), vemos que la función $\psi(t)$ dada por las ecuaciones (57) y (58) tienen coeficientes de Fourier

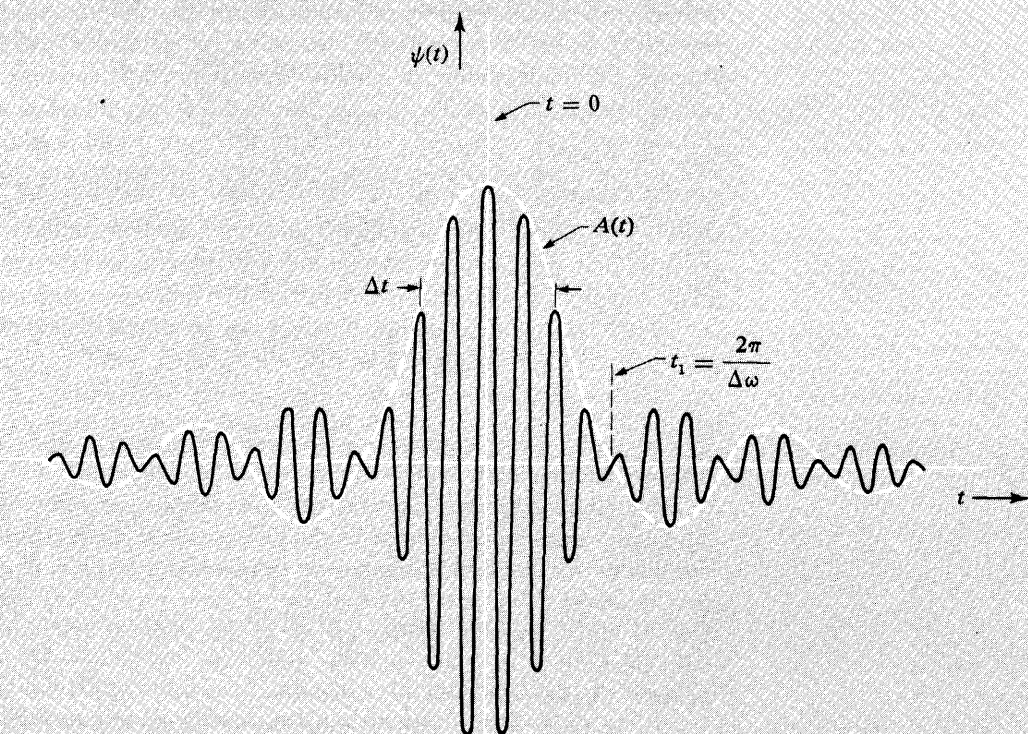
$$A(\omega) = 0 \quad \text{para toda } \omega,$$

$$B(\omega) = 0 \quad \text{para } \omega \text{ no comprendida entre } \omega_1 \text{ y } \omega_2,$$

$$B(\omega) = \frac{A(0)}{\Delta\omega} \quad \text{para } \omega \text{ entre } \omega_1 \text{ y } \omega_2. \quad (63)$$

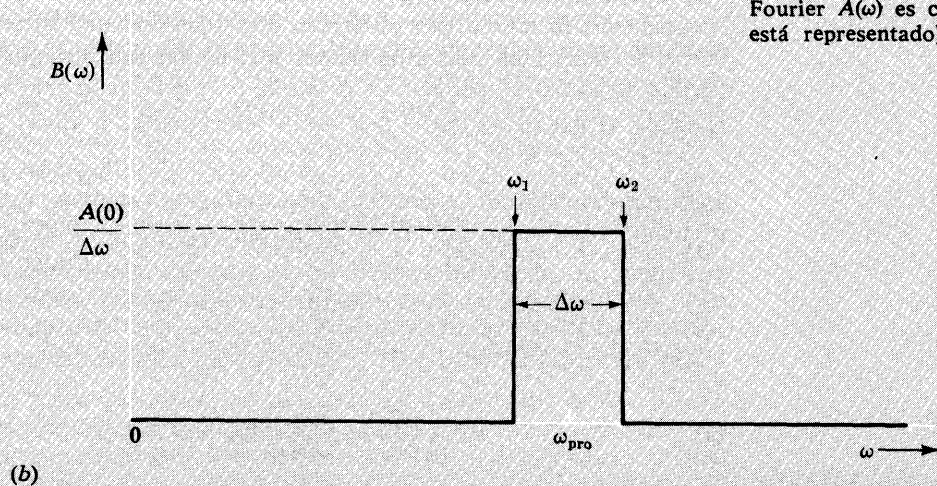
Espectro de frecuencias de Fourier. Un gráfico de los coeficientes de Fourier en función de ω se conoce como el *espectro de frecuencias* de la superposición continua de Fourier. El espectro dado por la ecuación (63) es tan simple como puede serlo un espectro. Es “plano” [es decir, $B(\omega)$ es constante] en una cierta banda limitada de frecuencias de ancho $\Delta\omega$, y es cero en todo el resto. Tal tipo de espectro es algunas veces llamado espectro “cuadrado” debido a la apariencia de su gráfico. [En general, debemos dar dos gráficos, uno de $A(\omega)$ y otro de $B(\omega)$.]

En la Fig. 6.6 esquematizamos la pulsación $\psi(t)$ y su coeficiente de Fourier $B(\omega)$. Note que $A(t)$ tiene su primer cero (parte t positivo) a un tiempo t_1 que satisface $t_1 = 2\pi/\Delta\omega$. Esto indica el tiempo que se tardó para que todas las componentes de frecuencia estén distribuidas uniformemente en sus fases relativas, sobre un intervalo de 2π radianes, como nosotros ya habíamos concluido de las “instantáneas estroboscópicas” de la Fig. 6.4. Para el tiempo de duración Δt durante el cual la amplitud $A(t)$ de $\psi(t)$ es relativamente grande, podemos tomar el intervalo entre los dos ceros de $A(t)$ en $t = -t_1$ y $t = +t_1$. Sin embargo, esto es demasiado largo. Es más razonable tomar Δt como el intervalo, fuera del cual, $\psi(t)$ “nunca se recupera” (pierde su amplitud). Una definición conveniente del ancho total Δt (para esta pulsación en particular) es tomar la



(a)

Fig. 6.6 Análisis de Fourier de una función no periódica. a) Pulso $\psi(t)$ que corresponde a las ecuaciones 57 y 58. b) Espectro continuo de frecuencias de coeficientes de Fourier dada por la ecuación 63. (Debido a que $\psi(t)$ es una función par de t , el coeficiente de Fourier $A(\omega)$ es cero para toda ω ; no está representado).



(b)

mitad del intervalo de tiempo entre los dos ceros en $t = \pm t_1$. Así podemos *definir* la duración de esta pulsación como

$$\Delta t = t_1 = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

$$\Delta\nu \Delta t = 1. \quad (64)$$

La ecuación (64) tiene un signo “igual” en vez del “aproximadamente igual” por que hemos definido en forma precisa qué entendemos por duración Δt para esta pulsación. De acuerdo con nuestra definición, $A(t)$, en los extremos del intervalo Δt , está dada por

$$A\left(\frac{t_1}{2}\right) = A(0) \frac{\text{sen}(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} A(0). \quad (65)$$

Por lo tanto, en el comienzo y al final del intervalo Δt la amplitud $A(t)$ está reducida en un factor $2/\pi$ de su valor máximo.

Un “oscilador casi armónico” con desplazamientos $\psi(t) = A(t) \cos \omega_{\text{pro}} t$ tiene una energía almacenada proporcional a $A^2(t)$. Por lo tanto, la energía es máxima en el centro de la pulsación (en $t = 0$) y disminuye a una fracción $(2/\pi)^2 = 0,406$ en el comienzo y en el final del intervalo Δt . Por lo tanto, nuestra definición de la duración Δt corresponde al intervalo durante el cual el oscilador tiene un 40 % o más del máximo de energía almacenada.

En la Sección 6.4 estudiaremos otros ejemplos de pulsaciones y las correspondientes superposiciones continuas de Fourier.

Propagación de un paquete de ondas. Suponga un transmisor en $z = 0$ que describe un movimiento en la forma de una pulsación similar al de la Fig. 6.6. Como el transmisor irradia ondas en el medio durante un tiempo de duración limitada y como las ondas se propagan hacia afuera del transmisor, formarán una pulsación de ondas con una extensión limitada en el espacio. Una pulsación de ese tipo se denomina *paquete de ondas* o *grupo de ondas*. El paquete de ondas se propaga con la velocidad de grupo. Debido al hecho de que k y ω están relacionadas a través de la relación de dispersión $k(\omega)$, la existencia de una banda $\Delta\omega$ de frecuencias emitidas por el transmisor, implica una banda correspondiente Δk de número de ondas (y de sus correspondientes longitudes de ondas) en el paquete de ondas. Relacionada con la frecuencia dominante ω_0 habrá un número de onda dominante $k_0 = k(\omega_0)$ [k_0 se obtiene sustituyendo $\omega = \omega_0$ en la relación funcional $k(\omega)$]. La banda Δk está centrada en k_0 y se obtiene derivando la relación de dispersión y haciendo $\omega = \omega_0$:

$$\Delta k = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 \Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{v_g}, \quad (66)$$

donde vemos $v_g = (d\omega/dk)_0$. [El subíndice cero significa que la derivada se evalúa en el centro de la banda. Además, despreciamos términos mayores en el desarrollo en serie de Taylor de la relación de dispersión, por lo cual en la ecuación (66) puede ser considerado el primer término.]

Producto de la longitud por el ancho de banda en número de onda. Un paquete de longitud Δz que se propaga a la velocidad de grupo v_g pasa por un punto dado fijo z en un intervalo de tiempo Δt dado por

$$\Delta z \approx v_g \Delta t. \quad (67)$$

Haciendo el producto de las ecuaciones (66) y (67), obtenemos

$$\boxed{\Delta k \Delta z \approx \Delta \omega \Delta t.} \quad (68)$$

Por lo tanto, como $\Delta \omega \Delta t \geq 2\pi$ tenemos que $\Delta k \Delta z \geq 2\pi$, es decir, que usando el número de onda $\sigma \equiv k/2\pi = \lambda^{-1}$, tenemos

$$\boxed{\Delta \sigma \Delta z \gtrsim 1.} \quad (69)$$

esta relación es completamente análoga a la relación general $\Delta \nu \Delta t \gtrsim 1$, pero se aplica a una pulsación en el espacio no en el tiempo.

Otra manera simple de obtener la ecuación (69) es considerar la "incerteza del ancho de banda" en el número de ciclos contenidos en Δz . Así σ (en ciclos por unidad de longitud) está dada por

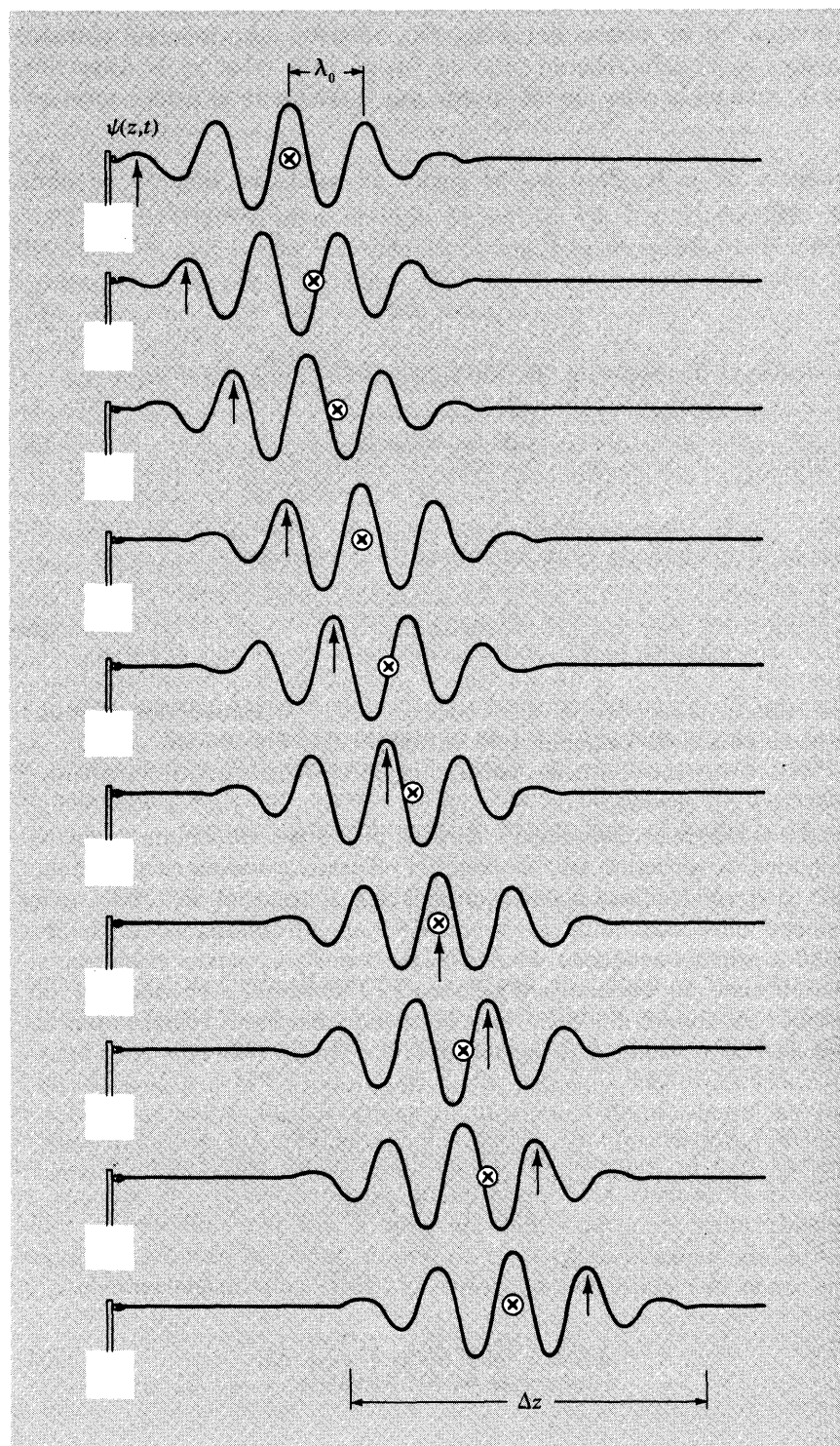
$$\sigma \approx \frac{\text{ciclos} \pm \frac{1}{2}}{\Delta z}, \quad (70)$$

de modo que el ancho de banda en número de onda $\Delta \sigma$ es aproximadamente $1/\Delta z$. Esta deducción es la análoga en el espacio a la deducción de $\Delta \nu \Delta t \approx 1$ que dimos siguiendo la ecuación (44).

Extensión del paquete de ondas con el tiempo. Finalmente puntualizaremos que la longitud Δz de un paquete no permanece constante, mientras el paquete se propaga en un medio dispersivo, el paquete se extiende mientras avanza. Esto se debe a que la velocidad de grupo $v_g = d\omega/dk$ depende de k (o de ω). Por lo tanto, la banda Δk contiene una banda de velocidades de grupo Δv_g , dada aproximadamente por

$$\Delta v_g = \left(\frac{dv_g}{dk} \right)_0 \Delta k = \left(\frac{d^2 \omega}{dk^2} \right)_0 \Delta k. \quad (71)$$

Fig. 6.7 Paquete de ondas con velocidad de fase igual a dos veces la velocidad de grupo. La flecha se desplaza a la velocidad de fase siguiendo a un punto de fase constante para la longitud de onda dominante. La cruz se desplaza con la velocidad de grupo siguiendo al paquete como un todo.



Un grupo que parte en $t = 0$ con un ancho $(\Delta z)_0$ tendrá en un tiempo t un ancho dado aproximadamente por

$$(\Delta z)_t \approx (\Delta z)_0 + (\Delta v_g)t. \quad (72)$$

el tiempo Δt que el paquete tarda en pasar por un punto fijo z crece de acuerdo con esto. [La ecuación (68) sirve para todos los tiempos y , por supuesto, $\Delta\omega$ y Δk son constantes.]

Debido a esta extensión del paquete, las relaciones $\Delta\sigma\Delta z \approx 1$ y $\Delta\nu\Delta t \approx 1$ no son válidas excepto en $t = 0$. Para obtener una salida del transmisor que satisfaga $\Delta\nu\Delta t \approx 1$ debemos hacer que todas las componentes armónicas estén en la fase *correcta* en $t = 0$. Sin embargo, una vez dejamos que el grupo se propague suficiente distancia en el medio, *no podemos* tener la banda entera Δk en fase en un punto adelante de la propagación, porque algunas partes del grupo llegan antes y otras después debido a la variación en la velocidad de grupo. Por lo tanto, las fases de diferentes componentes de frecuencia de la onda son distintas unas de otras en un punto más adelante, a diferencia de la situación en $t = 0$. Entonces obtenemos $\Delta\sigma\Delta z \approx \Delta\nu\Delta t > 1$.

Por supuesto, si el medio es “no dispersivo”, entonces el paquete no se extiende y la relación $\Delta\sigma\Delta z \approx \Delta\nu\Delta t \approx 1$ se mantiene.

Paquetes de ondas en el agua. Podemos hacer un perfecto paquete de ondas expansivo circular tirando un guijarro en una laguna. Con la práctica podrá seguir el paquete con sus ojos y controlar las olas particulares que crecen por detrás, pasan a través del paquete, y “desaparecen” al frente. (La velocidad de fase es mayor que la velocidad de grupo para olas mayores que 1,7 cm, que es el caso general para las ondas de un guijarro de tamaño moderado. Un dibujo de un grupo de ondas con una velocidad de fase doble de la velocidad de grupo se muestra en la Fig. 6.7.) Les pido a los estudiantes que estudien paquetes de ondas en agua, en zanjas, piscinas y lagunas. Debido al hecho de que estos paquetes se mueven bastante rápidamente (véase la Tabla 5.1, Sec. 5.2), su estudio demanda cierta práctica, pero el esfuerzo está ampliamente recompensado. (Véase los Experimentos caseros.)

6.4 Análisis de Fourier de pulsaciones

En la Sección 6.3 encontramos nuestro primer ejemplo de una función del tiempo $\psi(t)$ desarrollada con una superposición continua de Fourier (integral de Fourier). En esta sección mostraremos cómo encontrar el espectro continuo de frecuencias de cualquier pulsación (razonable) y daremos varios ejemplos que tienen un interés general en muchas ramas de la física.

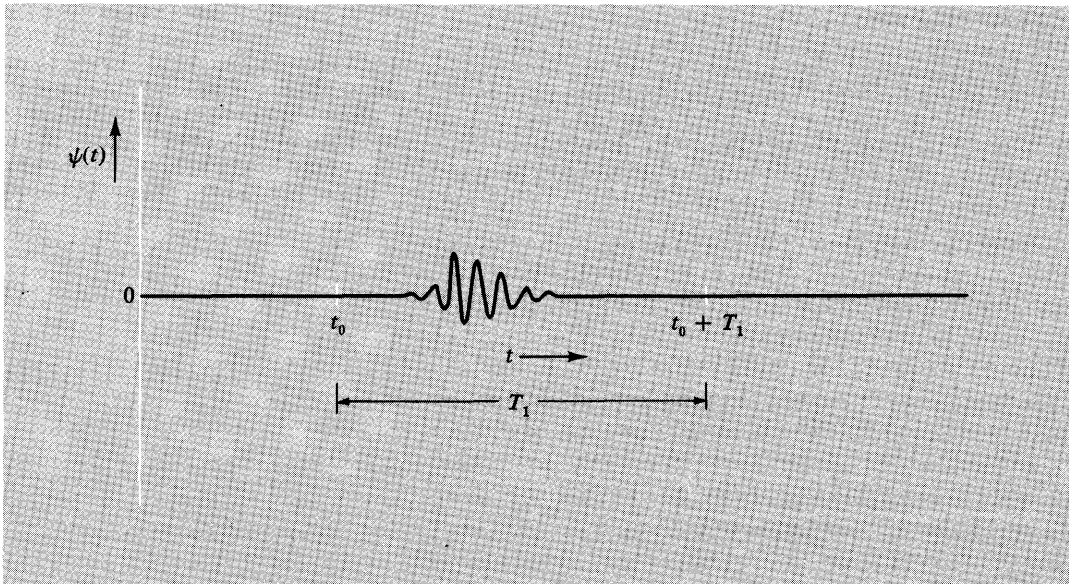


Fig. 6.8 Un pulso $\psi(t)$. Para tiempos anteriores t_0 o mayores que $t_0 + T_1$, la función $\psi(t)$ es cero.

Pulsación de duración limitada. Supongamos que $\psi(t)$ tiene la forma de una pulsación de duración limitada, como se muestra en la Fig. 6.8. Suponemos que $\psi(t)$ es cero en un tiempo suficientemente rápido t_0 (y todo el tiempo anterior). Del mismo modo suponemos que $\psi(t)$ es cero a un tiempo suficientemente tarde $t_0 + T_1$ (y todo el tiempo posterior). Por lo tanto, suponemos que hay algún intervalo finito T_1 dentro del cual se producen las oscilaciones de $\psi(t)$, como se ve en la Fig. 6.8. El intervalo de tiempo T_1 es arbitrario, excepto en que $\psi(t)$ debe ser cero para todos los tiempos fuera del intervalo. Eventualmente podemos hacer T_1 muy grande (pero no infinito). (Entonces $1/T_1 \equiv \nu_1$ será nuestra “unidad de frecuencia”, una unidad que puede ser elegida tan pequeña como queramos).

En la Sección 2.3 aprendimos cómo analizar en Fourier una función periódica $F(t)$ definida para todo t y que tuviera un período T_1 , de modo que $F(t + T_1) = F(t)$. También aprendimos cómo analizar en Fourier una función definida sólo en un intervalo limitado de t . Analizaremos según Fourier construyendo una función periódica definida para todo t y coincidente con la función de interés en el intervalo donde está definida la función. En ese caso podremos usar las fórmulas derivadas para funciones periódicas. Éste es el procedimiento que seguiremos ahora. Construiremos una función periódica $F(t)$ con período T_1 , donde T_1 es el intervalo de tiempo mostrado en la Fig. 6.8, haciendo a $F(t)$ simplemente una “repetición” de la pulsación $\psi(t)$ en cada intervalo similar de duración T_1 . Esto se muestra en la Fig. 6.9.

La serie de Fourier para la función periódica $F(t)$ está dada en las ecuaciones (2.49) hasta (2.52) de la Sección 2.3. Aquí recopilamos aquellos resultados que necesitamos

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t, \quad (73)$$

con

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \frac{2\pi}{T_1}. \quad (74)$$

Entonces

$$B_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t) dt, \quad (75)$$

$$B_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad (76)$$

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t) \sin n\omega_1 t dt, \quad (77)$$

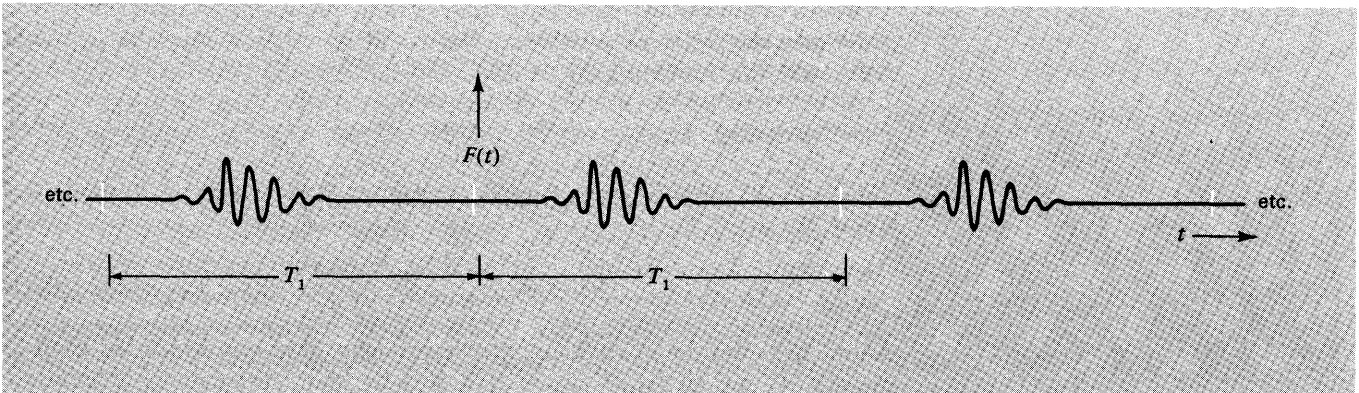
donde

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora adaptaremos las ecuaciones desde la (73) a la (77) a nuestro problema actual, que es expresar la pulsación $\psi(t)$ como una superposición de oscilaciones armónicas.

En primer lugar, notemos que el término constante B_0 donde en la ecuación (73) puede no estar (es decir, B_0 es cero). Esto ocurre porque supusimos que $\psi(t)$ era cero para tiempos suficientemente antes y suficientemente después. No hay un “desplazamiento constante”, o voltaje constante, o si lo hay, está incluido en nuestra $\psi(t)$. (Esto no significa que no podamos decirle, por ejemplo, el voltaje DC en las placas verti-

Fig. 6.9 Función periódica $F(t)$ con período T_1 construida por “repetición” del pulso $\psi(t)$ en intervalos sucesivos de duración T_1 .



cales del osciloscopio si está interesado en ello. Simplemente significa que *nosotros* no estamos interesados. El gran poder del principio de superposición es que nos permite descartar partes “no interesantes” de cualquier superposición con el argumento “ya entendemos eso; siempre podemos agregarlo nuevamente”).

De la suma de Fourier a la integral de Fourier. Considere los primeros pocos términos en las sumas infinitas de la ecuación (73). Estos términos dan las contribuciones $A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t$, $A_2 \sin 2\omega_1 t + B_2 \cos 2\omega_1 t$, etc. *Estos primeros pocos términos son despreciablemente pequeños.* Esto es obvio según nuestro esquema de la Fig. 6.8. Vemos que no hay componentes de $\psi(t)$ que varíen tan lentamente como una oscilación con período T_1 . La función $F(t)$ construida artificialmente tiene en realidad una componente de frecuencia con período T_1 . Pero como T_1 es arbitrario (excepto para las propiedades que hemos especificado), podemos doblarlo, o sea, reemplazarlo por un nuevo T_1 dos veces de grande. Luego el doble de eso, etc., etc. Vemos que como T_1 puede hacerse tan grande como queramos, la frecuencia angular $\omega_1 = 2\pi/T_1$ puede, correspondientemente, hacerse tan pequeña como queramos. De este modo, las constantes introducidas artificialmente A_1 y B_1 , aunque no estrictamente cero, son (como B_0) estrictamente no interesantes. Por lo tanto, las constantes A_2 y B_2 son esencialmente cero (para T_1 suficientemente grande). En realidad, podemos tomar T_1 tan grande, que todas las primeras pocas constantes A_n y B_n son despreciables, donde “primeras pocas” pueden significar, por ejemplo, las primeras diez mil o algo así. Ahora consideremos un n tan grande que A_n y B_n no son completamente despreciables. Considere dos términos sucesivos en la ecuación (73), designados por n y $n + 1$:

$$F(t) = \dots + A_n \sin n\omega_1 t + A_{n+1} \sin(n\omega_1 + \omega_1)t + \dots \quad (78)$$

Si T_1 es suficientemente grande, podemos suponer que ω_1 es tan pequeña y n tan grande (los primeros pocos n ya han pasado, tenían coeficientes despreciables) que A_{n+1} difiere sólo en forma infinitesimal de A_n . Entonces podemos considerar $n\omega_1$ como la variable continua ω , y A_n como una función continua de ω :

$$\omega = n\omega_1. \quad (79)$$

Sea $\delta\omega$ el incremento de ω cuando n se incrementa en δn al ir desde n a $n + \delta n$

$$\delta\omega = \omega_1 \delta n, \quad \delta n = \frac{\delta\omega}{\omega_1}. \quad (80)$$

Ahora hagamos δn lo suficientemente pequeño para que todos los coeficientes A_n en la banda desde n a $n + \delta n$ sean esencialmente iguales

unos a otros. Podemos entonces agrupar juntos todos los términos en la ecuación (78) que corresponde a la banda δn , debiendo tener todos ellos la misma frecuencia ω (el valor promedio de ω en la banda $\delta\omega$). Como todos los términos son iguales (en una banda), y como hay δn términos, podemos escribir las series de la ecuación (78) en la forma [usando las ecuaciones (79) y (80)].

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \cdots + \delta n A_n \text{sen } n\omega_1 t + \cdots \\
 &= \cdots + \delta\omega \frac{A_n}{\omega_1} \text{sen } \omega t + \cdots \\
 &\equiv \cdots + \delta\omega A(\omega) \text{sen } \omega t + \cdots \\
 &= \int_0^\infty A(\omega) \text{sen } \omega t d\omega + \cdots
 \end{aligned} \tag{81}$$

Para llevar a la última ecuación simplemente reconocimos que la suma sobre sucesivas bandas de ancho δn podrá ser escrita como una integral, con δn reemplazable por el símbolo más común: $d\omega$. Los puntos suspensivos (...) representan los términos restantes en la ecuación (73) que se originan en la suma $\Sigma B_n \cos \omega_1 t$. Esta suma también se convierte en una integral. Así obtenemos la expresión completa.

$$F(t) = \int_0^\infty A(\omega) \text{sen } \omega t d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t d\omega, \tag{82}$$

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= A(n\omega_1) = \frac{A_n}{\omega_1}, \\
 B(\omega) &= B(n\omega_1) = \frac{B_n}{\omega_1}.
 \end{aligned} \tag{83}$$

Note que hemos hecho que la variable continua ω comience en cero. Podemos hacer eso porque sabemos que A_n y B_n son cero cerca de $n = 0$, de modo que $A(\omega)$ y $B(\omega)$ deben ser cero cerca de $\omega = 0$.

De acuerdo con las ecuaciones (83) y (77), $A(\omega)$ está dada por

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega_1 T_1} \int_{t_0}^{t_0 + T_1} F(t) \text{sen } \omega t dt,$$

o sea, como $\omega_1 T_1 = 2\pi$,

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \text{sen } \omega t dt,$$

donde usamos el hecho de que la integral de la función periódica $F(t)$ construida artificialmente sobre uno de sus períodos iguales a la integral del pulso no periódico $\psi(t)$ sobre todo el tiempo.

Integral de Fourier. Finalmente, podemos descartar la función periódica $F(t)$ dada en la ecuación (82) y escribir la *integral de Fourier*,

$$\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (84)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \psi(t) \sin \omega t dt, \quad (85)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \psi(t) \cos \omega t dt. \quad (86)$$

Ahora podemos aplicar estas fórmulas a algunos ejemplos interesantes.

Aplicación: Espectro cuadrado de frecuencia

Suponga que $A(\omega)$ es cero para todo ω y suponga que $B(\omega)$ es una constante para valores de ω en el intervalo entre ω_1 y ω_2 y es cero para toda otra ω . Permítanos elegir el valor constante de B en este intervalo, de modo que el “área” de un gráfico de $B(\omega)$ respecto de ω sea la unidad, es decir,

$$B(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega} \quad \text{para } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega; \quad (87)$$

$$B(\omega) = 0 \quad \text{en toda otra parte}$$

(Note que como $B(\omega)$ ha sido elegido para tener dimensiones de la inversa de la frecuencia, $\psi(t)$ resultaría ser adimensional.) Ésta es la solución para $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t d\omega \\ &= 0 + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\Delta\omega} \cos \omega t d\omega = \frac{1}{\Delta\omega} \cdot \frac{\sin \omega t}{t} \Big|_{\omega=\omega_1}^{\omega=\omega_2} \\ \psi(t) &= \frac{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{\Delta\omega t} = \frac{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{(\omega_2 - \omega_1)t}. \end{aligned} \quad (88)$$

El numerador de la ecuación (88) es una superposición de un tipo que hemos encontrado antes, que da modulaciones a la frecuencia de modulación $\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$. El denominador contiene un factor t que hace que $\psi(t)$ sea máxime en $t = 0$.

Permítasenos escribir la Ec. (88) como un oscilador casi armónico con frecuencia promedio ω_0 y con una amplitud que varíe lentamente

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1), & \frac{1}{2}\Delta\omega &= \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1); \\ \omega_2 &= \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega, & \omega_1 &= \omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega.\end{aligned}\quad (89)$$

$$\psi(t) = \frac{\sin(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega)t - \sin(\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega)t}{\Delta\omega t} = \left[\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta\omega t}{\frac{1}{2}\Delta\omega t} \right] \cos \omega_0 t. \quad (90)$$

Así $\psi(t)$ es una oscilación rápida con una amplitud $A(t)$ lentamente variable:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= A(t) \cos \omega_0 t, \\ A(t) &= \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta\omega t}{\frac{1}{2}\Delta\omega t}.\end{aligned}\quad (91)$$

El resultado, ecuación (91), es idéntico al que obtuvimos en la Sección 6.3, donde estudiamos una superposición de N oscilaciones armónicas que tenían N frecuencias discretas diferentes distribuidas uniformemente entre ω_1 y ω_2 . Cuando tomamos el límite $N \rightarrow \infty$, obtenemos la ecuación (91). [Véase Ecs. (57) y (58), Sec. 6.3.] La pulsación $\psi(t)$ y sus coeficientes de Fourier $B(\omega)$ están dados gráficamente en la Fig. 6.6.

Aplicación: Pulso cuadrado en el tiempo

Suponga que $\psi(t)$ es cero para todo tiempo, excepto un intervalo de duración Δt centrado en t_0 y que se extiende entre t_1 y t_2 . En ese intervalo, $\psi(t)$ es constante; elegimos la constante de modo que la integral de $\psi(t)$ sobre el intervalo Δt sea uno:

$$\psi(t) = \frac{1}{\Delta t}, \quad t_1 \leq t \leq t_2 = t_1 + \Delta t. \quad (92)$$

Encontramos los coeficientes de Fourier $A(\omega)$ y $B(\omega)$.

Note que si t_0 es cero, entonces $\psi(t)$ es una función par de t , y entonces $A(\omega)$ debe ser cero (porque $\sin \omega t$ es una función impar). Para un t_0 arbitrario necesitamos tanto $A(\omega)$ como $B(\omega)$, o sea, tenemos la función impar $\sin \omega t$ y la función par $\cos \omega t$. Mediante un artificio podemos ahorrarnos la mitad del trabajo. Reemplacemos simplemente t por $t - t_0$ en nuestros resultados generales. Entonces, como $\psi(t)$ es una función par de $t - t_0$ tenemos

$$\psi(t) = \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega(t - t_0) d\omega, \quad (93)$$

con

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \psi(t) \cos \omega(t - t_0) dt. \quad (94)$$

Le permitiremos realizar una integración fácil para encontrar (Problema 6.20)

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta t \omega}{\frac{1}{2} \Delta t \omega}. \quad (95)$$

La pulsación cuadrada de la ecuación (92) y sus coeficientes de Fourier $B(\omega)$ están dados gráficamente en la Fig. 6.10. Note que si definimos $\Delta\omega$ como el intervalo desde la mínima frecuencia, que es cero, al primer cero del coeficiente de Fourier $B(\omega)$, entonces tenemos

$$\Delta\omega \Delta t = 2\pi, \quad \Delta\nu \Delta t = 1. \quad (96)$$

Uso del piano para el análisis de Fourier de un aplauso. Ésta es una explicación del espectro de Fourier representado en la Fig. 6.10. Suponga que desearía conocer la duración aproximada del sonido fuerte que escucha cuando golpea sus manos. Suponga que no tiene ni un micrófono, ni un audioamplificador ni un osciloscopio, pero que sí tiene un piano. Sujete el pedal de sordina de modo que todas las cuerdas puedan vibrar, mantenga sus manos cerca de la caja armónica y golpéelas. El piano realiza el análisis de Fourier del martilleo y mantiene el análisis en las cuerdas vibrantes. Si podemos estimar el mayor tono en el cual la intensidad del sonido de las cuerdas es más fuerte, entonces esa frecuencia debe ser aproximadamente $\nu \approx 1/\Delta t$. Este ejemplo físico nos da cierta idea adicional en cuanto al significado del análisis de Fourier, como sigue:

Para una cierta aproximación, todas las cuerdas son empujadas en la misma dirección por una onda de presión de aire, de duración Δt . Comienza a oscilar en su frecuencia natural en una oscilación principalmente transitoria. Aquellas cuerdas con frecuencia pequeña comparadas con $1/\Delta t$ no terminarán una fracción apreciable de un ciclo de oscilación natural antes de que la fuerza termine. Estas cuerdas son aceleradas durante el intervalo entero. La cuerda cuyo período es exactamente Δt es anulada por la onda de presión durante el primer medio ciclo de duración $1/2\Delta t$ y se frena en el siguiente medio ciclo. Frena tanto como aceleró y no vibra en absoluto después que cesa la fuerza. De este modo, las cuerdas con frecuencias naturales desde cero hasta un valor un poco menor que $1/\Delta t$ son excitadas con amplitud positiva. La cuerda con frecuencia $1/\Delta t$ tiene amplitud cero: esa frecuencia es también el primer cero del coeficiente de Fourier $B(\omega)$ dado por la ecuación (95). Las cuerdas con frecuencias entre $1/\Delta t$ y $2/\Delta t$ hacen entre uno y dos ciclos completos durante Δt . El primer ciclo se desperdicia, en el sentido en que no se recoge ningún impulso neto de la pulsación de presión. La cuerda con frecuencia $2/\Delta t$ va a través de dos ciclos completos y no recoge ningún impulso. Por lo tanto, $B(\omega)$ tiene

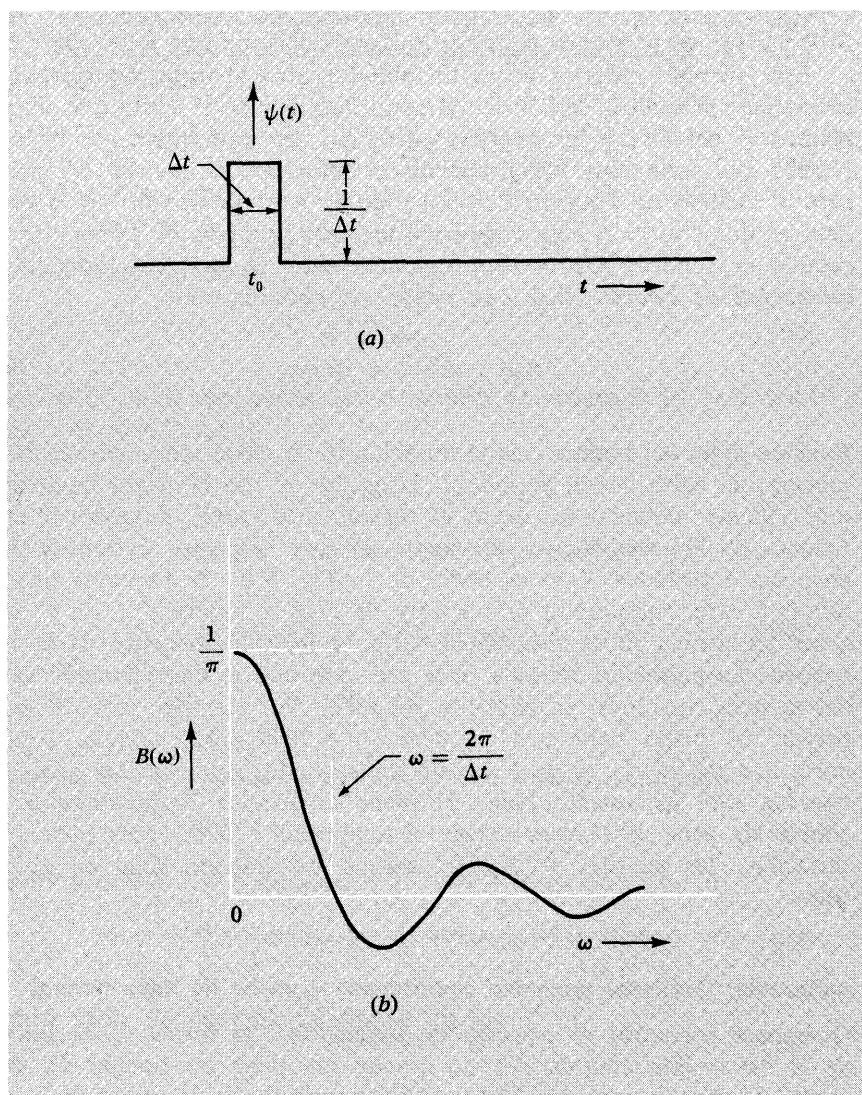


Fig. 6.10 Pulsación cuadrada $\psi(t)$ y su coeficiente de Fourier $B(\omega)$.

su segundo cero a la frecuencia $2/\Delta t$. La cuerda con frecuencia $1,5/\Delta t$ anda bastante bien; el primer ciclo se desperdicia pero la fuerza empuja en la misma dirección para la primera mitad del segundo ciclo. Entonces termina la fuerza. Estas cuerdas dan “1/3 valor” fuerza pulso, en el sentido que va a través de tres medios ciclos de su oscilación natural, dos de las cuales dan contribuciones que se cancelan. Por contraste, una cuerda con frecuencias $(1/2)(1/\Delta t)$ va a través de un medio ciclo durante Δt y tiene tres veces la amplitud de vibración final que la cuerda

que tiene $\nu = (3/2)(1/\Delta t)$. En realidad, deducimos de la ecuación (95) que $B(\omega)$ es tres veces mayor en magnitud para $\omega\Delta t = \pi$ que para $\omega\Delta t = 3\pi$.

Este ejemplo muestra cómo un piano y otro aparato similar puede usarse para el análisis de Fourier. (Hemos despreciado el hecho que el acoplamiento del aire a las cuerdas puede no ser uniformemente bueno.) Nótese que sería muy difícil extraer la información de fase del piano para el análisis de Fourier. Pero su oído no está interesado en la *fase*. Esto es una situación muy común: a menudo nosotros no estamos interesados en conocer $A(\omega)$ y $B(\omega)$ separadamente. Es suficiente conocer la *intensidad de Fourier*, $I(\omega)$, que puede ser definida como

$$I(\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega). \quad (97)$$

Función delta del tiempo. Si la duración de la pulsación cuadrada Δt es mucho más corta que el período de la oscilación con la mayor frecuencia que podemos detectar (es decir, el período más corto), entonces el coeficiente de Fourier $B(\omega)$ es constante sobre el espectro entero de frecuencias detectadas. Esto es obvio de la Fig. 6.10. Si hacemos que Δt tienda a cero, entonces el primer cero de $B(\omega)$ se mueve a $+\infty$, y cualquier frecuencia finita tiene $B(\omega) = 1/\pi$, independientemente de la frecuencia. La pulsación definida en la ecuación (92) se llama función delta del tiempo, cuando Δt es bastante pequeño. Por ejemplo, como la nota mayor del piano tiene una frecuencia $\nu \approx 5000$ cps, cualquier sonido corto que sea menor o igual que un milisegundo podrá excitar todas las cuerdas casi igualmente bien. El piano analizador no distinguirá tal sonido de otro diez veces mayor en amplitud y diez veces menor en duración; las cuerdas tendrán el mismo movimiento final en ambos casos.

Aplicación: Oscilador armónico amortiguado — ancho de línea natural

Queremos encontrar el espectro de frecuencia, “la forma de la línea”, de la luz visible emitida por un átomo que tiene un tiempo de vida medio de decaimiento $\tau = 10^{-8}$ seg. Si queremos sólo el ancho de banda podemos parar aquí: el ancho de banda $\Delta\nu$ debe ser de los 10^{-8} seg. Queremos, sin embargo, algo mejor que eso. Queremos encontrar la forma detallada del espectro, *suponiendo que el decaimiento tiene la dependencia temporal de un oscilador armónico amortiguado*. Por lo tanto suponemos que $\psi(t)$ es cero para todos los tiempos menores que $t = 0$, que a $t = 0$ llega repentinamente una excitación y que ésta describe luego la oscilación armónica amortiguada.

$$\psi(t) = e^{-(1/2)\Gamma t} \cos \omega_1 t. \quad (98)$$

(Tomamos la amplitud constante uno para evitar escribirla en lo que sigue.) La constante de amortiguación es la inversa del tiempo medio de vida de decaimiento

$$\Gamma = \frac{1}{\tau}. \quad (99)$$

La constante del resorte está relacionada a la masa M y a la frecuencia natural no amortiguada ω_0 por

$$K = M\omega_0^2. \quad (100)$$

La frecuencia de la oscilación casi armónica amortiguada ω_1 está relacionada con ω_0 y Γ por

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2. \quad (101)$$

Desarrollemos la ecuación (98) en una superposición continua de Fourier

$$\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t \, d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t \, d\omega. \quad (102)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 2\pi A(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^\infty \psi(t) \sin \omega t \, dt = \int_0^\infty e^{-(1/2)\Gamma t} 2 \cos \omega_1 t \sin \omega t \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(1/2)\Gamma t} [\sin(\omega + \omega_1)t + \sin(\omega - \omega_1)t] \, dt, \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} 2\pi B(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^\infty \psi(t) \cos \omega t \, dt = \int_0^\infty e^{-(1/2)\Gamma t} 2 \cos \omega_1 t \cos \omega t \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(1/2)\Gamma t} [\cos(\omega + \omega_1)t + \cos(\omega - \omega_1)t] \, dt. \end{aligned} \quad (104)$$

Cualquier tabla de integrales definidas da

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx &= \frac{b}{b^2 + a^2}, \\ \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx &= \frac{a}{b^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (105)$$

Entonces las ecuaciones (103) y (104) dan

$$2\pi A(\omega) = \frac{(\omega + \omega_1)}{(\omega + \omega_1)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2} + \frac{(\omega - \omega_1)}{(\omega - \omega_1)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2}, \quad (106)$$

$$2\pi B(\omega) = \frac{\frac{1}{2}\Gamma}{(\omega + \omega_1)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2} + \frac{\frac{1}{2}\Gamma}{(\omega - \omega_1)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2}. \quad (107)$$

Podemos hacer uso de la ecuación (101) para eliminar ω_1^2 en favor de ω_0^2 . Después de un poco de álgebra obtenemos

$$2\pi A(\omega) = \frac{2\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + \omega\Gamma^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}, \quad (108)$$

$$2\pi B(\omega) = \frac{\Gamma(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}, \quad (109)$$

$$I(\omega) \equiv [2\pi A(\omega)]^2 + [2\pi B(\omega)]^2 = \frac{4\omega^2 + \Gamma^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}. \quad (110)$$

Comparación del decaimiento libre con la oscilación forzada. Es interesante comparar estas componentes de Fourier del oscilador armónico con decaimiento libremente amortiguado, con las amplitudes e intensidades obtenidas cuando el mismo sistema es sometido a un estado estacionario de oscilaciones forzadas a la frecuencia ω . Recopilamos aquí los resultados de las ecuaciones (3.17) y (3.32) hasta (3.35) de la Sección 3.2

$$A_{el}(\omega) = \frac{F_0}{M} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}, \quad (111)$$

$$A_{ab}(\omega) = \frac{F_0}{M} \frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}, \quad (112)$$

$$|A|^2 \equiv [A_{el}(\omega)]^2 + [A_{ab}(\omega)]^2 = \frac{F_0^2}{M^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}, \quad (113)$$

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{M} \frac{\Gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}, \quad (114)$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{M} \frac{\frac{1}{2}(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}. \quad (115)$$

Vemos que la amplitud de Fourier $B(\omega)$ para decaimiento libre es proporcional a la energía almacenada $E(\omega)$ para oscilaciones forzadas. Vemos que $A(\omega)$ para decaimiento libre tiene una contribución proporcional a $\omega A_{el}(\omega)$ para oscilaciones forzadas, y otra contribución proporcional a $A_{ab}(\omega)$. Para una amortiguación razonablemente débil la contribución proporcional a A_{ab} es despreciable excepto cuando ω está muy cerca de la frecuencia de resonancia ω_0 ; por lo tanto, $A(\omega)$ es esencialmente proporcional a $\omega A_{el}(\omega)$. La intensidad de Fourier $I(\omega)$ tiene una contribución proporcional a la potencia de absorción $P(\omega)$ para oscilaciones forzadas y otra contribución que es despreciable para una amortiguación razonablemente débil, es decir, para $\Gamma^2 \ll \omega^2$. De este modo,

$I(\omega)$ por libre decaimiento es esencialmente proporcional a la potencia $P(\omega)$ para oscilaciones forzadas.

Formas de la línea de Lorentz — relación con la curva de resonancia. Para amortiguación débil y para ω no muy lejos de ω_0 , la amplitud de Fourier $B(\omega)$ y la intensidad de Fourier $I(\omega)$ son ambas proporcionales a la “curva de forma de la línea de Lorentz”, $L(\omega)$ dada por

$$L(\omega) = \frac{(\frac{1}{2}\Gamma)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2}. \quad (116)$$

La constante de amortiguación Γ , que es igual al ancho de frecuencia plena en la mitad del máximo de la forma curva — línea de Lorentz, se llama *ancho de línea* $\Delta\omega$ del espectro de frecuencia de la superposición de Fourier que describe el decaimiento libre:

$$(\Delta\omega)_{a.l.} = \Gamma. \quad (117)$$

La forma de la línea de Lorentz, ecuación (116), tiene exactamente la misma forma que la curva de Breit-Wigner de respuesta de resonancia $R(\omega)$ que da (para amortiguación débil) la dependencia respecto a la frecuencia de $A_{ab}(\omega)$, $|A|^2$, $E(\omega)$ y $P(\omega)$ para oscilaciones forzadas [ecuación (3.36), Sec. 3.2]:

$$R(\omega) = \frac{(\frac{1}{2}\Gamma)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2}. \quad (118)$$

El ancho a la mitad del máximo para resonancia completa está dado por

$$(\Delta\omega)_{res} = \Gamma. \quad (119)$$

Así obtenemos el resultado notable de que para un oscilador armónico débilmente amortiguado *el espectro de Fourier para el decaimiento libre tiene la misma dependencia de frecuencia que la respuesta de resonancia para osciladores forzados*. Podemos resumir escribiendo las igualdades

$$\boxed{(\Delta\omega)_{a.l.} = (\Delta\omega)_{res} = \frac{1}{\tau_{a.l.}}} \quad (120)$$

Mediciones de frecuencia natural y del ancho de frecuencia. La notable relación entre las componentes de Fourier para decaimiento libre y la respuesta de resonancia para oscilaciones forzadas en estado estacionario tiene importantes consecuencias experimentales. Supongamos que

queremos estudiar (a) el tono más bajo de una cuerda de piano, y (b) el primer estado excitado de un átomo. Aquí hay tres métodos que podemos usar:

1. *Dependencia temporal de la oscilación libre.* Excite el sistema repentinamente en $t = 0$, usando ya sea un martillo o una colisión con el otro átomo. Luego tome fotografías con alta velocidad del movimiento del oscilador de decaimiento amortiguado y haga una gráfica del desplazamiento en función de el tiempo. Esto puede hacerse para la cuerda del piano, pero no puede hacerse para el átomo, ni aun en principio, como verá en el Vol. IV (*Física Cuántica*).

2. *Respuesta resonante a una oscilación forzada.* Impulse el sistema a un estado estacionario con una fuerza armónica $F_0 \cos \omega t$. Varíe la frecuencia impulsora. Mida la potencia absorbida $P(\omega)$ como función de la frecuencia. Esto puede hacerse con la cuerda del piano. También puede hacerse con algunos estados excitados de los átomos impulsados por la radiación electromagnética del estado estacionario y observando la potencia absorbida P como función de ω para obtener ω_0 y Γ .

3. *Análisis de Fourier del espectro de emisión.* Excite el sistema bruscamente. Analice según Fourier la radiación que él emite. Esto puede hacerse con la cuerda de piano. También puede hacerse con algún estado excitado observando el espectro de frecuencia de la luz emitida. Lo más fácil para medir es la intensidad de emitido como función de frecuencia. Ello es proporcional a su vez a la intensidad Fourier $I(\omega)$. La determinación de $I(\omega)$ da el modo de frecuencia ω_0 y el ancho Γ .

En la Fig. 6.11 se representa una oscilación armónica amortiguada y los coeficientes de Fourier $A(\omega)$ y $B(\omega)$. Para obtener como igualdad exacta la relación $\Delta\omega\Delta t = 2\pi$ para el producto ancho de banda-intervalo de tiempo, podemos definir el tiempo de duración Δt como 2π veces al tiempo de decaimiento τ . Entonces la ecuación (120) da $\Delta\omega\Delta t = 2\pi$.

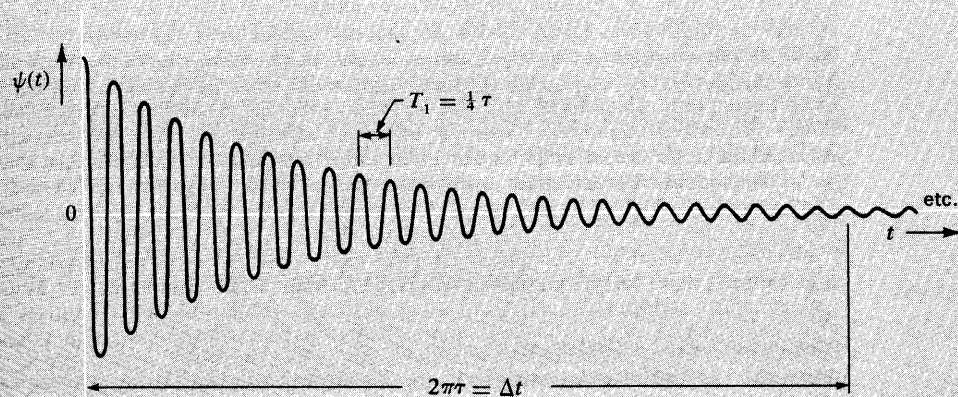
6.5 *Análisis de Fourier de un paquete de ondas de propagación*

Suponga un trasmisor en $z = 0$ que impulse un sistema abierto unidimensional continuo y homogéneo en tal forma que la función de onda $\psi(z, t)$ de las ondas de propagación tiene una dependencia con el tiempo en $z = 0$ dada por una función conocida del tiempo $f(t)$

$$\psi(0, t) = f(t). \quad (121)$$

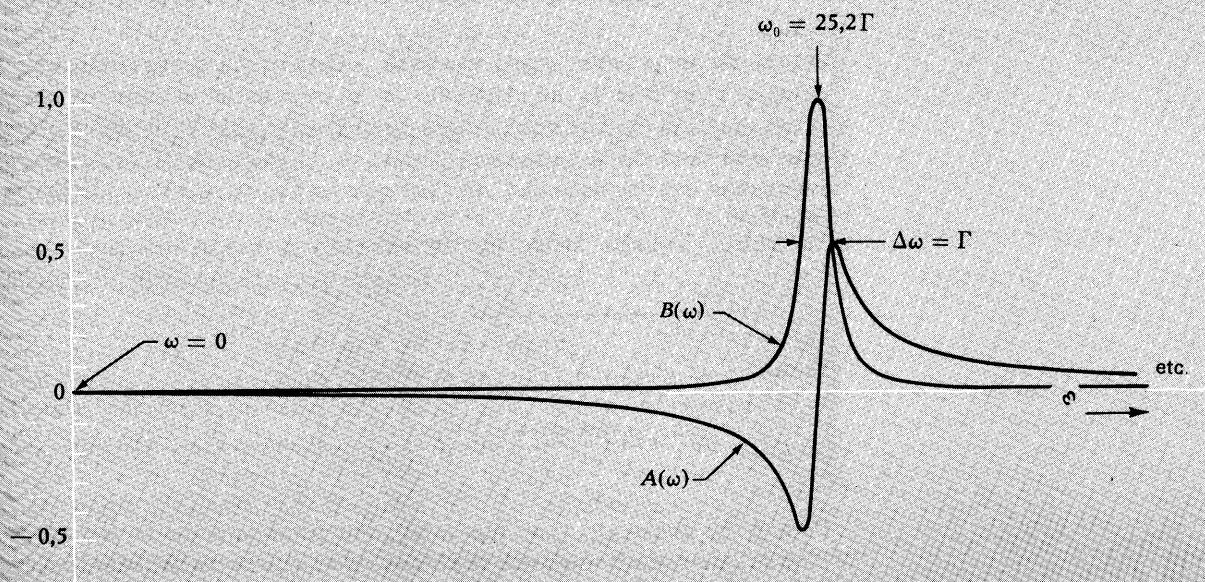
Cualquier función razonable $f(t)$ puede desarrollarse en una superposición de oscilaciones armónicas. Si $f(t)$ no es una función periódica del tiempo, la superposición es continua (en frecuencia) y está dada por la integral de Fourier

$$f(t) = \int_0^\infty [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t] d\omega. \quad (122)$$



(a)

Fig. 6.11 Oscilador armónico débilmente amortiguado. (a) Pulso. $\psi(t) = e^{-(1/2)t/\tau} \cos \omega_1 t$, con la elección $\omega_1 = 8\pi\Gamma$, que es $\tau = 4T_1$. (b) coeficientes de Fourier en la superposición continua de términos armónicos $\int_0^\infty [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t] d\omega$.



(b)

Ondas de propagación en un medio dispersivo homogéneo. Cada componente armónico de la superposición de la ecuación (122) da lugar a su propia onda armónica de propagación, con su número de onda angular k dado por la relación de dispersión

$$k = k(\omega). \quad (123)$$

Cada componente de frecuencia de la onda armónica de propagación viaja con su propia velocidad de fase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k(\omega)}. \quad (124)$$

La onda total de propagación $\psi(z,t)$ es justamente la superposición de todas estas ondas armónicas de propagación. Esto implica que obtenemos $\psi(z,t)$ de $\psi(0,t)$ reemplazando ωt por $\omega t - kz = \omega t - k(\omega)z$ en cada uno de los términos armónicos en la superposición dada por la ecuación (122).

$$\psi(0,t) = \int_{\omega=0}^{\infty} [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t] d\omega, \quad (125)$$

$$\psi(z,t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \{A(\omega) \sin[\omega t - k(\omega)z] + B(\omega) \cos[\omega t - k(\omega)z]\} d\omega. \quad (126)$$

Para el caso general de ondas dispersivas, la velocidad de fase v_φ depende de la frecuencia ω . Por lo tanto, la forma de $\psi(z,t)$ para más fijo t no permanece constante con el tiempo.

Ondas no dispersivas (caso especial). Para el caso especial en que la velocidad de fase v_φ no depende de la frecuencia, la función de onda $\psi(z,t)$ tiene la misma forma para todo tiempo fijo t . Podemos deducir este resultado de la expresión general de la ecuación (126) como sigue: Llamemos v a la velocidad de fase que es común a todas las ondas armónicas

$$v = \frac{\omega}{k(\omega)}; \quad \text{o sea} \quad k(\omega) = \frac{\omega}{v}. \quad (127)$$

Entonces la ecuación (126) se convierte en

$$\psi(z,t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin \omega(t - \frac{z}{v}) + B(\omega) \cos \omega(t - \frac{z}{v})] d\omega. \quad (128)$$

Pero v es constante (por hipótesis), independiente de la frecuencia ω . Vemos que cada uno de los términos de la superposición de la ecuación (129) se obtiene de la superposición de la (125) que representa $\psi(0,t)$,

simplemente reemplazando t en $\psi(0,t)$ por $t - (z/v)$. Así obtenemos, para ondas no dispersivas,

$$\psi(z,t) = \psi(0,t'), \quad t' \equiv t - \frac{z}{v}. \quad (129)$$

Nótese que para ondas dispersivas nunca hemos necesitado escribir una superposición de Fourier salvo que lo deseáramos. Una vez que nos han dado $\psi(0,t)$, podemos obtener $\psi(z,t)$ en forma inmediata de la ecuación (129) sin necesidad de los pasos intermedios del análisis de Fourier. La ecuación (129) dice que una onda de propagación en un medio no dispersivo se propaga sin cambiar su forma. Esto es, el desplazamiento (o el campo eléctrico, o cualquier cosa que sea) en el punto z , corriente abajo, tiene el mismo valor al tiempo t que el desplazamiento en $z = 0$ en un tiempo anterior $t - (z/v)$.

Aquí hay un ejemplo de una onda no dispersiva en la cual no hacemos uso ni del análisis Fourier ni de funciones armónicas. Supongamos que tenemos ondas no dispersivas (por ejemplo, ondas de sonido audibles o luz en el vacío). Supongamos que en $z = 0$ el desplazamiento satisface

$$\psi(0,t) = Ae^{-(1/2)t^2/\tau^2}. \quad (130)$$

La ecuación (130) es una *pulsación de forma gaussiana*. Es máximo en $t=0$ y se hace muy pequeño para los tiempos muy anteriores o posteriores a $t = 0$ (en unidades de τ). Podemos analizar según Fourier la ecuación (130) pero no necesitamos hacerlo, ya que, por hipótesis, el medio es no dispersivo. Podemos escribir inmediatamente la forma de la onda de propagación:

$$\begin{aligned} \psi(z,t) &= \psi(0,t') = Ae^{-(1/2)(t')^2/\tau^2} \\ &= Ae^{-(1/2\tau^2)[t-(z/v)]^2}. \end{aligned} \quad (131)$$

Ondas no dispersivas y la ecuación de las ondas clásicas. Cada onda armónica de propagación de la forma:

$$\psi(z,t) = A \cos [\omega t - k(\omega)z] \quad (132)$$

satisface (como puede verse fácilmente) la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} = v_\varphi^2(\omega) \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2}. \quad (133)$$

Para el caso especial en que las ondas son no dispersivas, tenemos $v_\varphi = v$, una velocidad constante independiente de ω . En ese caso, todos

los términos en una superposición de ondas armónicas de propagación [como en la ec. (128)] satisfacen la misma ecuación diferencial, a saber,

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2}}, \quad (134)$$

donde se supone que $\psi(z,t)$ representa cualquiera de las ondas armónicas de propagación en la superposición. Pero como cada término satisface la ecuación (134) lo mismo ocurre con la superposición, es decir, que la función de onda total $\psi(z,t)$ satisface la ecuación (134). Esta ecuación en derivadas parciales es llamada la *ecuación de las ondas clásica para ondas no dispersivas*, o simplemente la ecuación de ondas clásica.

Las ondas que mantienen su forma satisfacen la ecuación de ondas clásicas. Nosotros hicimos uso de las ondas armónicas de propagación de la ecuación (132) para obtener la (134). Esto no era necesario. Cualquier onda de propagación que mantenga su forma cuando se propaga debe satisfacer la ecuación (134). Suponga que nos han dado $\psi(0,t)=f(t)$ y nos han dicho que la onda se propaga sin cambiar la forma, es decir,

$$\psi(z,t) = f(t'), \quad t' \equiv t - \frac{z}{v}. \quad (135)$$

Puede ver fácilmente que $\psi(z,t)$ tal como está dada la ecuación (135), satisface la ecuación de ondas clásica (Prob. 6.26). En forma similar, cualquier onda de propagación no dispersiva que se propague en la dirección $-z$ también satisface la ecuación de ondas clásicas, como se puede ver reemplazando v por $-v$ en su deducción. También, cualquier superposición de ondas de propagación no dispersivas propagándose en ambas direcciones satisface la ecuación de ondas clásicas, ya que todos los términos en la superposición la satisfacen.

Una onda armónica estacionaria de la forma

$$\psi(z,t) = A \cos k(z - z_0) \cos \omega(t - t_0)$$

satisface la ecuación (133) como puede verse fácilmente. Si el medio es no dispersivo, entonces todas las ondas armónicas estacionarias satisfacen la ecuación de ondas clásicas (134). Esto resultó de la ecuación (135) con $v_\varphi = v$ para todas las frecuencias. (Para una onda estacionaria, v_φ significa ω/k , aunque el concepto de velocidad de fase no es usado naturalmente para describir ondas estacionarias.) Esto también resulta del hecho de que una onda estacionaria puede ser considerada como una superposición de ondas de propagación que viajan en direcciones

opuestas. En realidad, nuestro primer encuentro con la ecuación de ondas clásica fue al estudiar ondas estacionarias en una cuerda continua en la Sección 2.2.

Problemas y experimentos caseros

6.1 Demuestre que la suma de dos ondas armónicas propagándose $A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$ y $A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$ que se propagan en la dirección $+z$ y que tienen la misma frecuencia ω , es en sí misma una onda armónica de propagación del mismo tipo. Esto es, la suma puede escribirse en la forma $A \cos(\omega t - kz + \varphi)$. Encuentre cómo están relacionados A y φ con A_1 , A_2 , φ_1 y φ_2 . (Sugerencia: El uso de números complejos o el diagrama del vector rotante lo ayudará enormemente.)

6.2 Considere la radiación electromagnética en un medio con constante dieléctrica $\epsilon(\omega)$. Suponga que la permeabilidad magnética μ es 1. Entonces $n(\omega) = [\epsilon(\omega)]^{1/2}$. De acuerdo con la teoría de la relatividad, ninguna señal puede propagarse más rápido que $c = 3.0 \times 10^{10}$ cm/seg. ¿Qué limitación pone esto a la posible variación de $\epsilon(\omega)$ con ω ? [Suponga que $\epsilon(\omega)$ es positiva para toda ω .]

$$\text{Resp. } \omega(dn/d\omega) + (n - 1) \geq 0.$$

Experimento casero

6.3 Mida el ancho de banda aproximado de la radiación que se recibe en su radio AM moviendo el dial de sintonía y viendo cuáles son los extremos para recibir una estación dada. (La mayor lectura en el dial de AM es generalmente 130. Esto significa 1300 kc.) ¿Cómo se compara su resultado con el de que se necesita $\Delta\nu \approx 40$ kc para cubrir ambas bandas laterales para reproducir sonidos con muy alta fidelidad?

6.4 Las tubas pueden tocar muy bajo, por ejemplo, en C_1 a 32,7 cps (al do más bajo del piano, se le llama C_1). Las flautas pueden tocar muy alto, su nota más alta, normalmente, es C_7 a 2093 cps (una octava por bajo de la nota más alta en el piano). Cada nota en la escala equitemplada difiere de su vecina en un factor de alrededor de 1,06. Las flautas pueden tocar muy rápido, las tubas, no. ¿Es culpa del ejecutante de tuba? ¿O de la tuba? ¿Puede ser rediseñada la tuba de forma que sus ejecutantes puedan tocar tan rápido como los flautistas? ¿Qué velocidad podría calcularse como tope razonable para los tubistas que ejecuten escalas cerca de C_{32} ? ¿Y que los flautistas toquen cerca de C_{2093} ? Primero debe decidir con un razonable criterio musical, después hacer física.

Resp. 2 notas/seg tuba; 120 por seg para la flauta (¡cuánto!)

6.5 Un hombre llevó su radio AM a una casa de reparación y se lamentó de que la sintonía no fuera suficientemente fina. Quería que una estación dada estuviera exactamente definida en el dial. De modo que se la fijaron de acuerdo a sus deseos. Pero volvió nuevamente a la casa. ¿De qué se quejaba esta vez?

6.6 (a) Una forma de medir la velocidad del sonido en el aire es golpear las manos y terminar el tiempo que transcurre entre el aplauso y el eco de un reflector conocido. Otra forma es medir la longitud de un tubo de correspondencia que resuena a una frecuencia conocida (y corregir por efectos de extremos). Estos métodos, ¿determinan la velocidad de fase?, ¿y la velocidad de grupo?

(b) Una forma de medir la velocidad de la luz es enviar un haz de luz colineado a través del aire desde Monte Wilson a Monte Palomar, reflejado en un espejo, y medir el tiempo de recorrido. Otra forma es encontrar la longitud de una cavidad resonante que oscila en un modo conocido a una frecuencia

conocida. Estos métodos, ¿determinan la velocidad de fase?, ¿y la velocidad de grupo?

6.7 Mostrar que para la luz de índice $n(\lambda)$,

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_\varphi} - \frac{1}{c} \lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda},$$

donde λ es la longitud de onda de la luz en el vacío.

6.8 La velocidad de la luz en el vacío está citada en tablas como $c = 2,997925 \times 10^{10}$ cm/seg. Esto es perfectamente bien conocido. Suponga que mide la velocidad de la luz reflejando un haz de luz colineado entre Monte Wilson y Monte Palomar y toma el tiempo del recorrido. Suponga que en principio desprecia tener en cuenta el hecho de que la trayectoria es en el aire y no en el vacío. Estime la corrección que debe ser sumada o restada a su valor medido para obtener la velocidad en el vacío, suponiendo que la luz se propaga a la velocidad de fase en el aire. Repita la estimación de la corrección suponiendo que la luz se propaga en el aire a la velocidad de grupo. (Para el índice de refracción del aire, use $n = 1 + 0,3 \times 10^{-3}$.) Para poder estimar la corrección usando la velocidad de grupo, use el resultado del Problema 6.7. Suponga, además, que una molécula de aire es indistinguible de una molécula de gas. Por lo tanto, si hubiera tantas moléculas de aire por unidad de volumen en el aire a PTN como moléculas de vidrio en el vidrio, se podría obtener $dn/d\lambda$ directamente de la Tabla 4.2, Sección 4.3. Pero no las hay. Para el aire, $N \approx 2,7 \times 10^{19}$ moléculas/cm³. Para el vidrio, $N \approx 2,6 \times 10^{22}$ moléculas/cm³. Encuentre $dn/d\lambda$ para el aire (para luz visible promedio) usando la Tabla 4.2 y una adecuada corrección para la densidad en número. Finalmente, ¿interesa qué corrección se usa (suponiendo que se pretende el tipo de aproximación señalada arriba)? ¿Qué corrección se *debe* usar?

6.9 Muestre que para un oscilador armónico amortiguado, el tiempo medio de decaimiento τ está dado por

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{E_{\text{acumulada}}} \frac{dE_{\text{perdida}}}{dt}.$$

6.10 Suponga que golpea ligeramente un tubo de encomiendas contra su cabeza. Escuchará el tono del modo más bajo por un corto tiempo. Considere que la oscilación es un movimiento armónico amortiguado. De modo que hay cierto tiempo de decaimiento τ . Ahora suponga que duplica la longitud del tubo; la frecuencia del modo más bajo es reducida a la mitad. Pero suponga que de alguna manera se excita el tubo de modo que este vibre a la frecuencia original (que es ahora el segundo modo del tubo más largo). La excitación es repentina, y el aire entonces oscila libremente y es sometido a oscilaciones amortiguadas.

(a) Considere que toda la energía perdida es debida a radiación que sale de los extremos del tubo. Compare el nuevo tiempo de decaimiento con el anterior.

(b) Considere que el diámetro del tubo es tan pequeño que la energía perdida en los extremos es despreciable comparada con la pérdida por fricción a lo largo de las paredes del tubo y por radiación hacia fuera de sus lados. Compare nuevamente los tiempos de decaimiento nuevo y viejo.

(c) Suponga que mide los anchos de resonancia total de los tubos nuevos y viejos impulsando a cada uno de ellos con el mismo diapasón (oscilando en el modo más bajo de frecuencia del tubo corto original) y variando la longitud del tubo con un “trombón” de papel. Compare la “longitud de ancho completo” ΔL para los casos mencionados arriba. Sea cuidadoso; relacione ΔL con el ancho de frecuencia total. Haga uso de los resultados del Problema 6.9.

6.11 Paquetes de ondas en agua. La mejor manera de atender la diferencia entre velocidades de fase y de grupo es provocar paquetes de ondas en el agua. Para obtener paquetes de ondas de expansión circular que tengan longitud de onda dominante de 3 ó 4 cm o mayores, arroje una piedra grande en un lago o piscina. Para obtener ondas rectas (el análogo bidimensional a las ondas planas en tres dimensiones) con longitudes de onda de varios centímetros, haga flotar un palo cruzado en el extremo de una bañera o una gran cubeta de agua. Dé al palo unos dos empujones rápidos con la mano. Después de alguna práctica verá que para estos paquetes la velocidad de fase es mayor que la velocidad de grupo. (Vea Tabla 6.1, Sec. 6.2.) Verá crecer pequeñas olitas desde cero en el extremo posterior del paquete, propagarse a través del paquete y desaparecer por el frente. (Esto requiere práctica; las ondas se propagan bastante rápidamente.) Otro método bueno es poner una tabla en el extremo de una bañera y golpearla ligeramente.

Para obtener ondas de longitud de onda del milímetro (ondas de tensión superficial), use un cuentagotas lleno de agua. Haga salir una gota y déjela caer en su recipiente o bañera de agua. Primero deje que la gota caiga desde una altura de sólo unos pocos milímetros. Esto da longitudes de ondas dominantes de sólo unos pocos milímetros. Para ver que estas ondas realmente se deben a tensión superficial, agregue algo de jabón al agua y repita el experimento. Notará una disminución en la velocidad de grupo cuando agrega el jabón. (Para ver que las ondas de longitudes de onda mayores *no* se deben a tensión superficial, puede repetir el experimento en largas longitudes de onda.) Para alargar la longitud de onda dominante del grupo, deje que la gota de agua caiga desde mayor altura.

Aquí hay una manera de ver (sin hacer una dedicación difícil) que las ondas milimétricas tienen una velocidad de grupo más rápida que las ondas del orden del centímetro. Genere un paquete que tenga ondas tanto milimétricas como centimétricas dejando caer una gota de agua desde una altura aproximada de un pie dentro de un recipiente circular lleno hasta el borde (una taza de café puede servir muy bien). Arroje la gota cerca del centro del recipiente circular. Note que después de la reflexión desde el borde, el grupo va a un foco en un punto que es conjugado del punto donde golpeó la gota. (Por dos puntos conjugados entendemos puntos ubicados en una línea que pasa a través del centro del círculo y que distan iguales distancias del centro.) Cuando el paquete está pasando a través del foco conjugado, hay allí una onda estacionaria transitoria (similar a la onda estacionaria transitoria que se obtiene cuando se sacude un paquete de ondas sobre un “slinky” amarrado a una pared). Esto permite juzgar el tiempo promedio de llegada del paquete. Observe si hay diferencias en los tiempos de llegada para las contribuciones de corta longitud de onda del paquete comparadas con las contribuciones de larga longitud de onda. Esto es difícil de medir, pero puede verse el efecto bastante fácilmente.

Un experimento que aún no he comprobado es el de encontrar una suave corriente con velocidad de flujo aproximadamente igual a la velocidad de grupo para longitudes de onda razonables. Se está en condiciones de obtener paquetes de onda que se propaguen corriente arriba aproximadamente a la velocidad de flujo, de modo que el paquete permanezca casi en reposo en su sistema de referencia (suponiendo que se permanece fijo y no flotando con la corriente). Seguramente será una forma muy placentera de estudiar paquetes de ondas.

Experimento casero

Experimento casero

6.12 Paquetes de ondas superficiales de agua - ondas de marea. En el Problema 2.31 se obtuvo la ley de dispersión para ondas de agua estacionarias-diente de sierra, llegando el resultado de que $v_\phi \approx 1,1 \sqrt{gh}$. Para ondas de agua sinusoidales superficiales el resultado resultaba ser $v_\phi = \sqrt{gh}$. Así, las ondas de agua superficiales son no dispersivas. (La velocidad de fase no depende de la longitud de onda.) En vez de ondas estacionarias consideraremos ahora paquetes de ondas de propagación en aguas superficiales. Como las ondas son no dispersivas, una única "onda solitaria" u "onda tidal" se propagará sin cambiar su forma (aproximadamente). Tales ondas, llamadas *tsunami*, pueden ser excitadas por temblores de tierra submarinos en el océano. La profundidad promedio del agua en el océano profundo es aproximadamente 5 kilómetros: $h = 5 \times 10^5$ cm. Las ondas tidales de longitud horizontal mucho mayor que 5 km son, por lo tanto, ondas de "aguas superficiales". Las ondas tsunami se propagan en el océano profundo a la velocidad

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{(980)5 \times 10^5} = 2,2 \times 10^4 = 220 \text{ metros/seg.} \\ = 495 \text{ millas/hora,}$$

que es un poco menor que la de un típico avión jet. ¿Cuánto tiempo tarda una onda tidal en propagarse desde Alaska a Hawaii?

Nota: Será conveniente aclarar que el nombre de ondas tidales, tal como se usa en oceanografía, indica que se trata de grandes ondas oceánicas, como las causadas por terremotos subterráneos u ondas de marea causadas por la atracción de la luna.

En 1883 el volcán Krakatoa entró en erupción creando la mayor explosión mundial. (El Krakatoa está situado en el estrecho de la Sonda, entre Sumatra y Java.) En cualquier enciclopedia puede encontrarse un relato de las explosiones. Se produjeron enormes ondas tidales y ondas atmosféricas. Recientemente ha sido descubierto que hay ondas de propagación en el aire con velocidades de alrededor de los 220 m/seg. (Recalcamos que la velocidad común del sonido a 0°C es 332 m/seg. En promedio el aire es más frío, de modo que la velocidad es menor que aquélla.) La existencia de esas ondas de aire explica probablemente cómo las ondas de agua tidales del Krakatoa aparecían en los lados más lejanos de masas de tierras que habían bloqueado las ondas de agua. Aparentemente, las ondas tidales "saltaron" las masas de tierra acoplándose a las ondas del aire que tenían la misma velocidad (y el mismo tiempo de excitación). Ver el artículo de F. Press y D. Harkrider, "Air-Sea Waves from the Explosion of Krakatoa" *Science* **154**, 1325 (9 dic. 1966).

En el experimento, fabrique sus propias ondas tidales en aguas superficiales de la siguiente manera: Tome un recipiente cuadrado de un pie o dos de largo. Llénelo de agua hasta una profundidad de alrededor de 1/2 ó 1 cm. Dé al recipiente una sacudida rápida (o levante un extremo y déjelo caer repentinamente). De este modo creará sólo dos paquetes de ondas de propagación, uno en el extremo cercano y otro en el lejano, viajando en direcciones opuestas. Siga al mayor de los paquetes. Mida la velocidad llevando cuenta del tiempo de la onda durante todas las longitudes de recipiente que pueda (probablemente alrededor de cuatro). Un reloj segundero le ayudará. Alternativamente puede contar en voz baja mientras el paquete golpea las paredes, memorizando el "tiempo musical" y finalmente medir el tiempo con un reloj común. ¿Concordarán bien sus resultados con $v = \sqrt{gh}$? Como la profundidad del agua aumenta, finalmente llegará un momento en que las ondas no son más que ondas de aguas superficiales. Entonces la relación de dispersión pasará gradualmente a la relación de dispersión para ondas gravitatorias de aguas profundas $\omega^2 = gk$, es decir,

$$v_\phi = \lambda v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

(Derivaremos esta relación en el Cap. 7.) Así el paquete de ondas se extenderá y no mantendrá su forma. Para aguas de una profundidad lo bastante reducida (menos que 1 cm., aproximadamente), la forma se mantiene perfectamente bien en varios pies.

Finalmente, obtenga una onda tidal de propagación en su bañera empujando todo el extremo del agua con una tabla. Mida el tiempo de subir y bajar y, de este modo, la velocidad. ¿Es \sqrt{gh} ? ¡Note las rompientes!

6.13 Trinos musicales y ancho de banda. Estos experimentos requieren un piano. Trine dos notas adyacentes (distanciadas en un semitono). Primero, toque dos notas cercanas al comienzo del teclado. Trine lentamente, luego tan rápido como pueda, estime la frecuencia del trino. ¿Puede distinguir fácilmente las dos notas del trino? Trine ahora dos notas adyacentes al final del teclado, primero muy lentamente y luego aumente cada vez más la velocidad. ¿Hay una velocidad a la cual las dos notas se combinan formando una mezcla desordenada e indistinguible? Estime la frecuencia cuando las cosas se vuelven desordenadas. Luego analice matemáticamente y decida hasta qué punto su oído y su cerebro son apropiados para reconocer dos máximos separados en el análisis de Fourier, aun cuando los anchos de frecuencia de los picos (a intensidad semi-máxima) no sean pequeños comparados con el espaciamiento de frecuencia entre los máximos.

6.14 Velocidad de grupo en el corte. Muestre que para un sistema de péndulos acoplados, la velocidad de grupo es nula en las frecuencias de corte superior (frecuencia máxima y mínima para ondas sinusoidales). ¿Cuál es la velocidad de fase a estas dos frecuencias? Haga un diagrama de la relación de dispersión, es decir, una gráfica de ω en función de k . Muestre cómo pueden leerse de un vistazo las velocidades de grupo y de fase a partir de ese diagrama.

6.15 Análisis de Fourier de una función exponencial. Considere una función $f(t)$ nula para t negativo e igual a $\exp(-t/2\tau)$ para $t \geq 0$. Encuentre sus coeficientes de Fourier $A(\omega)$ y $B(\omega)$ en la superposición continua

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t] d\omega.$$

6.16 Onda seno truncada con una oscilación. Suponga que $t(f)$ es nula excepto en el intervalo de $t = t_1$ a $t = t_2$ de duración $\Delta t = t_2 - t_1$, y está centrada en $t_0 = (1/2)(t_1 + t_2)$. Suponga que en este intervalo, $f(t)$, realiza exactamente una oscilación sinusoidal a frecuencia angular ω_0 , comenzando y terminando con valor cero en t_1 y t_2 (o sea, $\Delta t = T_0 = 2\pi/\omega_0$). Encuentre los coeficientes de Fourier $A(\omega)$ y $B(\omega)$ en la superposición continua

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin \omega(t - t_0) + B(\omega) \cos \omega(t - t_0)] d\omega.$$

Haga un gráfico aproximado de los coeficientes de Fourier, en función de ω y un diagrama de $f(t)$.

6.17 Cuerdas con cuentas. Deduzca una expresión para la velocidad de grupo de ondas de propagación en una cuerda con cuentas. Ponga en forma gráfica (aproximadamente) la relación de dispersión para la cuerda con cuentas, desde $k = 0$ hasta el valor máximo. Ponga en forma gráfica (aproximadamente) la velocidad de grupo en función de k y la velocidad de fase en función de k desde $k = 0$ hasta k_{\max} .

Experimento casero

6.18 Velocidad de fase y de grupo para luz en vidrio. Suponga que la ley de dispersión está dada por una sola resonancia y despreciemos el amortiguamiento, es decir, supongamos:

$$c^2k^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m},$$

donde N es el número de electrones resonantes por unidad de volumen.

(a) Haga un diagrama del cuadrado del índice de refracción, n^2 , dos veces en función de ω , para $0 \leq \omega < \infty$. Las características importantes són el valor y la pendiente en $\omega = 0$, en ω algo menor que ω_0 y algo mayor que ω_0 , en $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ y en el infinito. ¿Cómo interpreta la región donde n^2 es negativo? ¿Y la región cercana a ω_0 ?

(b) Deduzca la siguiente fórmula para el cuadrado de la velocidad de grupo:

$$\left(\frac{v_g}{c} \right)^2 = \frac{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}{\left[1 + \frac{\omega_p^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right]^2}$$

Dibuje $(v_g/c)^2$ dos veces en función de ω . Muestre que $(v_g/c)^2$ es siempre menos que la unidad, como lo requiere la teoría de la relatividad. Muestre que v_g^2 es negativa en la misma región de frecuencias en la cual n^2 es negativo. ¿Para qué frecuencia es mayor la velocidad de grupo? ¿Cuál es la velocidad de grupo a esa frecuencia?

6.19 Velocidad de fase y de grupo para ondas de aguas profundas. La ley de dispersión es

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho},$$

donde $g = 980$, $T = 72$ y $\rho = 1,0$ (todo en unidades cgs). Deduzca las fórmulas para las velocidades de grupo y de fase. Muestre que la velocidad de grupo es igual a la de fase cuando gk y Tk^3/ρ son iguales, y que esto ocurre para longitud de onda 1,7 cm y velocidad 23,1 cm/seg. Muestre que para *ondas de tensión superficial*, o sea, con longitud de onda muy corta en comparación con 1,7 cm, la velocidad de grupo es 1,5 veces la de fase. Muestre que para *ondas gravitacionales*, o sea, con longitud de onda grande comparada con 1,7 cm, la velocidad de grupo es la mitad de la fase. Extienda la Tabla 6.1 de la Sección 6.2 para incluir longitudes de onda de 128 y 256 metros. Dé las velocidades de las ondas en km por hora además de darlas en cm por segundo. (Para observar frecuencias tan bajas como 4 ó 5 por minuto, vaya a una playa de una bahía oceánica resguardada en un día que no haya viento costero fuerte. Entonces las únicas olas son las que provienen de lejos del océano.)

6.20 Análisis de Fourier de una pulsación cuadrada en tiempo. Considere una pulsación cuadrada $\psi(t)$ nula para todo t fuera del intervalo t_1, t_2 . Dentro de este intervalo, $\psi(t)$ tiene el valor constante $1/\Delta t$, donde $\Delta t = t_2 - t_1$. Sea t_0 el tiempo en el centro del intervalo. Muestre que $\psi(t)$ puede ser analizado según Fourier como sigue:

$$\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega(t - t_0) d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega(t - t_0) d\omega,$$

con la solución:

$$A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta t \omega}{\frac{1}{2} \Delta t \omega}.$$

Dibuje $B(\omega)$ en función de ω . En el límite, cuando Δt tiende a cero, se llama a $\psi(t)$ "función delta" del tiempo, y se escribe $\rho(t - t_0)$. ¿Qué es $B(\omega)$ para esta función delta del tiempo?

6.21 Análisis de Fourier de una oscilación armónica truncada. Suponga que $\psi(t)$ es nula fuera del intervalo de t_1 a t_2 cuya duración es $\Delta t = t_2 - t_1$ y su valor central $(1/2)(t_1 + t_2) = t_0$. Suponga que $\psi(t)$ es igual a $\cos \omega_0(t - t_0)$ en el interior de ese intervalo.

(a) Muestre que $\psi(t)$ se puede analizar según Fourier de la siguiente manera:

$$\psi(t) = \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega(t - t_0),$$

$$\pi B(\omega) = \frac{\text{sen}[(\omega_0 + \omega)\frac{1}{2}\Delta t]}{\omega_0 + \omega} + \frac{\text{sen}[(\omega_0 - \omega)\frac{1}{2}\Delta t]}{\omega_0 - \omega}$$

(b) Muestre que si Δt es mucho menor que el período de cualquier frecuencia que querramos medir o nos interese, entonces $\pi B(\omega)$ tiene el valor constante Δt .

(c) Muestre que si Δt contiene muchas oscilaciones, es decir, si $\omega_0 \Delta t \gg 1$, entonces, para ω suficientemente cercana a ω_0 , $B(\omega)$ está dada esencialmente por el segundo término solamente:

$$\pi B(\omega) \approx \frac{\text{sen}[(\omega_0 - \omega)\frac{1}{2}\Delta t]}{\omega_0 - \omega}, \quad |\omega_0 - \omega| \ll |\omega_0 + \omega|.$$

(d) Dibuje $\psi(t)$ y $B(\omega)$ para la parte (c).

Este problema puede ayudarnos a entender el *ensanchamiento colisional* de líneas espectrales. Un átomo no perturbado que emite luz visible casi monocromática, tiene un tiempo de decaimiento medio de alrededor de 10^{-8} seg, y por lo tanto el espectro de Fourier de su radiación tiene un ancho de banda $\Delta\nu$ del orden de 10^{-8} cps. Si los átomos están en un tubo de descarga de gases, como fuente luminosa, surge que el ancho de banda de la luz emitida (llamado "ancho de línea en óptica") es del orden de 10^9 en lugar de 10^8 cps. Parte del motivo de este "ensanchamiento de líneas" es el hecho de que los átomos no irradian en forma libre y sin perturbación; *chocan*. Como resultado de la colisión se produce un repentino cambio en la amplitud o en la constante de fase o en ambas. Esta situación es análoga a la ilustrada por el oscilador armónico truncado. Un átomo dado puede pasar la mayor parte de su tiempo "no excitado". Ocasionalmente es excitado con un movimiento oscilatorio de los ópticos (de valencia) (estamos hablando clásicamente, para una descripción más cuidadosa se requiere mecánica cuántica). El átomo comienza a oscilar como un oscilador armónico amortiguado, con un tiempo de decaimiento del orden de 10^8 seg. Sin embargo, dentro de un intervalo Δt de aproximadamente 10^{-9} seg (en un tubo de descarga en gases), tiene una colisión que trunca la oscilación de alguna manera aleatoria. Si uno suma la luz proveniente de varias fuentes de este tipo, el ancho de banda $\Delta\nu$ estará dado por $\Delta\nu \approx (1/\Delta t) \approx 10^9$ cps.

6.22 Análisis de Fourier de una pulsación cuadrada repetida casi periódicamente. Una pulsación cuadrada de duración Δt da un espectro continuo de frecuencias que tiene sus contribuciones más importantes entre cero y $\nu_{\text{máx}} = \Delta\nu$ con $\Delta\nu = 1/\Delta t$. (Vea Prob. 6.20.) Una pulsación cuadrada de duración Δt repetida periódicamente a intervalos de tiempo T_1 (con $T_1 > \Delta t$) da un espectro *discreto* de frecuencias que consiste en *armónicos* (múltiplos enteros) de $\nu_1 = 1/T_1$, cuyas contribuciones más importantes se extienden desde cero a $\nu_{\text{máx}} = \Delta\nu$ con $\Delta\nu \approx 1/\Delta t$. (Vea Prob. 2.30.) Considere ahora una pulsación cuadrada "casi periódica" de duración

Δt repetida a intervalos T_1 , durante un tiempo total T_{long} largo comparado con el período T_1 . Si T_{long} fuera infinito, tendríamos exactamente una onda cuadrada repetida periódicamente, como fue descrita más arriba. En ese caso cada uno de los armónicos discretos sería “infinitamente angosto”.

(a) Muestre que para un valor finito de T_{long} el análisis de Fourier de esta pulsación cuadrada casi periódicamente repetida, consiste en una superposición de armónicos *casi discretos* de la frecuencia fundamental $\nu_1 = (1/T_1)$, siendo realmente cada armónico un continuo de frecuencias que se extiende sobre una banda de ancho $\delta\nu \approx 1/T_{\text{long}}$. Las armónicas más importantes caen entre cero y $\nu_{\text{máx}} \approx 1/\Delta t$. No necesitamos llevar a cabo ninguna integración. Utilice argumentos cualitativos.

(b) Dibuje cualitativamente las formas de $\psi(t)$ y de los coeficientes de Fourier $A(\omega)$ o $B(\omega)$ que esperaría, sin preocuparse por la diferencia entre $A(\omega)$ y $B(\omega)$.

6.23 Fijación de modos de un laser para lograr pulsaciones angostas de luz visible.

(Primero trabaje en el problema 6.22.) Un laser consiste (a grandes rasgos) de una región de longitud L con espejos en cada extremo para reflejar luz de ida y vuelta. Bajo condiciones apropiadas, cuando el espacio se llena con átomos adecuadamente excitado, la radiación de cada átomo estimula a otros átomos excitados y haciéndoles irradiar con relaciones de fase que dan interferencia constructiva entre todos los átomos irradiantes, para radiación en la dirección longitudinal del laser (ida y vuelta entre los espejos). Entonces todos los átomos oscilan en fase, y el sistema de átomos más su radiación oscila en un *modo normal*. Las frecuencias de los posibles modos normales de oscilación libre son armónicas, de una frecuencia fundamental ν_1 . El período $T_1 = 1/\nu_1$ es exactamente el tiempo requerido por la luz para propagarse “ida y vuelta” entre los espejos. En consecuencia $T_1 = 2L/(c/n)$, donde n es el índice de refracción. Entonces $\nu_1 = 1/T_1$, y los posibles modos tienen frecuencias $\nu = m\nu_1$ donde $m = 1, 2, 3$, etc. Ahora bien, si no hubiera espejos, los átomos excitados irradiarían su luz usual independiente. Para un laser de gas de helio-neón, esto es, la luz roja de neón de longitud de onda 6328 Å, el tiempo de amortiguamiento τ para un átomo sería en este caso alrededor de 10^{-9} seg, dando un ancho de frecuencia $\Delta\nu$ de aproximadamente 10^9 cps. Cuando, en cambio, se tiene un modo del sistema completo (de átomos más radiación), el tiempo de amortiguamiento para el modo de este sistema es mucho más largo que el tiempo de decaimiento libre τ para átomo único. El amortiguamiento del modo se debe a la pérdida de luz a través de los espejos terminales, “paralelismo imperfecto de los espejos” y otros factores. El tiempo de amortiguamiento T_{long} puede ser cientos o miles de veces mayor que el tiempo de decaimiento libre. Esto significa que cada modo tiene un ancho de frecuencias $\delta\nu \approx 1/T_{\text{long}}$ que es cien o miles de veces más angosto que el ancho de línea natural $\Delta\nu$. Este último juega sin embargo un importante papel, puesto que inicialmente el sistema toma átomos que decaen libremente para llevar la totalidad del sistema excitado a un modo. Ahora bien los únicos modos apreciablemente excitados son aquellos cuya frecuencia de modo, $m\nu_1$, cae dentro de la banda $\Delta\nu$ de los átomos que decaen libremente. Para luz visible y con una longitud L del orden de 1 m, es fácil ver que el número armónico m es un entero muy grande.

(a) ¿Cuál es el orden de magnitud del entero modal m ?

(b) Dibuje la forma del espectro de frecuencias de los modos importantes de un laser. En otras palabras, ponga en forma gráfica lo que ha sido dicho hasta ahora. Indique la separación de frecuencia ν_1 entre frecuencias de modos adyacentes, el ancho de frecuencia $\delta\nu$ de cada modo y el ancho de frecuencias $\Delta\nu$ de los modos más fácilmente excitados.

Ahora prosigamos: Cuando se excita cualquier sistema complicado y luego se le permite oscilar, lo hace en una superposición más o menos complicada de sus modos normales. Si es excitado de una manera “brutal”, puede haber

varios modos presentes, sin relaciones de fase particularmente sencillas entre los diferentes modos. A una superposición de este tipo le llamaremos superposición "incoherente" de modos. Eso es lo que se obtiene ordinariamente si se excita un laser de manera que se exciten varios de sus modos. Por ejemplo, no es difícil excitar un laser de forma tal que se exciten prácticamente todos los modos de la banda $\Delta\nu$. La relación de la fase entre modos diferentes es "aleatoria", en el siguiente sentido: Si observa el sistema en un tiempo dado y determina las fases relativas de los modos, y luego la observa en un tiempo muy posterior al de decaimiento T_{long} , las fases relativas entre los modos serán impredeciblemente diferentes. Esto se debe a que durante un tiempo del orden de T_{long} , toda la energía de un modo dado se ha perdido y mientras tanto ha sido rellena por átomos nuevamente excitados. En consecuencia, el modo ha sido "conectado de nuevo", aproximadamente, a cada intervalo de tiempo T_{long} . El "tiempo de conexión" es aleatorio. Por lo tanto, la fase ha cambiado en forma impredecible en un tiempo del orden de T_{long} . Ahora bien, el espectro de frecuencias de los modos importantes que dibujó en la parte (b) es análogo al del análisis de Fourier de un pulso cuadrado repetido casi periódicamente, como viene dado en el Problema 6.22. Hay, sin embargo, una diferencia extremadamente importante. En el análisis de Fourier de la onda cuadrada casi periódica, hay una relación de fase muy definida y completamente especificada entre cada uno de los componentes de frecuencia que forman la superposición. Éste no es el caso para una mezcla incoherente de modos de laser.

(c) Muestre que una superposición de una mezcla incoherente de modos de laser, cada uno de ancho de banda $\delta\nu \approx 1/T_{\text{long}}$ y que ocupa una región total de frecuencias de ancho $\Delta\nu$, da una dependencia temporal $\psi(t)$, que es una función casi periódica de t con período T_1 . Muestre que esta función casi periódica mantendrá una similitud reconocible consigo misma, sólo durante periodos sucesivos T_1 , contenidos en intervalos de tiempo del orden de T_{long} . Muestre que a pesar de ser accidental puede ocurrir que durante un intervalo del orden T_{long} , la función casi periódica $\psi(t)$ tenga el aspecto de una onda cuadrada periódicamente repetida de duración $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$. Ordinariamente esperaríamos que $\psi(t)$ sea significativamente distinta de cero durante todo el período T_1 . Así, tendríamos $\Delta t \gg 1/\Delta\nu$. Ahora estamos listos para entender el efecto del bonito invento de *fijación de modos*. Suponga que de alguna manera podemos obtener todos los modos de laser importantes "encerrados" en fase entre sí, sin importar todavía cómo. Podemos esperar entonces que esta superposición *coherente* de modos, todos con la misma constante de fase, darán una función casi periódica $\psi(t)$ consistente en pulsaciones repetidas de duración $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$, a intervalos T_1 , con una forma de pulsación que permanece casi constante durante tiempos del orden de T_{long} . Esta expectativa ha sido realizada experimentalmente. He aquí el ingenioso truco de fijación modal: Encienda el laser. Ordinariamente algún modo cerca del centro de la banda $\Delta\nu$ será el primero que comience a oscilar. Llame ν_0 a este modo. Dispóngalo de manera que (por ejemplo) la transparencia del medio (o de los espejos, o algún objeto que deba atravesar la luz) sea variado o *modulado* sinusoidalmente alrededor de cierto valor promedio, eligiéndose la frecuencia de modulación igual a la fundamental $\nu_1 = 1/T_1$ que corresponde al tiempo de "ida y vuelta", T_1 . Entonces el primer modo en oscilar tendrá una amplitud no constante sino modulada a la frecuencia de modulación ν_1 :

$$\psi_{1er\ modo} = [A_0 + A_{\text{mod}} \cos \omega_1 t] \cos \omega_0 t,$$

donde la amplitud modulada es $A_0 + A_{\text{mod}} \cos \omega_1 t$. Esta oscilación "casi armónica" puede escribirse como superposición de oscilaciones exactamente armónicas a frecuencias ω_0 , $\omega_0 + \omega_1$ y $\omega_0 - \omega_1$:

$$\psi_{1er\ modo} = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} A_{\text{mod}} \cos (\omega_0 + \omega_1) t + \frac{1}{2} A_{\text{mod}} \cos (\omega_0 - \omega_1) t.$$

Los términos en $\cos(\omega_0 + \omega_1)t$ y $\cos(\omega_0 - \omega_1)t$ actúan ahora como fuerzas impulsoras. Ayudan a hacer marchar los modos $\omega_0 + \omega_1$ y $\omega_0 - \omega_1$. En consecuencia estos modos no comienzan a andar al azar sino que son *impulsados* a oscilar. Por lo tanto, tienen una relación de fase definida (la dada arriba) con el modo central ω_0 . Una vez que los modos $\omega_0 + \omega_1$ y $\omega_0 - \omega_1$ “echan a andar”, su amplitud es modulada por el mismo efecto físico que está modulando ω_0 y con la misma fase. En consecuencia estos modos contienen a su vez componentes que actúan como fuerzas impulsoras para hacer andar a sus vecinos (uno de los cuales está en marcha, el otro, no). De esta manera los modos $\omega_0 + 2\omega_1$ y $\omega_0 - 2\omega_1$, son puestos en marcha. A medida que entran en movimiento los modos con frecuencias cada vez más alejadas de ω_0 , comienzan con relaciones de fase definidas. Así es como trabaja.

Para un laser de gas, el tiempo de decaimiento natural τ es del orden de 10^{-9} seg; por lo tanto, el ancho de línea natural $\Delta\nu$ es del orden de 10^9 Hz. De esta manera se pueden generar pulsaciones de ancho $\Delta t \approx 10^{-9}$ seg por fijación de modos de un laser de gas. Para un laser sólido, por ejemplo, hecho de rubí pulido, el tiempo de amortiguamiento natural para átomos individuales es del orden de 10^{-11} seg ó 10^{-12} seg. (Las oscilaciones atómicas son rápidamente amortiguadas debido a las colisiones con átomos vecinos en el sólido.) En consecuencia, el ancho de banda de la radiación de átomos que emiten luz roja de rubí es alrededor de 10^{12} seg $^{-1}$. Éste es también el ancho de banda de los modos fácilmente excitados del laser. Usando un laser sólido, por consiguiente, podemos generar pulsos de luz ultracortos de duración $\Delta t \approx 1/\Delta\nu \approx 10^{-11}$ ó 10^{-12} seg. Por supuesto que ésta es meramente la duración de un pulso de luz de un átomo que decae en el sólido, de acuerdo a la mecánica clásica. ¿Por qué debemos entonces estar tan entusiasmados con el resultado? Por una cosa, un único átomo no da mucha luz, mientras que aquí tenemos un enorme número de átomos emitiendo todos al mismo tiempo como para obtener un pulso de luz de corta duración *extremadamente poderoso*. Más importante aún que esto es el hecho que, de acuerdo a la mecánica cuántica (y experimentos), un único átomo no emite luz en un haz continuo como lo describe nuestro modelo clásico. El “fotón” luminoso, en cambio, sale en un “paquete” discreto. Para un único átomo no hay forma de decir exactamente cuándo va a ser emitido este paquete de energía. Sólo se conoce la probabilidad en función del tiempo. Por lo tanto, no podemos realmente obtener pulsaciones cortas de luz sincronizadas usando átomos únicos.

Estas pulsaciones de luz ultracortas pueden usarse para muchos experimentos. Véase A. de Maria, D. Stetser y W. Glenn Jr., “Ultrashort Light Pulses”, *Science* 156, 1557 (23 junio 1967).

6.24 Función delta de frecuencia. En la Sección 6.4 consideramos la superposición

$$\psi(t) = \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t d\omega$$

de un espectro de frecuencias “cuadrado” obtenido haciendo $B(\omega) = 1/\Delta\omega$ para ω comprendida en el intervalo entre ω_1 y $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ y $B(\omega) = 0$ en cualquier otro lugar. Encontramos que esa superposición era

$$\psi(t) = \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta\omega t}{\frac{1}{2} \Delta\omega} \right] \cos \omega_0 t,$$

donde ω_0 es la frecuencia en el centro de la banda $\Delta\omega$. Sea $t_{\text{máx}}$ un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño como para que $\Delta\omega t_{\text{máx}} \ll 1$, entonces, por lo que está a su alcance decir (en su experimento de duración $t_{\text{máx}}$), $\psi(t)$ es una

oscilación exactamente armónica de amplitud y fase constante. El coeficiente de Fourier $B(\omega)$ es llamado entonces "función delta de la frecuencia". Una función de este tipo tiene las propiedades de ser nula en todas partes excepto en una estrecha región $\Delta\omega$ y de que su integral sobre todo ω es unitaria. Muestre que la $B(\omega)$ dada más arriba tiene estas propiedades en el límite $\Delta\omega \ll 1/t_{\text{máx}}$ y, por lo tanto, es una función delta de la frecuencia.

6.25 Resonancia en grandes olas. Considere que el océano tiene una profundidad uniforme de 5 km. (Ésta es aproximadamente la profundidad media.) Muestre que una gran ola generada, por ejemplo, por un terremoto viaja a alrededor de 220 m/seg. Suponga que no hay continentes, y que el agua está confinada en "canales" que van siguiendo líneas de latitud constante, de manera que sólo puede moverse hacia el este u oeste y no en la dirección norte y sur. ¿A qué latitud una ola (generada por un terremoto) tardaría 25 horas en circunvalar el globo? Llame θ_0 a esta latitud. (En el ecuador θ_0 es nula y en los polos vale 90° .)

El sol y la luna ejercen fuerzas impelentes gravitacionales que impulsan las mareas. Considere la luna. (El sol proporciona una fuerza impulsora que es la mitad de la provista por la luna.) Un "día" lunar (el tiempo entre pasajes sucesivos de la luna) dura alrededor de 25 horas. Sucedería que si la tierra no girara sobre su eje, el pandeo tidal de las aguas debido a la luna tendría lugar directamente en el punto debajo de la luna y en el diametralmente opuesto. En luna nueva y luna llena, el sol y la luna cooperan para dar mareas muy altas. En consecuencia, en esos momentos del mes debería esperarse que las aguas estuvieran altas al mediodía y a la medianoche y bajas a la salida y puesta del sol (de acuerdo al "modelo estático" de una tierra no rotante). En definitiva, esto es lo que se esperaría en una isla en pleno océano. (En un puerto debería esperarse que el agua fluya hacia dentro y hacia fuera.) Considere ahora el "modelo de canales", y una tierra rotante. En luna nueva y luna llena, ¿Cuándo esperaría que suba el agua en el canal ecuatorial? ¿cuándo esperaría que esto ocurra en un canal a una latitud mayor que θ_0 ? (Sugerencia: Considere un oscilador forzado.)

Para lecturas posteriores acerca de grandes olas, seiches en el lago de Ginebra, la evolución posible del sistema tierra-luna y otros fascinantes temas, vea el popular clásico "*Las Mareas*", por George H. Darwin (hijo de Charles Darwin) escrito en 1898, disponible en W. H. Freeman and Company, San Francisco (1962) edición económica 2,75 \$. US. En aquellos días comenzaba a usarse el análisis de Fourier y Darwin describe, entre otras cosas, algunas máquinas de Fourier analizadoras, sencillas e ingeniosas.

6.26 Ondas no dispersivas. Muestre que cualquier función diferenciable $f(t')$ de $t' = t - (z/v)$ satisface la ecuación de ondas clásicas, o sea, demuestre

$$\frac{\partial^2 f(t')}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(t')}{\partial z^2}.$$

Demuestre también que cualquier función diferenciable $g(t'')$ de $t'' = t + (z/v)$ satisface la ecuación de ondas clásica. Dé un ejemplo de función $f(t')$ y muestre explícitamente que satisface la ecuación de ondas clásicas.

6.27 Modulación de amplitud y no linealidad. (a) Una manera de producir una onda de transmisión modulada en amplitud es pasar una corriente $I = I_0 \cos \omega_0 t$ que oscila a la frecuencia característica ω_0 a través de una resistencia R que no es constante, sino que tiene un componente que varía a la frecuencia de modulación ω_{mod} , esto es, $R = R_0(1 + a_m \cos \omega_{\text{mod}} t)$. (En un micrófono de gránulos de carbón, la resistencia es modulada por el movimiento de un dia-

fragma que comprime los gránulos de carbón que proveen la resistencia.) El voltaje $V = IR$ a través del resistor es una onda de transmisión modulada en amplitud. Encuentre la expresión para V en términos de una *superposición* de la onda transmisora (frecuencia ω_0), banda lateral superior (frecuencia $\omega_0 + \omega_{\text{mod}}$) y banda lateral inferior (frecuencia $\omega_0 - \omega_{\text{mod}}$).

(b) Alternativamente, suponga que comenzamos con dos voltajes, uno oscilando a la frecuencia transmisora y el otro a la de modulación. El problema es éste: ¿Cómo puede combinar físicamente estos dos voltajes $V_0 = A_0 \cos \omega_0 t$ y $V_m = A_m \cos \omega_{\text{mod}} t$ de manera tal de producir una onda de transmisión modulada en amplitud? Suponga primero que ha superpuesto meramente los dos voltajes, o sea, que ha puesto ambos en la antena radiodifusora. ¿Funcionará?

(c) Suponga luego que los voltajes de la parte (b), luego de haber sido superpuestos, son aplicados a la entrada de un amplificador de voltaje. (Pueden, por ejemplo, haber sido aplicados entre la rejilla de control y el cátodo de una válvula de radio.) Suponga también que el amplificador es *lineal*, o sea, su salida (por ejemplo la tensión entre cátodo y placa de la válvula) es proporcional a la entrada. ¿Funcionará?

(d) Finalmente, suponga que la salida del amplificador tiene un componente lineal y uno cuadrático, como sigue

$$V_{\text{sal}} = A_1 V_{\text{en}} + A_2 (V_{\text{en}})^2.$$

Sea $V_{\text{en}} = V_0 + V_m$ como fue definido en la parte (b). Muestre que, debido al término cuadrático $A_2 (V_{\text{en}})^2$ la salida del amplificador incluye, entre otras cosas, una onda de transmisión modulada en amplitud, con amplitud de modulación proporcional a A_m .

(e) La onda de transmisión modulada en amplitud de (d) contribuye con componentes de Fourier con frecuencias ω_0 , $\omega_0 + \omega_{\text{mod}}$ y $\omega_0 - \omega_{\text{mod}}$. ¿Qué otras frecuencias componentes hay en V_{sal} ? Haga un diagrama que muestre un espectro completo de frecuencias de la salida del amplificador. Describa cómo puede librarse de estos otros componentes (no deseados) usando filtros de banda. Suponga que ω_{mod} es pequeña comparada con ω_0 . ¿Cuán selectivos deben ser los filtros?

6.28 Demodulación de amplitud y no linealidad. Suponga que su antena receptora capta una onda de transmisión modulada en amplitud con voltaje dado por

$$V = V_0 (\cos \omega_0 t) (1 + a_m \cos \omega_{\text{mod}} t).$$

¿Cómo puede recuperarse el voltaje de modulación, $a_m \cos \omega_{\text{mod}} t$? Suponga que dispone de todos los filtros de banda que desee además de un amplificador no lineal del tipo descrito en el Problema 6.27 tal que

$$V_{\text{sal}} = A_1 V_{\text{en}} + A_2 (V_{\text{en}})^2.$$

(Sugerencia: Expresé la onda transportadora modulada en amplitud como una superposición, hágala pasar a través del amplificador no lineal, y luego fíltrela.)

6.29 Modulación de frecuencia (FM). Puede escribirse un voltaje modulado en frecuencia en la forma (por ejemplo)

$$V = V_0 \cos [\omega_0 (1 + a_m \cos \omega_{\text{mod}} t) t] = V_0 \cos \omega t,$$

con

$$\omega = \omega_0 + \omega_0 a_m \cos \omega_{\text{mod}} t.$$

Una manera de hacer que una onda de transmisión modulada en frecuencia transmita música es usando un "micrófono capacitativo". Las ondas de sonido mueven un diafragma que a su vez mueve una placa de un capacitor; éste tiene entonces una capacitancia (por ejemplo)

$$C = C_0(1 + c_m \cos \omega_{\text{mod}} t).$$

Suponga que esta capacitancia forma parte de un circuito LC con frecuencia de oscilación natural $\omega = \sqrt{1/LC}$. El voltaje, a través del capacitor, es por ejemplo, $V = V_0 \cos \omega t$. Muestre que para c_m pequeña respecto a la unidad se obtiene un voltaje modulado en frecuencia con una amplitud a_m proporcional a c_m . Encuentre la constante de proporcionalidad entre c_m y a_m .

6.30 Modulación de fase (MF). Un voltaje modulado en fase puede tener la forma (por ejemplo)

$$V = V_0 \cos(\omega_0 t + a_m \sin \omega_{\text{mod}} t) = V_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

con

$$\varphi = a_m \sin \omega_{\text{mod}} t.$$

La frecuencia instantánea se obtiene diferenciando con respecto al tiempo la cantidad entre paréntesis:

$$\omega = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + a_m \omega_{\text{mod}} \cos \omega_{\text{mod}} t.$$

Por comparación con el Problema 6.29 vemos que la modulación de fase y la modulación de frecuencia están muy relacionadas (algunas veces ambas son denominadas erróneamente FM).

(a) Muestre que el voltaje modulado en fase puede escribirse como superposición de oscilaciones armónicas de frecuencias ω_0 , $\omega_0 \pm \omega_{\text{mod}}$, $\omega_0 \pm 2\omega_{\text{mod}}$, $\omega_0 \pm 3\omega_{\text{mod}}$, etc. [Sugerencia: Primero desarrolle $\cos(\omega_0 t + \varphi)$, luego $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$ en sus series infinitas de Taylor. Luego use las relaciones trigonométricas desarrolladas en el Problema 1.13.]

(b) Muestre que si la amplitud de modulación a_m es pequeña comparada con la unidad podemos razonablemente despreciar en la superposición todos los términos, excepto los que tienen frecuencias ω_0 y $\omega_0 \pm \omega_{\text{mod}}$. En consecuencia, vemos que para amplitud de modulación de fase pequeña tenemos la transmisora y esencialmente sola una banda lateral superior y una inferior. Por lo tanto, para a_m pequeña el ancho de banda requerido es el mismo que para transmisiones AM (modulada en amplitud). Para a_m grande, el ancho de banda requerido es mayor debido a las bandas laterales adicionales en $\omega_0 \pm 2\omega_{\text{mod}}$, etc.

(c) Compare la fase relativa de la onda de transmisión y las dos bandas laterales en MF (modulación de fase) con la de la transmisora y las dos bandas laterales para AM encontrada en el Prob. 6.27. Las relaciones de fase son (como hallaremos) diferentes. Ésa es una manera de distinguir MF (y también FM) de AM.

(d) Suponga que desea convertir un voltaje AM en MF. Se le proporcionan todos los filtros de banda que desee y también un circuito que llevará a cabo el corrimiento de fase arbitrario deseado. Después de haber tratado de inventar un método, vaya al Problema 9.58 en donde será llevado de la mano. [Este problema se da en el Capítulo 9 porque es una analogía muy bonita con el microscopio de contraste de fase (Prob. 9.59).]

6.31 Trasmisión de banda lateral única. Si la información a transmitir ocupa una banda de frecuencias de modulación desde ω_{mod} (mín) a ω_{mod} (máx), en-

tonces la banda de radiodifusión AM o FM se extiende desde $\omega_0 - \omega_{\text{mod}}$ (máx) hasta $\omega_0 + \omega_{\text{mod}}$ (máx), donde ω_0 es la frecuencia de transmisión. El ancho de banda es, en consecuencia, $2\omega_{\text{mod}}$ (máx). El ancho de banda es de gran valor, puesto que cada estación de una región debe ocupar una banda diferente para prevenir la mutua superposición e interferencia de las señales.

(a) Suponga que está radiodifundiendo ondas de radio AM, y que usa un filtro de banda para separar la banda lateral superior y la transmisora, descartando la banda lateral inferior. Emite sólo la transmisora y la banda lateral superior. Invente una manera de recrear la banda lateral inferior en el receptor introduciendo la señal recibida (transmisora y banda lateral superior) en un amplificador no lineal del tipo descrito en los Problemas 6.27 y 6.28. Discuta las relaciones de amplitud y fase necesarios para obtener una señal proporcional a la señal AM original.

(b) Puede disminuir aún más el ancho de banda transmitido si suprime no sólo la banda lateral inferior, sino también la transmisora. Suponga que transmite solamente la banda lateral superior y que el receptor tiene un "oscilador local" propio que emite una señal $V = A \cos \omega'_0 t$, donde ω'_0 es tan cercana a ω_0 como sea posible. (Nunca será exactamente igual a ω_0 , por corrimientos inevitables debidos a diversas causas.) Idee un método por el cual pueda combinar la señal del oscilador local con la recibida desde el transmisor (banda lateral superior) de manera de recrear la banda lateral inferior. Utilice amplificadores no lineales, filtros, correfases, todo lo que necesite.

(c) Suponga que la frecuencia transmisora es $\omega_0 = 100$ Mc y que la frecuencia del oscilador local ω'_0 usada para transmisión en banda lateral única (suprimida también la transportadora) excede a ω_0 en (por ejemplo) 30 cps. Eso es un error de sólo una parte en tres millones. Suponga que la única consiste en una flauta tocando la nota A440 (a 440 cps). ¿Qué nota saldrá de su altavoz después de haber recreado las bandas laterales y demodulado? Ese resultado le dirá por qué actualmente (1968) la transmisión en banda lateral única incluye también la transmisora, para la TV comercial. Para comunicaciones radiofónicas, la banda transmisora puede suprimirse puesto que a nadie le preocupa que su tono de voz no sea reproducido con precisión.

6.32 Multiplexión de frecuencia. Ocurre a menudo que queremos transmitir dos o más "canales" de información completamente independientes usando la misma frecuencia transmisora ω_0 . Estos canales pueden transportar información en forma de bandas de frecuencias de modulación $\omega_{\text{mod}}(1)$, $\omega_{\text{mod}}(2)$, etc., para los canales 1, 2, etc. Si las bandas de frecuencia de modulación no se superponen, se puede simplemente modular la transmisora con todos los canales simultáneamente. Por ejemplo, puede superponer los voltajes de la onda de transmisión y de modulación de todos los canales en la entrada de un amplificador no lineal, de la misma forma que lo hizo con un único voltaje de modulación (canal único) en el Problema 6.27. La salida del amplificador consistirá entonces (entre otras cosas) en una onda de transmisión modulada en amplitud, lo que es equivalente a una superposición que contenga frecuencias ω_0 , $\omega_0 \pm \omega_{\text{mod}}(1)$, $\omega_0 \pm \omega_{\text{mod}}(2)$, etcétera.

(a) Justifique el párrafo precedente. En el receptor debe modular, por ejemplo, como en el Problema 6.28, para recobrar las bandas de modulación $\omega_{\text{mod}}(1)$, $\omega_{\text{mod}}(2)$, etc. Estas bandas pueden entonces ser separadas mediante filtros si es que las bandas de frecuencia de modulación no se superponen. Finalmente hubiéramos separado la información salida por los canales 1, 2, etc., sin interferencias, o sea sin que la salida por el canal 1 nos dé señales derivadas del canal 2, etc.

Puesto que en la mayoría de los casos interesantes las frecuencias de modulación transmitidas por los diferentes canales ocupan bandas de frecuencia que se superponen, el método anterior no resultará. Por ejemplo, en estereofonía FM hay dos canales, uno de los cuales debe dar (eventualmente) una salida del

altavoz proveniente enteramente de un micrófono de entrada (cerca de “los vientos de madera”), el otro debe dar una salida proveniente del otro micrófono (cerca de “los bronce”). Las frecuencias de modulación para los dos canales son las de la música y éstas se superponen.

Como ejemplo adicional, en las transmisiones telefónicas a larga distancia utilizando un solo alambre o una única frecuencia de onda de transmisión en radiocomunicaciones; los distintos canales consisten en varias conversaciones telefónicas simultáneas. Las frecuencias de modulación son las de la voz humana. Análogamente, al transmitir hacia la base las señales de los instrumentos de un satélite artificial, cada instrumento tiene un canal separado. La frecuencia de modulación dependen del diseño del instrumento. (Por ejemplo, un termómetro puede consistir en un capacitor cuya capacitancia varía con la temperatura. Esta capacitancia puede luego determinar la frecuencia ω_{mod} en un circuito *LC* de un oscilador.) Las frecuencias de modulación pueden superponerse mucho.

Entonces lo necesario es un medio de “marcar” cada canal de manera que pueda ser mantenido separado del resto. Una manera sería usar una frecuencia de transmisión distinta para cada canal. Esto es lo que se hace con estaciones de radio o TV separadas. Pero hay un método más conveniente, llamado *multiplicación de frecuencias* en el cual cada canal está “marcado” con su propia frecuencia “subtransistora”, de la siguiente forma. Llamemos ω_1 , ω_2 , etc., a las frecuencias subtransmisoras para los canales 1, 2, etc. (Estas frecuencias son grandes comparadas con las de modulación. La frecuencia de transmisión principal ω_0 , en cambio, es grande comparada con cualquiera de las de subtransmisión.) La subtransmisión ω_1 está modulada en amplitud (o en frecuencias) con una frecuencia de modulación $\omega_{\text{mod}}(1)$ por el canal 1. Esto da una salida de amplitud modulada por el canal 1 que consiste en una superposición con frecuencias ω_1 , $\omega_1 + \omega_{\text{mod}}(1)$ y $\omega_1 - \omega_{\text{mod}}(1)$. Análogamente, el canal 2 tiene una salida con frecuencias ω_2 , $\omega_2 + \omega_{\text{mod}}(2)$ y $\omega_2 - \omega_{\text{mod}}(2)$. Las frecuencias subtransmisoras ω_1 y ω_2 se eligen lo suficientemente alejadas entre sí para que no haya superposición de las dos bandas que rodean las dos transmisoras, o sea, tomando ω_1 menor que ω_2 , la frecuencia más alta en la banda lateral superior $\omega_1 + \omega_{\text{mod}}(1)$ es menor que la frecuencia más baja en la banda lateral inferior $\omega_2 - \omega_{\text{mod}}(2)$. Por ejemplo, para radiodifusión estereofónica FM, las frecuencias subtransmisoras típicas son $\nu_1 = 20$ kc, $\nu_2 = 40$ kc. Si las frecuencias de modulación (música) se extienden desde cero hasta 10 kc, el canal 1 incluirá una banda de 10 a 30 kc y el 2 de 30 a 50 kc. Por lo que parece, hasta ahora tenemos dos transmisoras (para dos canales). Pero no hemos llegado todavía a la antena de salida. Superponemos ahora las salidas de todos los canales y consideramos superposición multicanal multibanda como una gran banda de frecuencias de modulación que se extiende desde el extremo inferior de la banda lateral inferior del canal 1 hasta el extremo superior de la banda lateral superior del canal más alto. Usamos esta banda completa para modular la frecuencia transmisora principal ω_0 , superponiendo (por ejemplo) esta banda multicanal sobre el voltaje de la transmisora y aplicando la resultante a la entrada de un amplificador no lineal, como en el Problema 6.27.

(b) Si usa el amplificador no lineal del Problema 6.27, ¿en qué consistirá la salida del amplificador? Más que usar fórmulas puede hacer un diagrama cualitativo de intensidad en función de la frecuencia. Muestre las bandas de frecuencia cercanas a ω_0 que aplicará a la antena transmisora. Muestre también las otras frecuencias, emergentes del amplificador que filtrará y descartará.

(c) Puede “demultiplicar” en el receptor de la siguiente manera: Aplique la señal que consiste en la transmisora principal ω_0 y sus multibandas superior e inferior a la entrada de un amplificador no lineal, como en el Problema 6.28. La salida del amplificador incluirá, entre otras cosas, la subtransmisora ω_1 , y sus bandas laterales $\omega_1 \pm \omega_{\text{mod}}(1)$, y análogamente para los otros canales. Justifique este párrafo. Las distintas subtransmisoras y sus bandas laterales no

se superponen y pueden ser ahora separadas por filtros de banda. Cada canal da entonces su propia salida sin "interferencias".

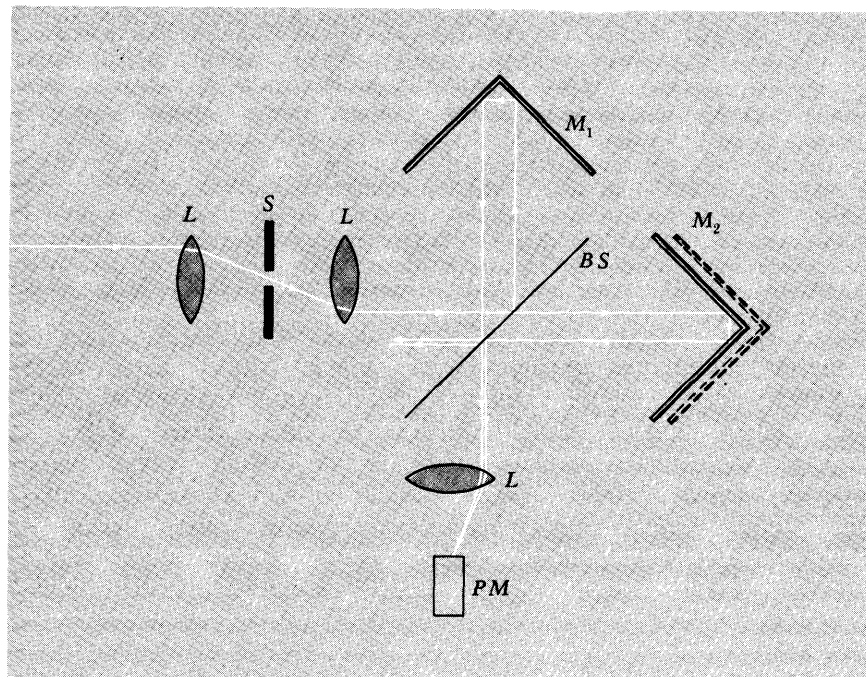
6.33 Espectroscopia de Fourier interferométrica múltiple (EFIM). En 1967 la técnica de astronomía infrarroja fue revolucionada por una nueva técnica llamada espectroscopia de Fourier interferométrica múltiple o EFIM, para abreviar. La nueva técnica proporciona en la resolución de frecuencias una mejora de uno a cien veces respecto a las técnicas anteriores, y el tiempo empleado en coleccionar luz para determinar un espectro de frecuencias se hace 60 000 veces menor. La técnica EFIM es una ingeniosa aplicación del concepto de multiplexión de frecuencias discutido en el Problema 6.23.

El espectro de frecuencias de una estrella que emite luz visible puede ser obtenido mediante una red de difracción seguida de una emulsión fotográfica colocada atrás a una distancia adecuada. Se obtiene el espectro completo de una sola vez debido a que las longitudes de onda diferentes son difractadas en distintas direcciones y por consiguiente caen sobre partes distintas de la película. El ennegrecimiento de la emulsión a un ángulo dado de difracción da la intensidad del componente de esa longitud de onda.

Para luz infrarroja (o sea, longitudes de onda del orden de 10^{-4} cm) no hay placas fotográficas adecuadas. La red de difracción todavía sirve y puede ser usada. En lugar de la película puede usarse un fotomultiplicador con una ranura movable. La posición de la ranura da el ángulo de difracción y, por consiguiente, la longitud de onda. La corriente del fotomultiplicador da la intensidad. Si se desea resolución fina (en frecuencia o longitud de onda), puede usarse una ranura estrecha para mejorar la resolución angular. Si se desea un espectro completo de frecuencias, se debe contar con suficiente tiempo en una posición de la ranura como para medir la intensidad a la correspondiente longitud de onda, mover luego la ranura un ancho de ranura y esperar el tiempo suficiente en la nueva posición, etc. Obtener un espectro completo de frecuencias en el rango de ν_1 a ν_2 , midiendo cada parte del rango con ancho de banda $\Delta\nu$, supone $(\nu_2 - \nu_1)/\Delta\nu$ mediciones de intensidad separadas. Para un rango de longitudes de onda de 1 a 3 micrones (1 micrón = 10^{-4} cm), tenemos un rango de números de onda de 1 a $1/3$ por 10^4 cm $^{-1}$ (centímetros inversos), eso es, $\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1} = 2/3 \times 10^{-4}$ cm $^{-1}$. Para poder de resolución típicamente bueno de $\Delta(\lambda^{-1}) = \Delta(\nu/c) \approx 0,1$ cm $^{-1}$ necesitaríamos alrededor de $2/3 \times 10^5 \approx 60\,000$ mediciones separadas para cubrir el espectro completo. Puesto que cada medición puede ocupar una noche, esto nos llevaría varios centenares de años.

Por supuesto que si se dispone de 60 000 fotomultiplicadores se puede medir el espectro completo de una sola vez, pero eso es poco práctico. Si un fotomultiplicador se extendiese sobre el diagrama de difracción completo proveniente de la red, se medirían todas las longitudes de onda simultáneamente. Sin embargo, la salida del fotomultiplicador sería proporcional a la intensidad total promediada sobre el espectro completo, y nunca podría decirse de qué longitud de onda proviene cada parte. Sería como tener todas las conversaciones telefónicas de San Francisco a Nueva York llegando a la línea sin ninguna forma de separarlas. El problema de mandar conversaciones telefónicas en una línea ha sido resuelto "marcando" cada conversación con su propia "subtransmisora", y luego "multiplexando" todas las subtransmisoras juntas, como fue discutido en el Problema 6.32. Si sólo hubiera una manera de marcar cada longitud de onda infrarroja de alguna forma con una frecuencia "subtransmisora" para identificar la longitud de onda, entonces, toda la luz infrarroja podría enfocarse al mismo tiempo sobre un fotomultiplicador. La salida del fotomultiplicador podría ser analizada según Fourier para resolverla en bandas subtransmisoras separadas. Por lo tanto, la intensidad de cada subtransmisora es la intensidad de la correspondiente longitud de onda infrarroja.

(a) Invente una manera de marcar cada longitud de onda con una subtransmisora usando una "cuchilla circular" mecánica que consista en un disco rotante



Problema 6.33

con agujeros o ranuras que haga pasar la luz incidente por una ranura y la bloquee en los otros lugares. Su problema principal es encontrar una forma de hacer depender la frecuencia de interrupción de la longitud de onda infrarroja.

El elegante método usado en la técnica EFIM es el siguiente. No se usa red de difracción ni cuchilla mecánica. En lugar de esto se usa un interferómetro de Michelson con un espejo móvil. (Este tipo de interferómetro, usado en el experimento de Michelson-Morley, se muestra en el esquema de arriba.) La luz proveniente de una estrella incide (por ejemplo), en la dirección x sobre un espejo semiplatado "divisor de haz" orientado a 45° respecto del haz incidente. El divisor de haz refleja la mitad de la luz en la dirección y y transmite la otra mitad en la dirección x . Por medio de espejos, estos dos haces son luego devueltos al divisor, el cual refleja la mitad de la luz recombinada, en la dirección $-y$ hacia un fotomultiplicador. (La otra mitad es transmitida en la $-x$ y se pierde). Para una longitud de onda dada λ , la corriente del fotomultiplicador será máxima o mínima según que los dos haces recombinados estén en fase o 180° fuera de fase. Esto a su vez depende de si la diferencia entre las longitudes de sus recorridos (divisor espejo-divisor fotomultiplicador) es un número par de semilongitudes de onda (fase relativa nula) o un número impar de semilongitudes de onda (fase relativa 180°).

(b) Suponga ahora que uno de los espejos se mueve con velocidad uniforme perfectamente conocida v . Muestre que la luz infrarroja de frecuencia ν da una salida por el fotomultiplicador que tiene una dependencia temporal que incluye una componente oscilante armónicamente como $\cos \omega_{\text{mod}}$ con frecuencia de modulación $\nu_{\text{mod}} = 2(v/c)\nu$. Alternativamente, muestre que si la posición del espejo se varía de alguna manera arbitraria (en lo concerniente a dependencia temporal) y se mide la salida del fotomultiplicador en función x , entonces la respuesta del fotomultiplicador tiene una dependencia de x que incluye una componente variable como $\cos k_{\text{mod}}x$, con números de onda de modulación dado por $k_{\text{mod}} = 4\pi/\lambda$. Si

hay presentes muchas longitudes de onda, la respuesta del fotomultiplicador es una superposición consistente en una componente constante (promedio sobre todo el espectro) y una componente de Fourier para cada número de onda de modulación k_{mod} . En consecuencia, si hacemos el análisis de Fourier de la salida, la intensidad a cada k_{mod} nos da la intensidad correspondiente a la longitud de onda infrarroja λ . Lo importante es que mientras están siendo tomados los datos (un registro de salida del fotomultiplicador en función de x), todas las longitudes de onda infrarrojas están siendo medidas simultáneamente: estando cada una "marcada" por la frecuencia (o número de onda) de modulación que produce en la salida del fotomultiplicador. Así, la frecuencia de modulación actúa como "subtransmisora" permitiendo que las distintas longitudes de onda registradas simultáneamente puedan ser separadas por análisis de Fourier de la salida del fotomultiplicador.

Puede que esta técnica ofrezca el mejor método de detectar vida en Marte sin ir allí. El análisis del espectro infrarrojo de la atmósfera de Marte indicaría su composición y podría investigarse la presencia de componentes resultantes de procesos vitales. La EFIM es tan sensible que con los telescopios que están siendo planeados actualmente no sólo podrían determinarse los componentes principales, sino también trazas de hasta quizá una parte en 10^9 . Estas perspectivas, así como una descripción más detallada de la EFIM, están dadas en cinco artículos relacionados en la revista inglesa *Science Journal* de abril de 1967: "Detecting Planetary Life from Earth", por J. Lovelock, D. Hitchcock, P. Fellgett, J. y P. Connes, L. Kaplan y J. Ring, pág. 56.

Capítulo 7

Ondas en dos y tres dimensiones

7.1 Introducción 354

7.2 Ondas planas armónicas y el vector de propagación 355

- Vector de propagación 355
- ¿Por qué no un vector longitud de onda? 356
- Plano de fase constante 356
- Velocidad de fase 357
- Relaciones de dispersión en tres dimensiones 357
- Caso 1: Ondas electromagnéticas en el vacío 357
- Caso 2: Ondas electromagnéticas en un medio dispersivo 357
- Caso 3: Ondas electromagnéticas en la ionosfera 357
- Ondas estacionarias 357
- Onda mixta estacionaria y de propagación 358
- Ecuaciones de ondas tridimensionales y la ecuación de ondas clásica 358
- Caso 1: Ondas electromagnéticas en el vacío 359

- Caso 2: Ondas electromagnéticas en un medio dispersivo homogéneo 359
- Caso 3: Ondas electromagnéticas en la ionosfera 359
- Ejemplo 1: Ondas electromagnéticas en una guía de ondas rectangular 360
- Frecuencia del corte de baja frecuencia 361
- Origen físico de la frecuencia de corte de guía de onda 362
- Ondas de propagación entrelazadas 363
- Velocidad de fase, velocidad de grupo y c 363
- Ejemplo 2: Reflexión y transmisión de luz de vidrio a aire 365
- Ángulo crítico para reflexión interna total 367
- Ley de Snell 367
- Reflexión interna total 367
- Penetración de la luz a través de barreras 368

7.3 Ondas de agua 369

- Ondas rectas 370
- Propiedades del agua ideal 371
- Ondas de agua estacionarias 372
- Condiciones de contorno en las paredes 373
- Relación entre movimientos horizontal y vertical 374
- Condiciones de contorno en el fondo 374

- Ondas de aguas profundas 374
- Ondas de aguas superficiales 375
- Relación de dispersión para ondas de agua gravitacionales 376
- Ondas de tensión superficial 378
- Ondas de agua de propagación 378

7.4 Ondas electromagnéticas 379

- Ecuaciones de Maxwell para el vacío 379
- Ecuaciones de ondas clásicas para ondas electromagnéticas en el vacío 379
- Ondas electromagnéticas planas en el vacío 380
- Las ondas electromagnéticas planas son transversales 381
- Acoplamiento de E_x y B_y 381
- Polarización lineal y elíptica 382
- Onda de propagación armónica 383
- Onda armónica estacionaria 383

- Flujo de energía en una onda plana 384
- Vector de Poynting 385
- Densidad y flujo de energía en una onda de propagación 385
- Densidad y flujo de energía en una onda estacionaria 386
- Flujo de momento lineal en una onda plana de propagación — presión de radiación 386
- Momento angular en una onda plana de propagación 389
- Ondas electromagnéticas en un medio homogéneo 391

7.5 Radiación de una carga puntual 391

- Ecuaciones de Maxwell con « términos fuente » 391
- Ley de Gauss y conservación del flujo de E 392
- Movimiento de la carga 392
- Campo de radiación 396
- Generalización a una carga puntual arbitraria no relativista 396
- Evitando la « superposición » 397
- Una vez conocido E , también lo es B 398
- Energía irradiada por una carga puntual 398
- Potencia instantánea total irradiada en todas las direcciones 399
- Una fórmula famosa para potencia irradiada 400

- Radiación y campos de « zona cercana » 401
- Definición de ángulo sólido 401
- Potencia irradiada dentro de un ángulo sólido diferencial $d\Omega$ 402
- Radiación dipolar eléctrica 402
- Ancho de línea natural para un átomo emisor de luz 403
- ¿Por qué el cielo es azul? 404
- Ley del cielo azul 405
- Sección transversal integrada para dispersión 406
- Sección transversal de dispersión clásica de Thomson 407

Problemas y experimentos caseros 407

Capítulo 7 Ondas en dos y tres dimensiones

7.1 Introducción

Prácticamente, todas las ondas que hemos considerado hasta ahora han sido “unidimensionales”. Esto es, han sido ondas que se propagaban según una línea recta, que usualmente llamamos eje z . En la Sección 7.2 introduciremos las ondas tridimensionales por rotación del sistema de coordenadas usado para describir una onda de propagación plana unidimensional. Así obtendremos la forma tridimensional de ondas de propagación armónicas planas. Veremos que hay alguna cosa más que debe tener dimensiones extras aparte de lo implicado por el cambio de variable. Se obtienen características cualitativamente nuevas porque las dimensiones extra dan lugar a nuevos grados de libertad. Por ejemplo, en tres dimensiones y en el vacío, se puede tener una onda electromagnética que es una onda de propagación pura en una dirección, una onda estacionaria pura en otra y ¡una onda exponencial en otra dirección! En una dimensión no es posible tener ondas electromagnéticas exponenciales en el vacío, debido a que la relación de dispersión $\omega^2 = c^2 k^2$ no puede tomarse $\omega^2 = -c^2 \kappa^2$ para algunos rangos de frecuencias. Para tener ondas exponenciales en una dimensión es necesaria una frecuencia de corte, o sea, una relación de dispersión como la de la ionosfera, $\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2$ que puede hacerse $\omega^2 = \omega_0^2 - c^2 \kappa^2$ para frecuencia suficientemente baja. En tres dimensiones encontraremos que k es la magnitud de un vector llamado vector de propagación. Por lo tanto, la relación de dispersión para ondas electromagnéticas en el vacío se hace $\omega^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$. Bajo ciertas circunstancias se puede tener uno o dos de los componentes k_x^2 , etc., reemplazando por $-\kappa_x^2$, etc., y seguir teniendo fuerza restauradora por unidad de desplazamiento por unidad de inercia, todavía positiva, como debe ser. Examinaremos como ejemplos las ondas electromagnéticas en guías de onda y la reflexión total de la luz. En la Sección 7.3 estudiaremos ondas de agua (para agua ideal) y encontraremos su dependencia espacial y ley de dispersión. (Hay varios experimentos caseros mediante los cuales podrá verificar fácilmente la relación de dispersión para ondas de agua.) La Sección 7.4 está dedicada a la demostración mediante las ecuaciones de Maxwell de lo aprendido en el Capítulo 4 cuando estudiamos ondas en líneas de transmisión de placas paralelas. En la Sección 7.5 deduciremos la radiación de una carga puntual oscilante. La usamos para encontrar el “ancho de línea natural” de la luz visible y la razón por la que el cielo es azul.

7.2 Ondas planas armónicas y el vector de propagación

Suponga que tenemos una *onda de propagación plana armónica* propagándose en un medio dispersivo homogéneo en la dirección del vector unitario \hat{z}' , a lo largo del eje $+z'$. Suponga que en el plano $z' = 0$ la función de onda tiene la dependencia temporal

$$\psi(z', t) = A \cos \omega t. \quad (1)$$

Entonces, en el plano dado por un valor de z' la función de onda está dada por

$$\psi(z', t) = A \cos (\omega t - kz'). \quad (2)$$

Deseamos expresar esta función de onda en términos de un sistema de coordenadas cartesianas general x, y, z , en lugar de hacerlo mediante la coordenada z' a lo largo de la dirección de propagación. Sea el origen de x, y, z ubicado en el plano $z' = 0$. Sea $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ un punto en el espacio visto desde el origen del sistema x, y, z . En el sistema x, y, z , se describe el plano $z' = \text{constante}$ mediante el plano $z' = \mathbf{r} \cdot \hat{z}' = \text{constante}$. En consecuencia, la cantidad kz' de la ecuación (2) puede escribirse

$$kz' = k(\hat{z}' \cdot \mathbf{r}) = (k\hat{z}') \cdot \mathbf{r} \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}. \quad (3)$$

Vector de propagación. La cantidad $k\hat{z}'$ se llama *vector de propagación* \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} \equiv k\hat{z}'. \quad (4)$$

La magnitud de \mathbf{k} es k , su dirección \hat{z}' , a lo largo de la propagación de la onda. La ecuación (3) queda

$$kz' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z. \quad (5)$$

El significado físico del número de onda k es el número de radianes de fase por unidad de desplazamiento a lo largo de la dirección de propagación, \hat{z}' , de manera que kz' es la fase acumulada en la distancia z' . (Estamos invirtiendo temporalmente nuestra convención de signos para fase; usualmente pensamos que la fase aumenta positivamente cuando ωt aumenta, para z' fija.) El significado de k_x es el número de *radianes de fase por unidad de desplazamiento a lo largo del eje $+x$* , o sea, a lo largo de \hat{x} , con significados similares para k_y y k_z . Por ejemplo, suponga que \hat{x} y \hat{z}' forman un ángulo θ . Suponga que la longitud de onda es λ . Entonces, si se avanza una distancia λ en la dirección \hat{z}' (en un tiempo fijo), la fase aumenta en 2π . Si, en cambio, se avanza según \hat{x} ,

se debe viajar a una distancia $\lambda/\cos\theta$ antes de que z' aumente en una longitud de onda. Entonces la fase ha aumentado en 2π en una distancia sobre \hat{x} que es mayor que λ en un factor $(\cos\theta)^{-1}$, o sea, el aumento de fase por unidad de distancia según \hat{x} es menor que k en un factor $\cos\theta$. De esta manera se supone debe comportarse un vector: si se toma la proyección $\mathbf{k} \cdot \hat{x} = k_x$ del vector sobre cierta dirección \hat{x} , se obtiene un número menor que el módulo del vector en un factor igual al coseno del ángulo apropiado. Esta condición asegura que la suma de los cuadrados de los componentes es igual al cuadrado del módulo. Así vemos que k_x tiene con k la relación exacta como para ser componente en x de un vector \mathbf{k} cuyo módulo es k .

¿Por qué no un vector longitud de onda? La última afirmación suena tan obvia como indigna de ser establecida. He aquí un ejemplo que demuestra que un requerimiento tan obvio es digno de ser comprobado. La velocidad de fase de una onda de propagación está dada por $v_\phi = \lambda\nu$. Cuando queremos describir en tres dimensiones una onda que se propaga en la dirección \hat{z}' , es una idea supuestamente buena definir un vector longitud de onda λ de la siguiente manera:

$$v_\phi = \lambda\nu\hat{z}' = (\lambda\hat{z}')\nu = \lambda\nu?$$

Se define la longitud de onda λ como distancia entre crestas de la onda para desplazamiento según z' , y es naturalmente el módulo del "vector" λ . Análogamente λ_x es la distancia entre crestas para desplazamiento según x . Pero, observe la horrible propiedad siguiente de λ_x : ¡es mayor que λ ! En consecuencia, si \hat{x} , es perpendicular a \hat{z}' , λ_x es infinita, a pesar de que debería ser nula si fuese la componente x de un vector común dirigido según \hat{z}' . La conclusión es que *no hay un vector λ que pueda ser definido de alguna manera sensible, puesto que no puede llamarse vector a algo que tenga "componentes" mayores que el módulo del vector.*

Plano de fase constante. La onda de propagación dada por la ecuación (2) puede ahora escribirse en las formas equivalentes

$$\begin{aligned}\psi(x,y,z,t) &= A \cos(\omega t - kz') \\ &= A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \\ &= A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).\end{aligned}\tag{6}$$

Al argumento de la función de onda sinusoidal se le llama *fase* $\phi(x,y,z,t)$:

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z,t) &= \omega t - kz' \\ &= \omega t - k_x x - k_y y - k_z z. \\ &= \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}.\end{aligned}\tag{7}$$

A un tiempo fijo t , los lugares con igual φ definen un plano llamado *frente de onda*

$$\begin{aligned} d\varphi &= \omega dt - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} \\ &= 0 - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{a tiempo fijo} \\ &= 0 \quad \text{sólo si } d\mathbf{r} \text{ es perpendicular a } \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (8)$$

Entonces, a un tiempo t fijado, la fase tendrá el mismo valor en todos los lugares alcanzados sumando vectores $d\mathbf{r}$ perpendiculares a la dirección de propagación, $\hat{\mathbf{k}}$, o sea $d\varphi = 0$ al pasar de uno de esos lugares a otro, lo que significa ir sobre un plano. Ésta es la razón por la que una onda de ese tipo es llamada onda plana.

Velocidad de fase. La velocidad de fase es igual a dz'/dt para φ fijo:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \omega dt - k dz' = 0, \\ v_\varphi &= \frac{dz'}{dt} = \frac{\omega}{k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Relaciones de dispersión en tres dimensiones. He aquí las formas tridimensionales de algunas de las relaciones de dispersión con las que ya estaba familiarizado:

Caso 1: Ondas electromagnéticas en el vacío

$$\omega^2 = c^2 k^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (10)$$

Caso 2: Ondas electromagnéticas en un medio dispersivo

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2} k^2 = \frac{c^2}{n^2} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (11)$$

Caso 3: Ondas electromagnéticas en la ionosfera

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 = \omega_p^2 + c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (12)$$

Las relaciones de dispersión son siempre independientes de las condiciones de contorno; éstas son, por supuesto, el factor determinante para decidir si uno tiene por ejemplo, ondas estacionarias, de propagación, o (como veremos) de tipo mixto.

Ondas estacionarias. Dos ondas de propagación planas viajando en direcciones opuestas y con la misma amplitud (y frecuencia) pueden ser superpuestas para formar una onda plana estacionaria de la forma

$$\psi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha). \quad (13)$$

Escribiendo $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, y usando identidades trigonométricas podemos escribir esta onda estacionaria como superposición de términos, cada uno de ellos de la forma general.

$$\psi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(k_x x + \alpha_1) \cos(k_y y + \alpha_2) \cos(k_z z + \alpha_3). \quad (14)$$

Cuando expresamos una onda armónica en términos de ondas estacionarias de la forma (14) podemos definir k_x, k_y, k_z como cantidades positivas. El motivo físico es que, en una onda estacionaria, las ondas no se propagan en una dirección definida, como lo hacen en una onda de propagación, sino que están “yendo en ambas direcciones simultáneamente”. Vemos algebraicamente que si (por ejemplo) k_x es negativa en la ecuación (14) podemos reemplazarla por $-k_x$ y reemplazar α_1 por $-\alpha_1$ sin afectar $\psi(x, y, z, t)$. Así, podemos hacer positivos a k_x, k_y y k_z y hacer cambios compensatorios (si es necesario) en las constantes de fase α_1, α_2 y α_3 .

Onda mixta estacionaria y de propagación. En una dimensión (por ejemplo, z') podemos tener onda pura de propagación, que podemos escribir como superposición de dos estacionarias. Análogamente podemos tener una onda estacionaria pura escrita como superposición de ondas de propagación. Alternativamente podemos tener una onda que es una superposición de tipo más general, ni pura de propagación ni estacionaria pura. La misma situación se presenta en tres dimensiones, pero con libertad agregada de que cada una de ellas es “independiente”, en el sentido de que podemos tener una onda que sea (por ejemplo) una constante según x , una onda estacionaria pura según y , y una onda de propagación pura según z :

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(y, z, t) = A \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t). \quad (15)$$

Más adelante encontraremos varios ejemplos de los tipos de ondas mixtas análogas a la ecuación (15).

Ecuaciones de ondas tridimensionales y la ecuación de ondas clásicas. Cualquier onda armónica sinusoidal tridimensional, ya sea estacionaria, de propagación o mixta satisface las siguientes relaciones (como puede fácilmente demostrar):

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(x, y, z, t),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k_y^2 \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k_z^2 \psi. \quad (16)$$

En consecuencia, encontraremos las siguientes ecuaciones de onda correspondientes respectivamente a las relaciones de dispersión dadas por las ecuaciones (10), (11) y (12):

Caso 1: Ondas electromagnéticas en el vacío

Usando las ecuaciones (16) y (10) encontramos que, para un único componente armónico, de frecuencia ω y número de onda k , las funciones de onda satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\}. \quad (17)$$

Puesto que c es independiente de la frecuencia, la ecuación de ondas (17) es satisfecha por toda componente armónica y, por lo tanto, por una superposición arbitraria de ondas electromagnéticas estacionarias y de propagación en el vacío. La ecuación (17) en la forma tridimensional de la *ecuación de ondas clásicas para ondas no dispersivas*. Una ecuación análoga se cumple para cualquier otra onda tridimensional no dispersiva — por ejemplo, para ondas comunes de sonido en aire. En notación vectorial, la parte derecha de la ecuación (18) es c^2 por la divergencia del gradiente de ψ , que se escribe $\text{div grad } \psi$ o $\nabla \cdot \nabla \psi$, algunas veces llamada $\nabla^2 \psi$, “nabla cuadrado psi”:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi. \quad (18)$$

Caso 2: Ondas electromagnéticas en un medio dispersivo homogéneo

La relación de dispersión ecuación (11) da, para una onda armónica de frecuencia ω , la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{n^2(\omega)} \nabla^2 \psi. \quad (19)$$

Puesto que n depende de la frecuencia ω , no se gana mucho escribiendo esta nueva ecuación. Para resolverla, necesitamos usualmente recurrir a superposiciones de Fourier y considerar una frecuencia por vez, de manera que podemos igualmente usar la relación de dispersión. La ecuación de ondas clásicas (18) es distinta en ese aspecto, es decir, se puede trabajar con pulsos u otras ondas no armónicas sin usar nunca análisis de Fourier.

Caso 3: Ondas electromagnéticas en la ionosfera

Usando la relación de dispersión ecuación (12) y la ecuación (16) encontramos la ecuación de ondas de Klein-Gordon en tres dimensiones

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \psi + c^2 \nabla^2 \psi. \quad (20)$$

Siguen algunos ejemplos físicos de ondas armónicas sinusoidales bidimensionales:

Ejemplo 1: Ondas electromagnéticas en una guía de ondas rectangular

Puede fabricarse una guía de ondas rectangular agregando placas conductoras laterales a una línea de transmisión de placas paralelas como se muestra en la Fig. 7.1. El espacio dentro de la guía de ondas está evacuado. Sólo consideraremos modos de onda en los cuales los campos eléctrico y magnético son independientes de x (para y y z fijos y x interior de la guía). La ecuación de ondas apropiada es la versión bidimensional de la ecuación de ondas clásica (17). Representando como ψ al campo eléctrico E_x , tenemos

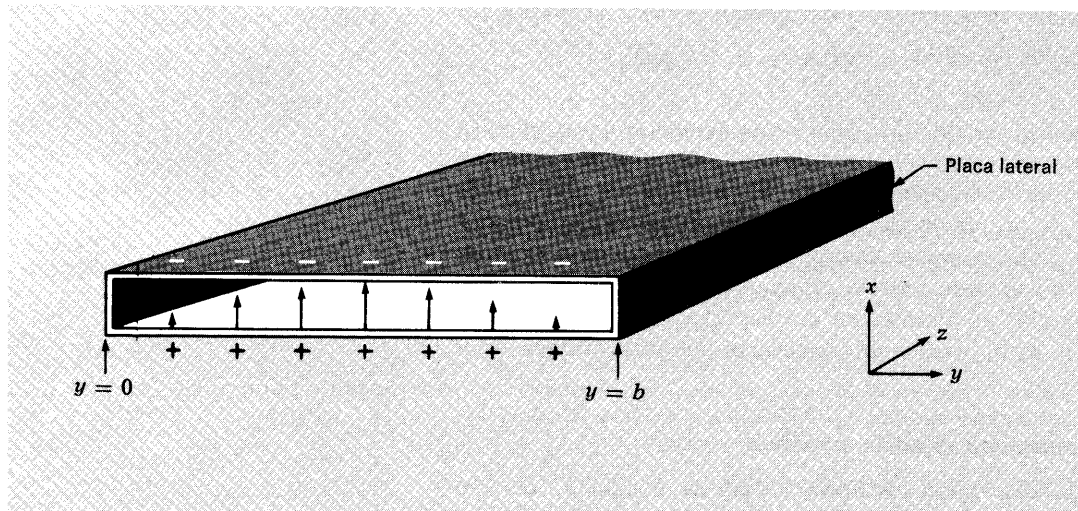
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (21)$$

Elegimos una frecuencia dada ω , de manera que la ecuación (21) queda

$$-\omega^2 \psi = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (22)$$

Fig. 7.1 Guía de ondas rectangulares hechas cortocircuitando una línea de transmisión de placas paralelas mediante el agregado de placas conductoras laterales en $y = 0$ e $y = b$. Las flechas representan el campo eléctrico instantáneo en el extremo de entrada de la guía.

Las placas conductoras laterales obligan al campo eléctrico E_x a anularse en $y = 0$ y $y = b$. Por consiguiente, $\psi(y, z, t)$ deben ser ondas estacio-



narias en la dirección y con nodos permanentes en $y = 0$ y b . Suponemos que hay un voltaje impulsor en $z = 0$. Por consiguiente, se propagan ondas electromagnéticas en la dirección $+z$ de la guía. Las ondas deben, por lo tanto, ser de propagación en la dirección z . La ecuación (22) es satisfecha por la onda mixta estacionaria y de propagación.

$$\psi(y, z, t) = A \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t). \quad (23)$$

supuesto que tenemos la relación de dispersión

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 + c^2 k_z^2. \quad (24)$$

Con nuestra elección de $\sin k_y y$, satisfacemos la condición $E_x = 0$ en $y = 0$. Sin embargo, también necesitamos que $\sin k_y y$ se anule en $y = b$:

$$k_y b = \pi, 2\pi, \dots, m\pi, \dots \quad (25)$$

Estas ondas se llaman modos ET (modos de campo eléctrico transversal). No nos es necesario estudiar el campo magnético separadamente, puesto que está determinado por el eléctrico.

Frecuencia del corte de baja frecuencia. Consideremos el modo más bajo, o sea el que tiene $m = 1$ en la ecuación (25). Ése es el modo diagramado en la Fig. 7.1, puesto que allí se muestra una semilongitud de onda desde $y = 0$ hasta b . Insertando la ecuación (25) en la (24) para $m = 1$, obtenemos

$$\omega^2 = \frac{c^2 \pi^2}{b^2} + c^2 k_z^2. \quad (26)$$

Por lo tanto, la relación de dispersión entre ω y k_z (para este modo con $k_y b = \pi$) es de apariencia análoga a la correspondiente a ondas planas propagándose en la dirección z en la ionosfera:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad (27)$$

o a la relación de dispersión para péndulos acoplados (en el límite de longitudes de onda largas)

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{K a^2}{M} k^2. \quad (28)$$

En consecuencia, esperamos que la cantidad $c^2 \pi^2 / b^2$ actúe como (el cuadrado de) una frecuencia de corte inferior y que, para frecuencia impulsora ω por debajo de este corte, la relación de dispersión ecuación (26)

$$\omega^2 = \frac{c^2 \pi^2}{b^2} - c^2 k_z^2. \quad (29)$$

se haga Esa conjetura es correcta. Para $\omega < \pi c/b$, la ecuación de ondas (21) tiene la solución

$$\psi(y, z, t) = A \operatorname{sen} k_y y \cos \omega t e^{-\kappa_z z} \quad (30)$$

supuesto que ω , k_y y κ_z están relacionados por

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 - c^2 \kappa_z^2, \quad (31)$$

que se satisface la ecuación (25) y que ω^2 es menor que $c^2 \pi^2/b^2$ (tomando $m = 1$), de manera tal que se satisface la ecuación (29) con κ_z^2 positivo. [Observe que podríamos haber incluido en la ec. (30) un término con $\exp(+\kappa_z z)$. Sin embargo, la condición de contorno de que la guía de onda se extienda hasta $z = +\infty$ requiere que el coeficiente de ese término sea nulo.]

Origen físico de la frecuencia de corte de guía de onda. Pensemos que la frecuencia es fija y el ancho b es variable. De acuerdo con la ecuación (26), si b es infinitamente grande, la relación de dispersión es la correspondiente a ondas electromagnéticas planas que se propagan en el vacío según la dirección z ; las ondas piensan que están en una línea de transmisión de placas paralelas. Para b finito, k_y (que es π/b) no es nulo. Por lo tanto, si queremos pensar que la función de ondas es una superposición de ondas de propagación planas (cosa que siempre estamos en libetrad de hacer, aun cuando tenemos una onda estacionaria pura), vemos que una disminución de b desde infinito a algo finito cambia la onda de una propagación pura viajando según $+\hat{z}$ a una superposición con un componente según \hat{y} no nulo del vector de propagación. Realmente, debemos tener ondas de propagación yendo en las direcciones $+\hat{y}$ y $-\hat{y}$ y superponiéndose para dar una onda estacionaria según \hat{y} . Las componentes de \mathbf{k} según más y menos \hat{y} son necesarias para satisfacer la condición de contorno introducida por las placas laterales conductoras. La *magnitud* de \mathbf{k} está siempre dada por la relación de dispersión para vacío,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + k_y^2. \quad (32)$$

En consecuencia, el aumento de los componentes en y desde cero hasta algún valor finito conducen necesariamente a una disminución en la componente z de \mathbf{k} . Por lo tanto, a medida que b decrece, los componentes en y van creciendo y en los en z decreciendo. En todo b fijo, la función de onda puede considerarse como una superposición de ondas planas entrelazándose con la guía y superponiéndose como para satisfacer la condición de contorno en las placas laterales (más físicamente, podemos decir que las corrientes generadas en una placa lateral por una

onda plana incidente generan una onda reflejada especularmente que vuelve en la dirección opuesta y). Vemos con esta imagen que, cuando b se hace suficientemente pequeña, la componente de \mathbf{k} según z se anula. Entonces, la onda va rebotando entre las placas laterales y no hay flujo de ondas a través del tubo. Esto nos dice que el período de corte $T_{c.o.}$ debe ser el tiempo que tarda una onda plana en ir de un lado a otro de la guía y volver, en el vacío, a una velocidad c :

$$T_{c.o.} = \frac{2b}{c}.$$

Entonces

$$\omega_{c.o.} = 2\pi\nu_{c.o.} = \frac{2\pi}{T_{c.o.}} = \frac{2\pi}{2b/c} = \frac{c\pi}{b}. \quad (33)$$

Por comparación de las ecuaciones (33) y (26), vemos que la (33) da, en efecto, la frecuencia de corte.

Para una frecuencia por debajo del corte, la amplitud de la onda decrece exponencialmente con el aumento de z , aun cuando las ondas están en el vacío. La razón física para la disminución del campo eléctrico es ésta: Con las placas laterales conductoras, las cargas en las placas superior e inferior pueden correrse a través de las laterales y anularse mutuamente. En la región en $z = 0$ la fuente de voltaje impulsora proporciona nueva carga y mantiene el campo eléctrico. Más lejos corriente abajo, la fuerza impulsora tiene menor influencia y, cuando la frecuencia es demasiado lenta, las cargas tienen tiempo de neutralizarse entre sí.

Ondas de propagación entrelazadas. La onda mixta estacionaria y de propagación de la ecuación (23) es equivalente a una superposición de ondas planas de propagación entrelazándose a lo largo de la guía. Puede verlo algebraicamente demostrando (Prob. 7.1) la identidad

$$\begin{aligned} \psi &= A \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t) \\ &= \frac{1}{2} A \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \frac{1}{2} A \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t), \end{aligned} \quad (34)$$

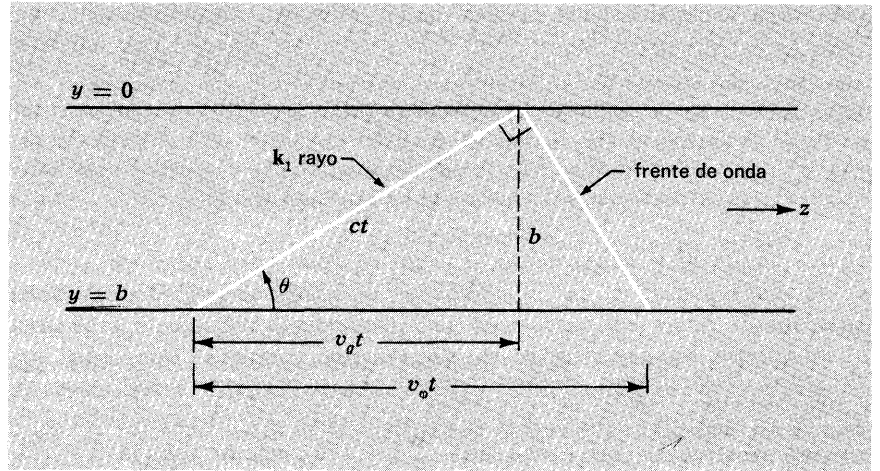
donde

$$\mathbf{k}_1 = \hat{z}k_z + \hat{y}k_y, \quad \mathbf{k}_2 = \hat{z}k_z - \hat{y}k_y.$$

El entrelazamiento reside en el hecho de que \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 tienen componentes en y opuestas.

Velocidad de fase, velocidad de grupo y c . La descripción de la onda de propagación entrelazada da una manera muy simple de ver las relaciones entre las velocidades de fase y de grupo. Considere una de las dos ondas de propagación superpuestas en la ecuación (34), como se muestra en la Fig. 7.2. Considere un pequeño trozo de frente de onda

Fig. 7.2 Una de las ondas entrelazadas en una guía de ondas.



(llamado “rayo en óptica”) que se propaga diagonalmente a través de la guía una distancia ct en un tiempo t , como se muestra en el rayo indicado como “ k_1 ” en la Fig. 7.2. Estamos interesados en la velocidad de fase y en la velocidad de grupo *en la dirección z* . (Sabemos que sólo en esa dirección hay una onda de propagación. El compañero k_2 de la onda k_1 mostrada cancela la parte y de la onda de propagación k_1 , pero tienen la misma parte z .) Mientras el rayo viaja una distancia ct , la intersección del frente de ondas con cualquier valor fijo de y (por ejemplo $y = b$) viaja la distancia indicada $v_\phi t$ en la figura. Esto da la velocidad de fase según z , esto es, la velocidad a la cual viaja según z la cresta de la onda. Observe que, cuando el ángulo θ (como está indicado en la Fig. 7.2) es de 90° , la velocidad de fase tiende a infinito. En general, vemos a partir de la figura, que tenemos

$$v_\phi = \frac{c}{\cos \theta}. \quad (35)$$

La velocidad de grupo es la velocidad de propagación de la energía según z . Si interrumpiéramos alternadamente el paso de la onda, un pulso se propagaría a la velocidad de grupo. El rayo marcado con k_1 llevaría un pulso a la velocidad c diagonalmente a través de la guía. La onda k_2 daría un pulso que cancele la parte y de la onda k_1 . Los pulsos k_1 y k_2 atraviesan una distancia $v_g t$ según z en el tiempo correspondiente a la distancia indicada en la Fig. 7.2. Vemos que tenemos

$$v_g = c \cos \theta. \quad (36)$$

Usando la relación de dispersión podríamos ahora verificar que v_ϕ y v_g , como vienen dadas por las ecuaciones (35) y (36), son correctas. En lu-

gar de esto daremos vuelta al problema y deduciremos la relación de dispersión, dadas las ecuaciones (35) y (36)

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\cos \theta},$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c \cos \theta.$$

Entonces

$$v_\varphi v_g = \frac{\omega}{k_z} \frac{d\omega}{dk_z} = c^2, \quad (37)$$

o sea,

$$\frac{d(\omega^2)}{d(k_z^2)} = c^2,$$

o sea

$$d(\omega^2) = c^2 d(k_z^2).$$

integrando da

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + \text{constante}. \quad (38)$$

La constante puede ser determinada haciendo $k_z = 0$, de manera que $\omega = \omega_c$ y requiriendo que el tiempo de “ida y vuelta” T_{ao} sea $2b/c$. Así obtenemos la ley de dispersión ecuación (26). Los modos más altos se obtienen haciendo que la frecuencia de corte sea una armónica de la frecuencia de corte más baja posible. Eso da el caso más general [ecs. (24 y (25))]

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + \frac{c^2 \pi^2 m^2}{b^2}. \quad (39)$$

Ejemplo 2: Reflexión y transmisión de luz incidente de vidrio a aire

Éste es otro ejemplo de onda bidimensional. Suponga que tenemos una porción de vidrio desde $z = -\infty$ hasta $z = 0$. En el plano $z = 0$ termina el vidrio y comienza el vacío que se extiende hasta $z = +\infty$. Se puede pensar que el vacío actúa siempre como medio dispersivo, como lo hace para ondas planas. Pero, como se ha visto en el ejemplo 1 (guía de onda rectangular), cuando no tenemos ondas planas (o sea, cuando E_x varía sobre el eje y y sobre el eje de propagación z), la guía de onda se hace reactiva bajo ciertas condiciones (espesor muy angosto o, lo que conduce a lo mismo, frecuencia muy baja), aun cuando todavía no tenga dentro más que vacío. Algo semejante ocurre para luz incidente desde vidrio a aire si el ángulo de incidencia se hace demasiado grande, o sea, a medida que la luz llega muy cerca de la incidencia rasante. Esto es de gran importancia práctica en el diseño de muchos

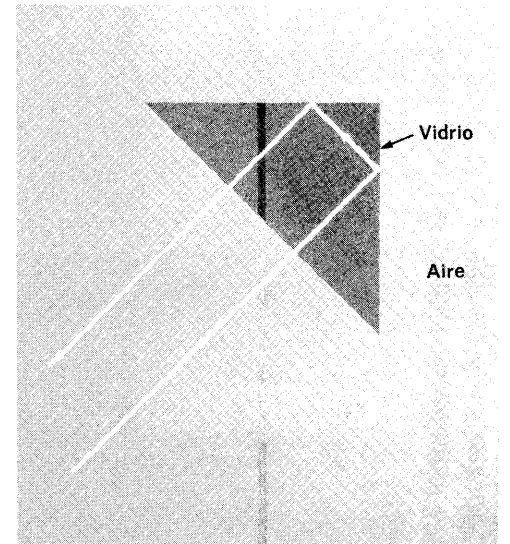


Fig. 7.3 Prisma retrodirector usado para desviar la luz 180° sin pérdida de intensidad.

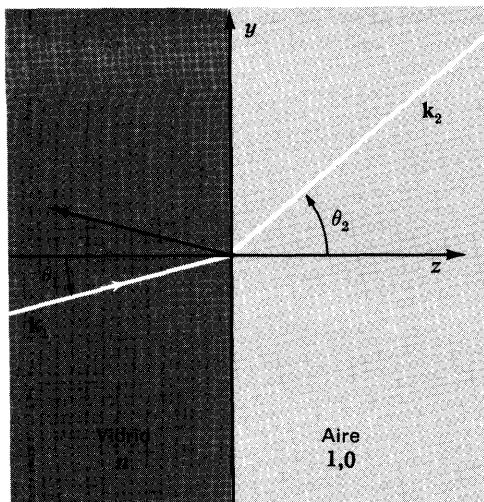


Fig. 7.4 Reflexión y transmisión del rayo incidente desde el vidrio hacia el vacío.

instrumentos ópticos que hacen uso de la reflexión total interna para obtener reflexión en 100 por ciento. Se muestra un ejemplo en la figura 7.3.

Veamos ahora cómo funciona. Las ondas luminosas satisfacen la ecuación de onda en cada medio: vidrio y vacío. (Estamos considerando una única frecuencia ω .) El contorno entre el vidrio y el vacío está en $z = 0$. El vector de propagación de la onda incidente, k_1 , tiene una componente k_z según \hat{z} , y k_y según \hat{y} . En consecuencia, tenemos un problema bidimensional (parecido a lo que hicimos para la guía de onda en el modo TE). Se muestra la geometría en la Fig. 7.4.

En el vidrio, la magnitud k_1 del vector de propagación k_1 es igual al producto del índice de refracción n por el módulo del vector de propagación en el vacío ω/c . El módulo k_2 de k_2 es ω/c :

$$k_2 = \frac{\omega}{c}, \quad k_1 = n \frac{\omega}{c}. \quad (40)$$

La relación de dispersión en el medio 2 (vacío, a la derecha de $z = 0$) es, en consecuencia,

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_2^2 = k_{2y}^2 + k_{2z}^2. \quad (41)$$

Posteriormente, exigimos que k_{2y} debe ser igual a k_{1y} . Esto se debe a que el significado de k_{1y} es 2π por el número de crestas por unidad de longitud según \hat{y} en el medio 1. Análogamente, k_{2y} es 2π veces el número de cresta por unidad de longitud según \hat{y} en el medio 2. Pero, a medida que se viaja según el eje y en $z = 0$, el número de crestas que se pasan dentro del vidrio debe ser el mismo que afuera, en el vacío. No se puede “perder” ninguna cresta por unidad de longitud según \hat{y} al pasar de vidrio a vacío. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} k_{2y} &= k_{1y} \\ &= k_1 \sin \theta_1 \\ &= n \frac{\omega}{c} \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (42)$$

donde la segunda igualdad es obvia a partir de la Fig. 7.4 y la tercera usa la ecuación (40). Insertando la ecuación (42) en la (41) da

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_1 + k_{2z}^2, \quad (43)$$

o sea, tenemos la relación de dispersión

$$k_{2z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 \theta_1). \quad (44)$$

Ángulo crítico para reflexión interna total. A medida que aumentamos el ángulo de incidencia θ_1 , la componente z del vector de propagación \mathbf{k}_2 se va haciendo más y más pequeña. Finalmente, alcanzamos un ángulo de incidencia para el que k_{2z} es nula. (Estamos suponiendo que n es mayor que la unidad, como por ejemplo, para luz visible en vidrio o agua.) Esto nos da el *ángulo de corte* también llamado *ángulo crítico de incidencia para reflexión total interna* o simplemente *ángulo crítico* θ_{crit} . De acuerdo con la ecuación (44), el ángulo crítico está dado por

$$\boxed{n \sin \theta_{\text{crit}} = 1.} \quad (45)$$

(Para vidrio de índice $n = 1,52$, esto da $\theta_{\text{crit}} = 41,2^\circ$.) A ángulo crítico de incidencia, el haz que emerge al vacío es tangencial a la superficie del vidrio.

Ley de Snell. Para ángulos θ_1 entre 0 y θ_{crit} el haz es parcialmente reflejado y parcialmente refractado al vacío. Entonces existe un ángulo θ_2 , como se dibuja en la Fig. 7.4 y la relación $k_{2y} = k_{1y}$ es equivalente a la *ley de Snell* (deducida por un método distinto en la Sec. 4.3):

$$k_{2y} = k_2 \sin \theta_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta_2,$$

$$k_{1y} = k_1 \sin \theta_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_1;$$

entonces $k_{2y} = k_{1y}$ da

$$\boxed{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.} \quad (46)$$

Reflexión interna total. Para ángulos de incidencia mayores que el crítico se obtiene la relación de dispersión a partir de la ecuación (44) reemplazando k_{2z}^2 por $-\kappa_{2z}^2 \equiv -\kappa^2$:

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} [n^2 \sin^2 \theta_1 - 1], \quad (47)$$

con

$$n \sin \theta_1 > 1.$$

Entonces la función de ondas (campo eléctrico o magnético) está dada en el medio 2 (vacío) por una onda que se propaga según y , pero que es exponencial según z :

$$\psi(y, z, t) = A \cos(\omega t - k_y y) e^{-\kappa z}, \quad (48)$$

donde κ está dada por la ecuación (47) y k_y es $k_1 \sin \theta_1 = n(\omega/c) \sin \theta_1$. La densidad de energía en promedio temporal es proporcional al cuadrado en promedio temporal de $\psi(y, z, t)$, esto es,

$$\text{Densidad de energía} \propto e^{-2\kappa z}. \quad (49)$$

Como aplicación de la ecuación (47) considere el prisma retrodirector mostrado en la Fig. 7.3. La luz incide internamente de vidrio a aire a un ángulo de incidencia $\theta_1 = 45^\circ$. Este ángulo excede al crítico $\theta_{\text{crit}} = 41,2^\circ$ (para índice del vidrio $n = 1,52$). Por lo tanto, el rayo es totalmente reflejado. La distancia media de decaimiento exponencial (de los campos que penetran en el vacío) está dada (para $\theta_1 = 45^\circ$) por

$$\begin{aligned} \delta = \kappa^{-1} &= \frac{c}{\omega} [n^2 \sin^2 \theta_1 - 1]^{-1/2} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{(1,52)^2}{2} - 1 \right]^{-1/2} = 0,4\lambda \end{aligned}$$

Por lo tanto, a una distancia de varias longitudes de onda dentro de la región “prohibida” (vacío) los campos son despreciables.

Se consigue una buena demostración de la reflexión total interna cuando se nada con una máscara facial (para poder ver debajo del agua). Con los ojos varias pulgadas por debajo de la superficie y mirando hacia arriba a la “parte de abajo” de la superficie, ésta aparece brillante con aspecto parecido a mercurio líquido. Esto es debido a que la línea de la visual excede el ángulo crítico. Entonces la superficie actúa como un espejo perfecto para la luz reflejada en los ojos.

Una forma más conveniente de observar reflexión total interna desde la parte inferior de una superficie de agua es mirar hacia la superficie al mismo tiempo que se mira a través del costado plano vertical de un recipiente transparente de vidrio o plástico.

Penetración de la luz a través de barreras. Si el vacío no se extiende hasta el infinito, sino que termina en otra plancha de vidrio, debemos incluir un segundo término en la ecuación (48) con una exponencial positiva, $\exp(+\kappa z)$. Entonces se tiene un problema típico de penetración de barreras.

D. D. Coon (estudiante graduado en la primavera de 1965) efectuó en Princeton[†] un bonito e ingenioso experimento que verifica la atenuación exponencial de la densidad de energía. A pesar de que su experimento es inherentemente mecanocuántico, verifica este resultado de la óptica clásica. Éste es uno de tantos resultados de la óptica clásica

[†] D. D. Coon, *Am. J. Phys.* **34**, 240 (1966).

que es retenido en la mecánica cuántica. (La óptica clásica es lo que hemos estado estudiando, toda vez que vimos ondas electromagnéticas de longitudes de onda llamadas “luz” en lugar de, digamos, “microondas.”) Coon dispuso dos prismas con una separación de aire variable, de manera que la luz (de la línea verde del mercurio) incidía sobre la separación a través de un prisma a un ángulo superior al crítico. La energía luminosa transmitida a través de la separación de aire al segundo prisma es proporcional a la densidad de energía en la superficie de este último. Ahora bien, la mecánica cuántica nos dice que la luz de frecuencia ω viene en unidades indivisibles llamadas fotones, cada uno con energía exactamente igual a $\hbar\omega$. Por lo tanto, para una ω dada, la densidad de energía es proporcional al número de fotones. Coon midió la densidad de energía contando fotones transmitidos en función del espacio de aire y verificó la dependencia exponencial prevista dada por la ecuación (49). Su experimento fue el primero en verificarlo a longitudes de onda de menos de 1 cm y el primero en verificarlo a cualquier longitud de onda detectando fotones individuales.

Con un prisma o cubo de vidrio se realiza fácilmente una demostración cualitativa de penetración de luz a través de barreras y del rápido decrecimiento de los campos de una onda luminosa con la distancia desde el vidrio dentro de la región “prohibida” de vacío (o aire). Mientras observe un lugar de la superficie totalmente reflector según su línea de visual, tóquelo suavemente con su dedo desde el lado opuesto de la superficie. El dedo será entonces invisible. Está en la región prohibida. Presione el dedo ajustadamente contra la superficie. Ahora lo verá en “impresión digital”. Las crestas de las espiras de su dedo hacen contacto íntimo con la superficie de vidrio totalmente reflectora y echan a perder la reflexión total. Los valles no llegan a tocar bien el vidrio y, por consiguiente, no evitan la reflexión total. Aparecen como espiras plateadas que separan las crestas. La profundidad de estos valles debe ser varias longitudes de onda, o sea, varias veces la profundidad de penetración media $\delta = k^{-1}$. Si los valles fueran más bajos que δ , los campos penetrarían la “barrera” entre vidrio y piel en un grado significativo e interactuarían con la piel echando a perder la reflexión total.

La anterior demostración sobre penetración de barreras puede realizarse usando un recipiente rectangular lleno de agua en lugar del prisma o cubo de vidrio.

7.3 Ondas de agua

Las ondas de agua se observan fácilmente. Ya las hemos visto desde la niñez en la bañera, lagos y mar. Indudablemente habrá experimentado un gran placer estético al observarlas en toda su belleza y complejidad. Deseamos ahora gozar del placer intelectual de entenderlas. Esa comprensión requiere simplicidad. Despreciaremos por lo tanto ciertas pro-

piedades del agua real. Por ejemplo, la viscosidad, que es resultado de la fricción interna. (El profesor Richard P. Feynman da a esta agua idealizada el excelente nombre de “agua seca”.) También nos restringiremos a ondas suaves de pequeña amplitud. ¡No queremos rompientes!

No obstante nuestras simplificaciones, aprenderemos la estructura geométrica y la relación de dispersión $\omega(k)$ para olas suaves. Puede verificar todos los resultados mediante sencillos experimentos caseros utilizando una caja de zapatos o una pecera. (Vea Exp. casero 7.11.)

En el equilibrio (o sea, cuando no hay ondas), la superficie de una porción de agua es plana y horizontal. Cuando está presente una onda, hay dos fuerzas restauradoras que tienden a aplanar las crestas de las ondas: *gravedad y tensión superficial*.

Debido a la gran incompresibilidad del agua, el exceso que aparece en la cresta de una ola debe afluir desde las regiones vecinas. Las gotas de agua individuales de una ola experimental, en consecuencia, un movimiento que es cierta combinación de movimiento longitudinal (a lo largo de la dirección de propagación de la ola) y transversal (de arriba abajo).

Si la profundidad de agua en equilibrio es pequeña respecto a la longitud de onda (de ondas armónicas), las ondas se denominan *ondas de agua superficiales* u *ondas de marea*. Sucede que la velocidad de propagación de estas ondas es independiente de la longitud de onda, pero depende de la *profundidad*.

Si la longitud de onda es pequeña en comparación con la profundidad del agua en equilibrio, tenemos las llamadas *ondas de agua profunda*. Las gotitas de agua individuales en una onda de propagación armónica de agua profunda no tienen ninguna traslación promedio. ¡Se mueven en círculos! Por ejemplo, un corcho flotante (o una gotita de agua en la superficie), experimenta un movimiento circular uniforme con radio igual a la amplitud de la onda armónica, y período igual al de dicha onda. En el mínimo de la depresión el corcho tiene su máxima velocidad hacia atrás; en una cresta tiene una velocidad de igual magnitud pero hacia adelante (con respecto a la dirección de propagación de la onda). Las gotas de agua por debajo de la superficie se trasladan en círculos más pequeños; el radio decrece exponencialmente con el aumento de profundidad y es despreciablemente pequeño a unas pocas longitudes de onda debajo de la superficie.

Ondas rectas. Consideremos ondas de agua con una única longitud de onda λ y con crestas y depresiones largas y rectas. Tales ondas se llaman *ondas rectas*. Son el análogo bidimensional de las ondas planas tridimensionales.

Suponga que tenemos un lago infinito de profundidad de equilibrio uniforme h . Cuando no hay olas, la superficie del agua es un plano que

llamamos plano $y = 0$. Las y positivas se miden verticalmente hacia arriba. Tomaremos la dirección de propagación de las olas según la dirección horizontal \hat{x} . Por lo tanto, las crestas y depresiones están según líneas perpendiculares a \hat{x} .

Designemos con x e y la *posición de equilibrio* de una gota dada de agua (No interesa adonde va esta gota en un movimiento ondulatorio, su posición de equilibrio sigue siendo x, y . La posición de equilibrio indica una gota dada y no nos dice dónde está cuando hay una onda.) La variable x va desde $-\infty$ hasta $+\infty$. La variable y varía entre $-h$ (fondo del lago) e $y = 0$ (superficie).

Cuando hay una ola, una gota dada experimenta un movimiento combinado de arriba abajo (según y) y hacia adelante y atrás (según x). Sea $\psi(x, y, t)$ el vector desplazamiento instantáneo respecto al equilibrio de la gota de posición de equilibrio x, y . En una onda de agua recta este vector tiene sólo componentes en x y en y :

$$\psi(x, y, t) = \hat{x}\psi_x(x, y, t) + \hat{y}\psi_y(x, y, t). \quad (50)$$

La velocidad instantánea \mathbf{v} de la gota con coordenadas de equilibrio x, y es la derivada parcial de ψ con respecto a t :

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial t} = \hat{x} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \hat{y} \frac{\partial \psi_y}{\partial t}. \quad (51)$$

Propiedades del agua ideal. En los siguientes párrafos examinaremos ciertas propiedades del agua ideal.

1. *Conservación de la masa.* Cuando estudié corrientes eléctricas (Vol. II, Sec. 4.2), encontré que la *conservación de la carga eléctrica* se expresaba por la *ecuación de continuidad*:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (52)$$

La ecuación (52) dice meramente que la razón por la cual cambia con el tiempo la densidad de carga ρ en un volumen infinitesimal es que fluye una corriente $\rho \mathbf{v}$ hacia afuera de la superficie que rodea el volumen. En el presente caso hacemos que ρ designe la densidad de masa del agua; entonces, la ecuación (52) expresa la conservación de la masa. Ahora bien, en una buena aproximación, *el agua es incompresible*. Por lo tanto, la densidad ρ es constante y entonces el miembro derecho de la ecuación (52) es nulo. Podemos también factorizar ρ del miembro izquierdo y descartarlo. Entonces usamos la ecuación (51) para expresar \mathbf{v} :

$$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v},$$

o sea,

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \psi),$$

o sea,

$$\nabla \cdot \psi = \text{constante.} \quad (53)$$

2. *Ausencia de burbujas.* La constante de la ecuación (53) sólo puede ser cero. De otra manera, de acuerdo con el teorema de Gauss, la integral de superficie de ψ sobre la superficie de una pequeña esfera no sería nula, lo que solamente significaría que tendríamos burbujas. Suponemos que no hay burbujas. Por lo tanto, hemos encontrado que el agua conservada, incompresible y sin burbujas satisface

$$\nabla \cdot \psi = \frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial y} = 0. \quad (54)$$

3. *Ausencia de vórtices.* En un vórtice, la integral curvilínea de la velocidad \mathbf{v} según un camino circular que encierra el vórtice, no se anula. En escala infinitesimal, la presencia de pequeños remolinos o vórtices implicaría (por la ley de Stokes) que el rotor de \mathbf{v} no es nulo. (Vea Vol. II, Secs. 2.15 hasta 2.18 para repasar el significado del rotor de un vector.) Suponemos que no hay vórtices. Por lo tanto suponemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \psi), \end{aligned}$$

o sea

$$\nabla \times \psi = \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi_y - \frac{\partial}{\partial y} \psi_x \right) = 0. \quad (55)$$

Ondas de agua estacionarias. Deseamos que nuestra intuición nos ayude a encontrar la forma de las ondas de agua sin usar demasiada álgebra. Debemos conseguir un acuario rectangular o un cierto recipiente. (Cualquier caja de cartón servirá durante unos diez minutos antes de romperse. Si se pinta el interior durará indefinidamente.) Llénela con 6 u 8 pulgadas de agua. Agítela fuertemente según x y trate de encontrar modos de apariencia sinusoidal. Encontrará que el modo más bajo es parecido a la Fig. 7.5.

Si agita algunos granos de café podrá ver el movimiento del agua. Notará que todos los granos de café están en reposo al mismo tiempo y que el desplazamiento x e y será cero al mismo tiempo. Eso es lo

que esperamos para un modo normal, o sea, para una onda estacionaria: Todos los grados de libertad ("partes móviles") oscilan en fase. Por lo tanto, podemos suponer que, para oscilaciones suficientemente pequeñas, la dependencia temporal de ψ_x y ψ_y está dada por una oscilación armónica con la misma constante de fase, o sea, que la dependencia temporal está dada por un factor común $\cos \omega t$.

Supongamos luego que la dependencia de x para el desplazamiento vertical ψ_y es la de una onda estacionaria sinusoidal. Si el aspecto de los modos es similar al mostrado en la Fig. 7.5, ψ_y tiene un nodo en $x = 0$. En consecuencia, ψ_y contiene el factor $\sin kx$ (en lugar de $\cos kx$). Podemos entonces escribir

$$\psi_y(x, y, t) = \cos \omega t \sin kx f(y), \quad (56)$$

donde $f(y)$ es una función de y todavía desconocida.

Condiciones de contorno en las paredes. ¿Cuál es la dependencia de ψ_x respecto a x ? En los extremos del tanque, una gota sólo puede moverse de arriba abajo. No puede abandonar la pared. Por lo tanto, los lugares donde tiene sus máximos (en las paredes) son lugares donde ψ_y tiene nodos. Por lo tanto debemos tener $\cos kx$ para ψ_x , donde tenemos $\sin kx$ para ψ_y :

$$\psi_x(x, y, t) = \cos \omega t \cos kx g(y), \quad (57)$$

donde $g(y)$ es una función de y todavía desconocida.

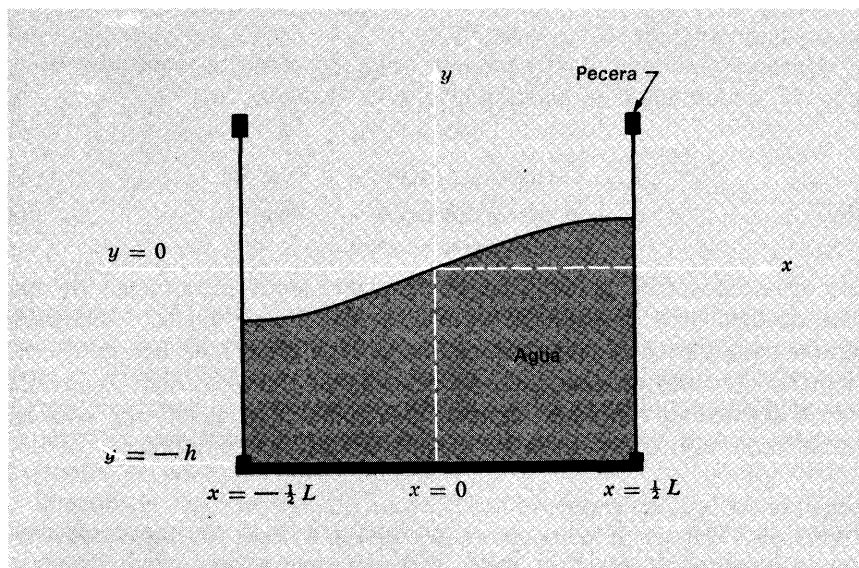


Fig. 7.5 Modo sinusoidal más bajo en una pecera rectangular.

Relación entre movimientos horizontal y vertical. Utilicemos ahora los hechos que div y rot de ψ son nulos. Entonces podrá demostrar fácilmente que las ecuaciones (56) y (57) dan

$$\nabla \cdot \psi = 0: \quad -kg(y) + \frac{df(y)}{dy} = 0; \quad (58)$$

$$\nabla \times \psi = 0: \quad \frac{dg(y)}{dy} - kf(y) = 0. \quad (59)$$

Podemos eliminar $g(y)$ de las ecuaciones (58) y (59) diferenciando (58) respecto de y usando luego (59) para eliminar dg/dy . Eso da

$$\frac{d^2f}{dy^2} = k^2f, \quad (60)$$

que tiene la solución general

$$f(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}. \quad (61)$$

Entonces obtenemos $g(y)$ de la ecuación (58):

$$g(y) = Ae^{ky} - Be^{-ky}. \quad (62)$$

Condiciones de contorno en el fondo. Finalmente ponemos la condición de contorno de que en el fondo del lago no hay movimiento vertical de gotas de agua (éstas no pueden abandonar el fondo). La condición $\psi_y = 0$ en $y = -h$ es equivalente a $f(y) = 0$ en $y = -h$. Entonces la ecuación (61) da $B = -Ae^{-2kh}$.

Nuestro resultado final para una onda estacionaria sinusoidal en un lago de profundidad en el equilibrio h es entonces

$$\psi_y = A \cos \omega t \sin kx (e^{ky} - e^{-2kh}e^{-ky}), \quad (63)$$

$$\psi_x = A \cos \omega t \cos kx (e^{ky} + e^{-2kh}e^{-ky}). \quad (64)$$

Las ecuaciones (63) y (64) dan el desplazamiento instantáneo de una gota de agua con posición *de equilibrio* x, y . Como puede demostrarse fácilmente a partir de estas ecuaciones, el movimiento de una gota dada (o grano de café) en una onda de agua estacionaria consiste en oscilaciones armónicas a lo largo de una línea recta en el plano xy . También puede verse esto observando los granos de café en su tanque.

Ondas de aguas profundas. Si la profundidad h es enorme comparada con la longitud de onda, el factor e^{-2kh} es esencialmente nulo, y pode-

mos despreciar el segundo término en $f(y)$ y $g(y)$. En ese caso las ecuaciones (63) y (64) quedan

$$\psi_y = A \cos \omega t \sin kx e^{ky}, \quad (65)$$

$$\psi_x = A \cos \omega t \cos kx e^{ky}. \quad (66)$$

Vemos que las ondas son sinusoidales en la dirección x y exponenciales en la dirección y . La longitud de atenuación de amplitud δ es $1/k$, que es igual a $\lambda/2\pi$. Esta última cantidad, llamada *longitud de onda reducida*, se designa por el símbolo λ ("lambda barra"). Entonces, para ondas de aguas profundas tenemos

$$f(y) = e^{ky} = e^{-k|y|} = e^{-|y|/\lambda}, \quad (67)$$

la longitud de atenuación de amplitud para una onda de aguas profundas es igual a la longitud de onda reducida. En consecuencia, la amplitud de oscilación de una gota de agua cuya posición de equilibrio está a una longitud de onda por debajo de la superficie es menor que la de una gota en la superficie en un factor de $e^{-2\pi} \approx 1/500$. Vemos que la profundidad de agua en el equilibrio sólo necesita ser del orden de una longitud de onda para que el movimiento ondulatorio en el fondo sea esencialmente despreciable y, en consecuencia, la aproximación de "onda de aguas profundas" sea excelente.

Ondas de aguas superficiales. Por onda de aguas superficiales entendemos aquella para la que la profundidad de equilibrio h es pequeña comparada con la profundidad de atenuación λ . En ese caso, podemos aproximar la dependencia de ψ_x y ψ_y respecto de y reteniendo solamente los primeros términos interesantes en el desarrollo en serie de Taylor de $f(y)$ y $g(y)$. Por lo tanto, podemos demostrar fácilmente que, para $h \ll \lambda$, las ecuaciones (63) y (64) quedan

$$\psi_y = 2A \cos \omega t \sin kx [k(y + h)], \quad (68)$$

$$\psi_x = 2A \cos \omega t \cos kx. \quad (69)$$

Vemos que para una onda de aguas superficiales el movimiento horizontal ψ_x es independiente de la posición vertical de equilibrio de la gota de agua y . El movimiento vertical ψ_y varía linealmente con la profundidad de la gota, siendo nulo en el fondo y máximo en la superficie. Allí, el máximo movimiento vertical es menor que el máximo horizontal en un factor $h/\lambda \ll 1$.

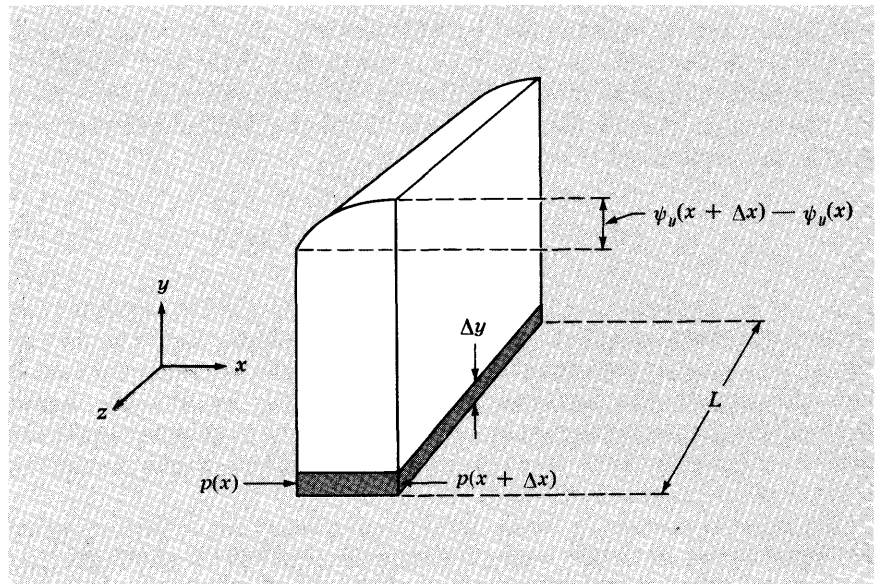
En nuestro modelo de "agua ideal" hemos despreciado el rozamiento del agua contra el fondo rugoso. Para ondas de aguas profundas esta omisión carece de importancia. Para ondas de aguas superficiales la

fricción es importante, como puede ver fácilmente si excita ondas estacionarias de aguas superficiales en una fuente rectangular (como en el Exp. casero 7.11). Notará que los granos de café son barridos de las regiones de máxima velocidad horizontal y se acumulan en las regiones donde está es siempre nula, o sea, en los máximos de movimiento vertical. Otra aproximación residió en nuestro desprecio por la fricción “interna” en el líquido, la viscosidad. Si desea ver el efecto de la viscosidad, intente repetir alguno de los experimentos caseros usando aceite en lugar de agua.

Relación de dispersión para ondas de agua gravitacionales. Hemos aprendido la estructura geométrica de ondas de agua (ideales), pero seguimos ignorando la relación entre la “forma” (longitud de onda y profundidad) y la frecuencia. Esto se debe a que no hemos dicho nada acerca de las fuerzas restauradoras que actúan sobre el agua en las ondas. (Repetimos que la fuerza restauradora por unidad de desplazamiento por unidad de masa es ω^2 . Este resultado es muy general y se cumple para ondas de agua armónicas tanto como para cualquier otra onda armónica.)

Cuando estudiamos modos en el Cap. 1, aprendimos que en un modo todas las partes móviles tienen el mismo valor de ω^2 ; podemos encontrar la relación entre la frecuencia y forma del modo considerando el movimiento de un único grado de libertad de una parte móvil, una vez conocida la forma del modo. En el problema presente la forma está

Fig. 7.6 Fuerza restauradora gravitacional según x en un elemento de volumen sombreado experimenta una fuerza proporcional a la diferencia de presión $p(x + \Delta x) - p(x)$. Esto es proporcional a la diferencia de altura de agua $\psi_y(x + \Delta x) - \psi_y(x)$.



dada por las ecuaciones (63) y (64). En consecuencia sólo necesitamos considerar el movimiento según x (o y) de una única gota de agua. Elegimos considerar el movimiento según x de un volumen infinitesimal de agua situada muy cerca de la superficie.

Considere un volumen minúsculo que, en el equilibrio, se extiende una pequeña distancia Δx según la dirección de propagación x , una distancia L a lo largo de la dirección "no interesante" z , y una pequeña distancia vertical Δy . Las dimensiones Δx y Δy se suponen minúsculas comparadas con la longitud de onda. La fuerza restauradora sobre este volumen según x es igual al área $L\Delta y$ del costado de este volumen multiplicada por la diferencia entre las presiones sobre las dos caras situadas (en el equilibrio) en x y $x + \Delta x$. Esta diferencia de presión está dada por el producto entre ρg (densidad por aceleración de la gravedad) y la diferencia en altura de agua en las dos caras, o sea, la diferencia en ψ_y en las dos caras, como se muestra en la Fig. 7.6. Esta diferencia está dada esencialmente por el producto de la derivada de ψ_y respecto de x por la separación Δx entre las dos caras. Así, encontramos

$$\begin{aligned}
 F_x &= -L \Delta y [p(x + \Delta x) - p(x)] \\
 &= -L \Delta y \rho g [\psi_y(x + \Delta x) - \psi_y(x)] \\
 &= -L \Delta y \Delta x \rho g \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\
 &= -(\Delta M) g \left[\frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right]_{y=0}
 \end{aligned} \tag{70}$$

donde $\Delta M \equiv \rho L \Delta y \Delta x$ es la masa de agua en el elemento de volumen. Esta fuerza produce una aceleración en la dirección x , $\partial^2 \psi_x / \partial t^2$, que es igual a $-\omega^2 \psi_x$, puesto que se trata de movimiento armónico. Por consiguiente, la segunda ley de Newton para la aceleración de la masa ΔM es

$$F_x = (\Delta M) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2},$$

lo que da [usando la ec. (70) para F_x]

$$(\Delta M) g \left[\frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right]_{y=0} = (\Delta M) \omega^2 [\psi_x]_{y=0}. \tag{71}$$

Usemos ahora ψ_y y ψ_x tal como vienen dadas por las ecuaciones (63) y (64). Entonces, la ecuación (71) da

$$\boxed{\omega^2 = gk \frac{(1 - e^{-2kh})}{(1 + e^{-2kh})}}. \tag{72}$$

La ecuación (72) es la relación de dispersión buscada. En los interesantes casos límites de ondas gravitacionales de aguas profundas y superficiales, la relación de dispersión y las velocidades de fase correspondientes se obtienen fácilmente de la ecuación (72) y son

$$\text{Aguas profundas: } \omega^2 = gk, \quad v_\varphi = \sqrt{g\lambda}, \quad (73)$$

$$\text{Aguas superficiales: } \omega^2 = gk(h/\lambda), \quad v_\varphi = \sqrt{gh}. \quad (74)$$

Por lo tanto, las ondas gravitacionales de aguas superficiales son no dispersivas. Las ondas gravitacionales de aguas profundas son dispersivas: la velocidad de fase se duplica cuando la longitud de onda se cuadruplica.

Ondas de tensión superficial. Al deducir la ley de dispersión, ecuación (72), despreciamos la contribución de la tensión superficial a la fuerza restauradora. Para un elemento dado de volumen de agua desplazada, esa contribución es proporcional a T (constante de tensión superficial) multiplicada por la curvatura de la superficie. La curvatura es proporcional a k^2 . Por lo tanto, la contribución de la tensión superficial es proporcional a Tk^2 . La contribución gravitacional es proporcional al peso Mg , o sea, a ρg . En consecuencia, podríamos pensar que la contribución relativa de la tensión superficial y la gravedad a ω^2 es proporcional a la relación adimensional $Tk^2/\rho g$. Eso es correcto. (Véase Problema 7.33.)

Ondas de agua de propagación. Le haremos demostrar (Prob. 7.31) que la forma de las ondas de agua de propagación es

$$\psi_y = A \cos(\omega t - kx)(e^{ky} - e^{-2kh}e^{-ky}), \quad (75)$$

$$\psi_x = A \sin(\omega t - kx)(e^{ky} + e^{-2kh}e^{-ky}). \quad (76)$$

Partiendo de las ecuaciones (75) y (76), puede fácilmente demostrar que, para ondas de propagación de aguas profundas, una determinada gota de agua viaja en círculo en el plano xy yendo hacia adelante cuando está en una cresta y hacia atrás cuando se halla en un valle. Para una profundidad de agua general h , la gota de agua se mueve en elipse. Este movimiento elíptico es análogo al movimiento circular encontrado en una onda de propagación de agua profunda excepto en que el círculo está "aplanado" entre la superficie superior y el fondo de la cubeta (o lago, u océano). Por lo menos ése es el caso si la fricción en el fondo es despreciable. Si no lo es, el agua viaja en forma relativamente fácil hacia adelante (sobre las crestas), pero roza contra el fondo, cuando trata de ir hacia atrás, en las depresiones. El resultado es que el agua es más llevada hacia adelante en las crestas, que hacia atrás en las

depresiones y hay una traslación neta de agua. Cuando es éste el caso, las olas están prontas a “romper” (o están “rompiendo”). Por lo tanto, las rompientes en la playa llevan agua consigo. (El flujo de retorno es la “resaca”.) Un buceador a piel desnuda nadando a lo que considera una distancia prudencial de una playa rocosa (sobre la que no le gustaría ir a parar) puede estar en un aprieto (por lo menos yo lo estuve) cuando se le acerca una ola de longitud de onda excepcionalmente grande.

7.4 Ondas electromagnéticas

En esta sección usaremos las ecuaciones de Maxwell para dar demostraciones generales de varias cosas que ya conocemos habiendo estudiado líneas de transmisión de placas paralelas. En consecuencia, “fortaleceremos nuestra base” al mismo tiempo que nos prepararemos para una mejor comprensión de las ondas electromagnéticas en el espacio tridimensional.

Ecuaciones de Maxwell para el vacío. Están dadas por (véase Vol. II, página 264).

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \nabla \times \mathbf{B} \quad (77a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} \quad (77b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (77c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (77d)$$

Ecuación de ondas clásicas para ondas electromagnéticas en el vacío. Encontraremos una ecuación diferencial en derivadas parciales para \mathbf{E} eliminando \mathbf{B} de las ecuaciones (77a) a (77d). Comenzamos diferenciando la (77a) respecto de t . Luego usamos la ecuación (77b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= c \nabla \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= c \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= c \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= c \nabla \times (-c \nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (77e)$$

Se puede demostrar [ecuación (39) del Apéndice] que para todo vector \mathbf{C}

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{C}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{C}. \quad (78)$$

Sustituyendo \mathbf{E} por \mathbf{C} en la ecuación (78) y usando el hecho de que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ [ec. (77c)], obtenemos de la ecuación (77e)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y, z, t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E}(x, y, z, t). \quad (79a)$$

Esta ecuación vectorial consiste en tres ecuaciones en derivadas parciales separadas:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_x; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_y; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_z. \quad (79b)$$

Por lo tanto, E_x , E_y y E_z satisfacen la ecuación de ondas clásica para ondas no dispersivas [ver ec. (18), Sec. 7.2]. Análogamente, se puede eliminar \mathbf{E} de las ecuaciones de Maxwell y obtener la ecuación de ondas clásica para las tres componentes de \mathbf{B} (Prob. 7.12).

Ondas electromagnéticas planas en el vacío. Una onda electromagnética *plana* consiste en campos magnético y eléctrico, $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ y $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ dependientes de las coordenadas y del tiempo que tienen las siguientes propiedades

1. Hay una única dirección de propagación que tomaremos a lo largo de \hat{z} . (Las ondas pueden ser cualquier combinación de ondas estacionarias o de propagación.)
2. Ninguna de las componentes de \mathbf{E} o \mathbf{B} depende de las coordenadas transversales x e y .

Por lo tanto, tenemos

$$\mathbf{E} = \hat{x}E_x(z, t) + \hat{y}E_y(z, t) + \hat{z}E_z(z, t) \quad (80)$$

$$\mathbf{B} = \hat{x}B_x(z, t) + \hat{y}B_y(z, t) + \hat{z}B_z(z, t). \quad (81)$$

Por supuesto que el hecho de *tener* ondas planas tiene algo que ver con el origen de las ondas, cómo han sido producidas, etc. Ahora no estamos interesados en las fuentes. Nos limitamos a suponer que las ondas provienen de algún lugar y tienen la forma de las ecuaciones (80) y (81).

Las ondas electromagnéticas planas son transversales. Apliquemos las ecuaciones de Maxwell a las ecuaciones (80) y (81). Primero usamos la ley de Gauss, que dice que $\text{div } \mathbf{E}$ es $4\pi\rho$. En el vacío ρ es cero. También, puesto que ninguno de los componentes depende de x o y , las derivadas parciales respecto de x o y dan cero. Así, tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_z(z,t)}{\partial z} = 0, \quad (82)$$

lo que significa que E_z es independiente de z . Que E_z es también independiente de t puede verse considerando la ecuación de Maxwell de la “corriente de desplazamiento”,

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \nabla \times \mathbf{B}. \quad (83)$$

Consideremos la componente z de la ecuación (83). El lado derecho contiene $\partial B_y/\partial x$ y $\partial B_x/\partial y$, ambas nulas. Por lo tanto, $\partial E_z/\partial t$ es cero. Concluimos que E_z es una constante. Por simplicidad, la consideramos nula. (De esta manera no perdemos generalidad. Estamos usando meramente el principio de superposición para “apagar” todo campo constante que ya entendemos. Siempre podemos agregarlo si la ocasión lo requiere.)

Análogamente, el hecho de tener $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ nos dice que $B_z(z,t)$ no depende de z . Que tampoco depende del tiempo se ve considerando la componente z de la ley de Faraday:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}, \quad (84)$$

lo cuál dice que $\partial B_z/\partial t$ se anula. En consecuencia, a pesar de que puede haber ciertos campos magnéticos estacionarios debidos a grandes corrientes estacionarias en algunos lugares, éstos no tienen dependencia espacial o temporal y no son de interés actual para nosotros. Por lo tanto, tomamos B_z nulo (usando nuevamente el principio de superposición).

Hasta ahora hemos llegado a la conclusión de que (aparte de campos constantes no ondulatorios) *las ondas electromagnéticas planas son transversales*. Esto es, los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación \hat{z} .

Acoplamiento de E_x y B_y . Nos quedamos con E_x , E_y , B_x y B_y , y las hasta ahora no usadas componentes en x e y de las ecuaciones (83) y

(84). La componente x de la ecuación (83) y la componente y de la ecuación (84) dan

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (85)$$

Análogamente, la componente y de la ecuación (83) y la componente x de la (84) dan

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z}. \quad (86)$$

De acuerdo con las ecuaciones (85) E_x y B_y no son independientes. Están “acopladas” por ecuaciones en derivadas parciales lineales y de primer orden, las ecuaciones (85). De modo que si, por ejemplo, E_x es constante en el espacio y el tiempo, también lo es B_y . Por otro lado, si E_x se conoce completamente como función de z y t , entonces, como demostraremos, B_y está también completamente determinada (aparte de campos constantes que no nos interesan). Análogamente, de acuerdo con las ecuaciones (86), E_y y B_x están acopladas. Si se conoce E_y , está determinada B_x : Si E_y es nula, B_x es cero (o constante).

Polarización lineal y elíptica. Los campos E_x y E_y no están acoplados por las ecuaciones de Maxwell (para las ondas planas que estamos considerando). Son “independientes”. Eso significa que es posible producir (mediante una fuente radiante adecuada) ondas electromagnéticas con E_x distinto de cero pero con E_y nulo para todo z y t . En ese caso, se dice que las ondas están *linealmente polarizadas* según \hat{x} . El campo eléctrico E_x y el campo magnético B_y son los únicos campos no nulos (o más bien, no constantes). Análogamente podemos tener ondas electromagnéticas linealmente polarizadas según \hat{y} donde E_y y B_x son los únicos campos no nulos. También podemos tener cualquier combinación de E_x y E_y con (en el caso de una frecuencia única) una fase relativa arbitraria entre E_x y E_y . Entonces tenemos un estado de polarización general, llamado *polarización elíptica*. Estudiaremos polarización en el Capítulo 8.

Habría notado que las ecuaciones (86) relacionan E_y y *menos* B_x de la misma manera que las ecuaciones (85) relacionan E_x y B_y . El signo menos puede ser un “rompecabezas” al comienzo. Sin embargo, como puede fácilmente demostrarse, si tiene ondas linealmente polarizadas con E_x y B_y ambos positivos (en un instante dado) y rota los ejes coordenados en 90° , de manera de colocar el nuevo eje y según el campo eléctrico, entonces el nuevo eje x estará según la *negativa* del campo magnético (Prob. 7.34). En consecuencia, las ecuaciones (86) son físicamente equivalentes a las (85). Eso significa que no estaremos perdiendo nada si nos limitamos a estudiar las consecuencias de la ecuación (85).

De ahora en adelante, supondremos que únicamente tenemos el estado de polarización lineal correspondiente a E_x y B_y no nulos correspondiente a las ecuaciones (85). Será más sencillo si consideramos en primer término una onda armónica que se propaga en la dirección $+z$. Luego veremos cómo obtener el resultado equivalente para una onda armónica pura que se propaga en la dirección $-z$. Una superposición de éstas con amplitudes y constantes de fase arbitrarias es entonces la solución más general para una frecuencia dada e incluye, como caso especial, ondas estacionarias puras.

Onda de propagación armónica. Suponga que E_x está dada por

$$E_x = A \cos(\omega t - kz). \quad (87)$$

Entonces las ecuaciones (85) y la relación $\omega = ck$ dan

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\omega}{c} A \sin(\omega t - kz) = \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (88)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -c \frac{\partial E_x}{\partial z} = -ckA \sin(\omega t - kz) = \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (89)$$

De acuerdo con las ecuaciones (88) y (89) la variación de B_y con respecto a z y t es la misma que la de E_x . Por lo tanto vemos que, en una onda armónica plana que se propaga en la dirección $+z$, B_y y E_x son iguales aparte de constantes aditivas no interesantes que “superponemos a cero”.

Si consideramos una onda armónica que se propaga en la dirección $-z$, hallamos que B_y es la negativa de E_x como puede fácilmente verse reemplazando k por $-k$ en las ecuaciones de más arriba. En las siguientes ecuaciones de resumen están incluidas ambas direcciones de propagación

$$\text{Onda progresiva: } \begin{cases} |\mathbf{E}(z,t)| = |\mathbf{B}(z,t)|, \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{v}}. \end{cases} \quad (90)$$

Onda armónica estacionaria. Suponga que E_x está dada por

$$E_x(z,t) = A \cos \omega t \cos kz. \quad (91)$$

Le dejamos para demostrar (Prob. 7.36) que

$$B_y(z,t) = A \sin \omega t \sin kz = E_x(z - \frac{1}{4}\lambda, t - \frac{1}{4}T). \quad (92)$$

Vemos, a partir de las ecuaciones (91) y (92), que en una onda plana estacionaria electromagnética en el vacío \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares entre sí, y respecto a z , tienen la misma amplitud y están desfasados 90° tanto en el espacio como en el tiempo. (Este comportamiento es similar al de la presión y la velocidad en una onda acústica estacionaria, o al de la tensión transversal y la velocidad en una onda estacionaria en una cuerda.)

Flujo de energía en una onda plana. La densidad de energía del campo electromagnético en el vacío está dada por

$$\text{Densidad de energía} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (93)$$

(Esta expresión fue dada para campos estáticos en el Vol. II, págs. 102 y 256, y puede demostrarse que se cumple por lo general.) Estamos interesados en la energía de toda combinación lineal de ondas planas estacionarias y de propagación. En particular, nos interesa el flujo de energía. Obtengamos, en consecuencia, una expresión para la energía en un volumen infinitesimal que tiene un área A perpendicular al eje z y espesor infinitesimal Δz en la dirección z . (Luego examinaremos el grado de variación de esta energía con el tiempo.) La energía $W(z,t)$ en este elemento de volumen es el producto de la densidad de energía por el volumen $A\Delta z$:

$$W(z,t) = \frac{A \Delta z}{8\pi} (E_x^2 + B_y^2). \quad (94)$$

Diferenciando $W(z,t)$ respecto del tiempo t se obtiene

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} = \frac{A \Delta z}{4\pi} \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} \right). \quad (95)$$

Ahora usamos las ecuaciones de Maxwell (85) para eliminar $\partial E_x/\partial t$ y $\partial B_y/\partial t$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(z,t)}{\partial t} &= -\frac{Ac \Delta z}{4\pi} \left(E_x \frac{\partial B_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{Ac \Delta z}{4\pi} \frac{\partial (E_x B_y)}{\partial z} \\ &= -\frac{Ac \Delta z}{4\pi} \left[\frac{(E_x B_y)_{z+\Delta z} - (E_x B_y)_z}{\Delta z} \right]. \end{aligned} \quad (96)$$

El último paso corresponde, en el límite de Δz infinitesimal, a la definición de derivada parcial de $E_x B_y$ con respecto a z (a tiempo fijo); o

sea, evaluamos la cantidad $E_x B_y$ en las posiciones z y $z + \Delta z$, substraemos un resultado del otro, dividimos por Δz y tomamos el límite cuando Δz tiende a cero. De este modo hemos encontrado que el grado de variación de energía en el volumen $A\Delta z$ está dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial W(z,t)}{\partial t} &= \frac{c}{4\pi} E_x(z,t) B_y(z,t) - \frac{c}{4\pi} E_x(z + \Delta z, t) B_y(z + \Delta z, t) \\ &= S_z(z,t) - S_z(z + \Delta z, t), \end{aligned} \quad (97)$$

donde

$$\begin{aligned} S_z(z,t) &\equiv \frac{c}{4\pi} E_x(z,t) B_y(z,t) \\ &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_z. \end{aligned} \quad (98)$$

Por lo tanto, el grado de variación de energía en el elemento de volumen $A\Delta z$ es el valor de una cantidad. $AS_z(z,t)$ evaluado en z , extremo izquierdo del intervalo, menos el valor de esta misma cantidad en $z + \Delta z$, extremo derecho del intervalo. La cantidad $S_z(z,t)$ debe ser, en consecuencia, la variación instantánea del flujo de energía por unidad de área en la dirección $+z$, en el punto z . El aumento de energía en el elemento de volumen (si lo hay) resulta de la diferencia entre la entrada (desde la izquierda) y la salida (hacia la derecha). La componente z , $S_z(z,t)$, del *vector flujo* \mathbf{S} se define como la variación de flujo de energía en la dirección $+z$ por unidad de área (en erg/cm² seg) en z,t . (Por supuesto que ésa es la única dirección de flujo de energía en nuestro problema, puesto que elegimos \hat{z} como dirección de propagación.)

Vector de Poynting. La forma general del vector flujo es

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}}, \quad (99)$$

que es independiente de la elección de coordenadas. El vector flujo \mathbf{S} es llamado también *vector de Poynting*.

Densidad y flujo de energía en una onda de propagación. Para una onda linealmente polarizada que se propaga en la dirección $+z$, podemos tomar $\mathbf{E} = \hat{x}E_x$ y $\mathbf{B} = \hat{y}B_y$, con $B_y = E_x$ para todo z,t . Así (con E_0 en statvol/cm)

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos(\omega t - kz), \\ B_y &= E_0 \cos(\omega t - kz), \end{aligned} \quad (100)$$

$$\text{Densidad de energía} = \frac{1}{8\pi}(E_x^2 + B_y^2) = \frac{1}{4\pi}E_0^2 \cos^2(\omega t - kz), \quad (101)$$

$$\text{Flujo de energía} = S_z = \frac{c}{4\pi}E_x B_y = \frac{c}{4\pi}E_0^2 \cos^2(\omega t - kz). \quad (102)$$

Observe que el flujo de energía S_z (en erg/cm² seg) para una onda de propagación es simplemente la densidad de energía (en erg/cm³) multiplicada por la velocidad de la luz (en cm/seg).

El flujo de energía medio temporal (con z fijo) es igual al promedio espacial del flujo de energía (a t fijo). Ambos son independientes de z y de t y se obtienen reemplazando $\cos^2(\omega t - kz)$ en la ecuación (102) por su valor promedio $\frac{1}{2}$.

Densidad y flujo de energía en una onda estacionaria. Para una onda estacionaria tenemos.

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos \omega t \cos kz, \\ B_y &= E_0 \sin \omega t \sin kz. \end{aligned} \quad (103)$$

Las densidades de energía eléctrica y magnética tienen sus máximos en tiempos separados por $1/4$ de período y en posiciones separadas por $1/4$ de longitud de onda. Le dejaremos para demostrar (Prob. 7.36) que, en cualquier región de longitud $1/4\lambda$, la energía total es constante. La energía en el campo eléctrico oscila armónicamente alrededor de su valor promedio a una frecuencia 2ω , entre los valores extremos cero y el doble del promedio. Lo mismo ocurre con la energía en el campo magnético. Por lo tanto, la energía oscila desde puramente eléctrica, con densidad de energía máxima en un lugar, hasta puramente magnética, con densidad máxima en otro lugar alejado del anterior en $1/4\lambda$. Esto es, en cierto modo, parecido al comportamiento de un oscilador armónico: La energía total del oscilador es constante pero es alternativamente energía potencial pura con la masa en un lugar y energía cinética pura con la masa en otro lugar. La energía potencial y la cinética oscilan armónicamente alrededor de sus valores promedio a una frecuencia 2ω , donde el factor 2 proviene del hecho que la energía potencial es grande y positiva dos veces cada ciclo de oscilación (lo mismo que la energía cinética). El campo eléctrico E_x en una onda estacionaria es, en cierto modo, análogo al desplazamiento del equilibrio de la masa de un oscilador armónico, mientras que el campo magnético B_y guarda cierta analogía con la velocidad de la masa.

Flujo de momento lineal en una onda plana de propagación - presión de radiación. Si un haz de radiación electromagnética es absorbido sin reflexión (por una terminación perfecta, por ejemplo), cediendo, en consecuencia, una cantidad de energía W al absorbente, también le cede

momento en la dirección de propagación. Se observa que la cantidad de momento es W/c . Si el haz es reflejado 180° por un espejo (sin ninguna absorción) éste adquiere un momento $2 W/c$ en la dirección de propagación. Por lo tanto, la radiación empuja objetos que la absorben o que la reflejan. Este empuje se llama *presión de radiación*. Toda cantidad de energía W en una onda plana electromagnética de propagación tiene una cantidad de momento P dada por

$$\mathbf{P} = \frac{W}{c} \hat{\mathbf{z}}, \quad (104)$$

donde $\hat{\mathbf{z}}$ está en la dirección de propagación.

Usando la idea de que la luz en una onda de propagación está “envuelta” dentro de paquetes llamados *fotones*, se obtiene una deducción sencilla de la ecuación (104). Un fotón es como una “partícula” de masa en reposo nula. Una partícula relativista con masa en reposo M y momento P tiene una energía W dada por

$$W = [(cP)^2 + (Mc^2)^2]^{1/2}. \quad (105)$$

Si M es cero, se obtiene la ecuación (104).

La deducción anterior es pequeña y tal vez engañosa. El hecho que la radiación electromagnética aparezca “cuantificada”, en el sentido de que sólo puede entregar energía en “trozos” cuantificados de magnitud $\hbar\omega$, no tiene realmente nada que ver con la presión de radiación, o sea, nada que ver con la ecuación (104). Por consiguiente, debiéramos poder dar una deducción puramente clásica de la ecuación (104), sin usar la idea de fotones o “partículas”, y lo haremos ahora. (Deberá estudiar los aspectos cuánticos de la luz en el Vol. IV.)

Considere una partícula de carga q , sobre la que actúa una onda plana de propagación. Tome q positiva, y suponga que la partícula deja la posición de reposo en $t = 0$. La fuerza \mathbf{F} sobre la partícula está dada por la fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}. \quad (106)$$

Al principio (por ejemplo, durante las primeras oscilaciones), la magnitud de velocidad \mathbf{v} es pequeña. Por lo tanto, el movimiento de la carga se debe principalmente a \mathbf{E} . Entonces \mathbf{v} está en la dirección de \mathbf{E} e invierte su sentido junto con \mathbf{E} . Pero \mathbf{B} se invierte siempre que lo hace \mathbf{E} . De modo que $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ tiene siempre el mismo signo. La fuerza sobre q debida a \mathbf{B} está, en consecuencia, siempre en la dirección de propagación, dirección de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Por lo tanto, la carga q experimenta un movimiento que es una superposición de una oscilación transversal a

la frecuencia de los campos, más una velocidad lentamente creciente en la dirección de propagación. Demostraremos ahora que la rapidez promedio temporal con que la carga adquiere momento según z es $1/c$ veces la rapidez promedio temporal con que la carga absorbe energía de la onda de propagación. (La carga no mantiene la energía que absorbe. Si está en un trozo de tela espacial que termina perfectamente, entonces está transfiriendo energía continuamente a través del esfuerzo resistivo que actúa sobre la carga. Si está en el espacio libre, irradia energía continuamente en todas las direcciones. La cantidad de energía irradiada en la dirección de la onda incidente es despreciable, de manera que una cantidad insignificante de la energía absorbida es devuelta a la onda.)

He aquí la deducción. Nuestra "onda de propagación standard" tiene $\mathbf{E} = \hat{x}E_x$, $\mathbf{B} = \hat{y}B_y$, y $B_y = E_x$. La velocidad \mathbf{v} de la partícula cargada está dada por $\mathbf{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$. Reemplazando estos valores en la ecuación (106) y utilizando $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{y} = 0$ y $\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$, obtenemos

$$\mathbf{F} = \hat{x}qE_x + \frac{q}{c}\dot{x}B_y\hat{z} - \frac{q}{c}\dot{z}B_y\hat{x}. \quad (107)$$

Ahora tomamos el promedio temporal de la ecuación (107) sobre un ciclo. El primer término $\hat{x}qE_x$ se promedia a cero. Lo mismo ocurre con el último, que contiene $\dot{z}B_y$. Eso se debe a que podemos suponer que el incremento de velocidad según z durante un ciclo es despreciable, o sea, podemos considerar que la velocidad lentamente creciente \dot{z} es constante durante un ciclo. Entonces el campo B_y se anula en promedio sobre un ciclo. El término restante $(q/c)\dot{x}B_y\hat{z}$ no se anula en promedio puesto que la velocidad transversal \dot{x} oscila con la misma rapidez que B_y . En consecuencia tenemos (recordando que la fuerza es la derivada del momento respecto del tiempo) que el promedio temporal (denotado con paréntesis angulares $\langle \rangle$) es

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right\rangle = \hat{z} \frac{q}{c} \langle \dot{x}B_y \rangle. \quad (108)$$

Consideremos ahora la rapidez con que la onda de propagación realiza trabajo sobre la carga. La rapidez instantánea de realizar trabajo sobre q está dada por

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \left(q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \\ &= q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + 0 \\ &= q\dot{x}E_x. \end{aligned}$$

Promediando sobre un ciclo se obtiene

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = q \langle \dot{x} E_x \rangle. \quad (109)$$

Comparando las ecuaciones (108) y (109) y usando el hecho de ser $B_y = E_x$ (para una onda de propagación) vemos que

$$\left\langle \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right\rangle = \hat{z} \frac{1}{c} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle. \quad (110)$$

Por lo tanto, durante un intervalo de tiempo en el que los electrones le quitan a la onda una energía W , también le quitan un momento $\hat{z}(W/c)$. No es posible extraer la energía W sin extraer el momento $\hat{z}(W/c)$. Esto es equivalente a decir que la radiación tiene un momento dado por la ecuación (104). La presión de radiación solar se discute en los Problemas 7.13, 7.14 y 7.15.

Momento angular en una onda plana de propagación. Mostraremos que una onda plana de propagación puede transferir no sólo energía y momento lineal a la carga q , sino también momento angular. Para hacerlo tiene que forzar a la carga a describir un movimiento circular. Obviamente, esto no ocurrirá en el caso del campo “linealmente polarizado” que hemos estado considerando. Ocurre si los campos están “circularmente polarizados”. Consideremos una onda que se propaga en la dirección $+\hat{z}$ con un campo eléctrico \mathbf{E} que tiene magnitud constante y rota (a z fijo) con velocidad angular ω alrededor del eje z , siendo su sentido según $+\hat{z}$ tal como lo da la regla de la mano derecha para rotación. En consecuencia, E_x y E_y son funciones armónicas del tiempo (a z fijo), y E_x está adelantado en fase respecto a E_y en 90° . El campo magnético \mathbf{B} está dado (como siempre para ondas de propagación) por $\mathbf{B} = \hat{z} \times \mathbf{E}$. Puesto que el campo eléctrico impulsa a la carga q y el magnético la hace doblar, podemos suponer que, en estado estacionario, q está viajando en una circunferencia a velocidad angular ω con el mismo sentido de rotación que los campos. (La carga q también se desplaza lentamente en la dirección $+\hat{z}$ debido a la presión de radiación que ejerce sobre ella la onda de propagación. Esto podemos despreciarlo.) En consecuencia, las posiciones de los campos y de la posición \mathbf{r} y velocidad \mathbf{v} de la partícula son como se muestra en la Fig. 7.7. Observe que $\omega \mathbf{r}$ tiene la misma magnitud que \mathbf{v} y que las direcciones relativas de $\omega \mathbf{r}$ y \mathbf{v} son como las indicadas.

El impulso rotativo τ sobre la carga q es igual a $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. En consecuencia (multiplicando por ω) vemos que

$$\begin{aligned} \omega \tau &= \omega \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \omega \mathbf{r} \times q\mathbf{E} + \omega \mathbf{r} \times \frac{q}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (111)$$

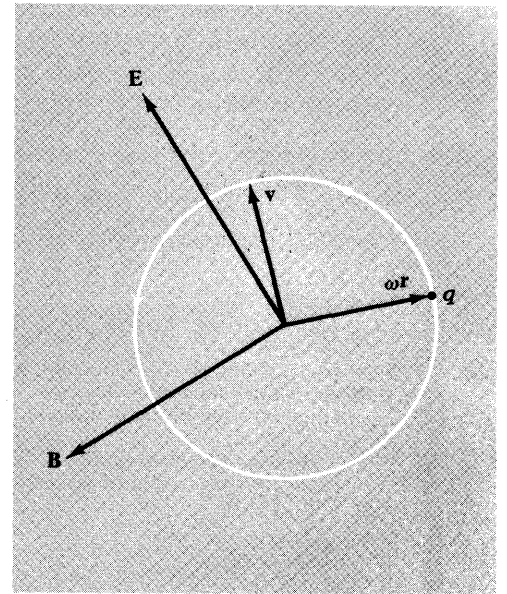


Fig. 7.7 La luz circularmente polarizada fuerza a la carga q en un recorrido circular. \hat{z} está hacia fuera del papel.

Promediamos este impulso sobre un ciclo. De la Fig. 7.7 vemos que $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ tiene dirección paralela a $\hat{\mathbf{z}}$ y, por lo tanto, $\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ tiene la dirección de $-\mathbf{v}$. Puesto que cada componente de \mathbf{v} se promedia a cero en un ciclo, vemos que el campo magnético no realiza ninguna contribución neta al impulso promediado en tiempo. Vemos también de la Fig. 7.7 que $\omega \mathbf{r} \times \mathbf{E}$ está en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ y tiene la misma magnitud algebraica que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$. Por lo tanto, está dado por

$$\omega \mathbf{r} \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (112)$$

En consecuencia, el impulso rotatorio sobre q , en promedio temporal, dado por la ecuación (111) es

$$\langle \tau \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{J}}{dt} \right\rangle = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\omega} \langle q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\omega} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle, \quad (113)$$

en donde usamos los hechos de que el impulso rotatorio es la rapidez de cambio temporal del momento angular \mathbf{J} y de que $q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ es la rapidez de realización de trabajo sobre q . De acuerdo con la ecuación (113), una carga que absorbe una cantidad de energía W de una onda plana de propagación circularmente polarizada cuyo sentido de rotación es según $+\hat{\mathbf{z}}$, también absorbe un momento angular \mathbf{J} dado por

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{z}} \frac{W}{\omega}.$$

Una manera de expresar mejor este resultado es usar el vector unitario $\hat{\omega}$ para la dirección de rotación, que puede estar en la dirección $+\hat{\mathbf{z}}$ o $-\hat{\mathbf{z}}$. Así, el resultado es que una onda plana de propagación circularmente polarizada lleva un momento angular

$$\mathbf{J} = \hat{\omega} \frac{W}{\omega},$$

(114)

donde ω está en la misma dirección o bien en dirección opuesta a la de propagación.

Como aprenderemos en el Capítulo 8, puede considerarse a una onda plana de propagación circularmente polarizada de amplitud A , como superposición de dos ondas planas de propagación circularmente polarizadas cada una de las cuales tiene amplitud $1/2 A$, pero sentidos de rotación opuestos. En consecuencia, no lleva momento angular.

Como estudiará en el Vol. IV, las ondas de propagación electromagnéticas planas sólo transfieren energía en trozos “cuantificados” de

energía $\Delta W = \hbar\omega$. De acuerdo con la ecuación (114), tal onda debe transferir una cantidad correspondientemente cuantificada de momento angular $\Delta J = \hbar\omega$ cuando es absorbida (o emitida). Es importante darse cuenta que la ecuación (114) se cumple solamente para ondas planas de propagación. En consecuencia, se cumple a una distancia suficientemente grande de una “fuente puntual” irradiante.

Se ve que si se envía luz circularmente polarizada “dextrógira” a través de una “placa de retardo de media onda” se invertirá a “levógira”. Esto da un impulso rotativo de rechazo a la placa, puesto que ésta debe procurar (por rechazo) el *doble* del momento angular dado por la ecuación (114). Esto se discute en el Prob. 8.19.

Ondas electromagnéticas en un medio homogéneo. Hemos usado las ecuaciones de Maxwell para estudiar las ondas electromagnéticas planas en el vacío. En el Tema suplementario 9 usamos esas ecuaciones para estudiar ondas electromagnéticas en un medio homogéneo no vacío. Entonces obtenemos el resultado

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu, \quad (115)$$

donde ϵ es la constante dieléctrica y μ la permeabilidad magnética. Este resultado es el mismo que el obtenido en la Sección 4.3, considerando las ondas electromagnéticas en una línea de transmisión de placas paralelas. [ec. (4.66).]

7.5 Radiación de una carga puntual

En esta sección encontraremos los campos eléctrico y magnético en las ondas que se *propagan esféricamente hacia fuera* emitidas por una carga puntual oscilante. Los resultados nos ayudarán a entender las propiedades de la radiación electromagnética emitida por átomos, radioemisoras y estrellas, y también nos dirán por qué el cielo es azul.

Ecuaciones de Maxwell con “términos fuente”. Debemos usar las ecuaciones de Maxwell completas que incluyen los “términos fuente” que dan las contribuciones de cargas y corrientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (116)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (117)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (118)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (119)$$

Ya hemos hecho uso de estas cuatro ecuaciones para el vacío (donde ρ y \mathbf{J} son nulos). Así encontramos (en la Sec. 7.4) que \mathbf{E} y \mathbf{B} obedecen la ecuación de ondas clásicas para ondas no dispersivas que se propagan con la velocidad c . Más aún, ya hemos encontrado las relaciones entre \mathbf{E} y \mathbf{B} a distancias grandes de la fuente debido a que podemos suponer que, en regiones suficientemente alejadas de la fuente, las ondas son indistinguibles de las ondas planas (si no tratamos de correlacionar los campos en un lugar con los campos en otro lugar muy alejado). Sólo resta utilizar los términos fuente en las ecuaciones de Maxwell para encontrar cómo las ondas irradiadas dependen del movimiento de la fuente. Ahora bien, hay dos “fuentes” en las ecuaciones de Maxwell. Una es la densidad de carga ρ , la otra es la densidad de corriente \mathbf{J} . Estas dos “fuentes” no son independientes, están relacionadas por la *conservación de la carga*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (120)$$

[Puede verificar fácilmente la ecuación (120) usando las (116) y (119) y el hecho de ser $\nabla \cdot \nabla \times \nabla = 0$. [Véase Vol. II, ec. (4.9).] Por consiguiente, no necesitaremos usar \mathbf{J} explícitamente, puesto que impondremos automáticamente la conservación de la carga al seguir el movimiento de la carga puntual q . De este modo, la corriente estará implícitamente presente sin que tengamos que ocuparnos de ella. Podemos concentrarnos en el efecto de la carga tal como lo da la ecuación (116).

Ley de Gauss y conservación del flujo de E . La ecuación (116) es equivalente a la *ley de Gauss*. (Véase Vol. II, Secs. 1.10 y 2.10.) Para una carga puntual en reposo, la ley de Gauss [o la ec. (116)] da el familiar campo de la inversa del cuadrado (Vol. II, Sec. 1.11),

$$\mathbf{E} = q \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (121)$$

donde $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, es el vector de desplazamiento de un punto dado de observación respecto a la carga q . Para una carga en movimiento podemos utilizar el concepto de líneas de fuerza y la *conservación del flujo* de \mathbf{E} (que equivale a la conservación de la carga). (Véase Vol. II, Secs. 5.3 y 5.4.)

Movimiento de la carga. Usaremos ahora la ley de Gauss para encontrar el campo de radiación emitida por una carga puntual que experimenta el siguiente movimiento: La carga positiva, q está en reposo en el origen de un sistema de referencia inercial desde el tiempo $t = -\infty$ hasta $t = 0$. En $t = 0$, es acelerada en la dirección $+x$ con una aceleración constante a durante un corto intervalo Δt . Antes de $t = 0$, el campo

eléctrico está dado en todo lugar del sistema inercial por la ecuación (121); el campo magnético es nulo. Las líneas de fuerza de \mathbf{E} están dirigidas hacia afuera desde la posición de q durante todo ese tiempo. La repentina aceleración en $t = 0$ crea “desviaciones” en las líneas de fuerza de \mathbf{E} y crea líneas de \mathbf{B} . Éstas se propagan hacia fuera de la fuente a una velocidad c . (¡En esta fase usamos todas las ecuaciones de Maxwell!) Sólo estamos tratando de hallar los campos a una distancia grande; por consiguiente únicamente necesitamos encontrar \mathbf{E} . (Nuestros resultados para ondas planas nos darán entonces \mathbf{B} .)

Considere un tiempo t , grande comparado con Δt . En posiciones cuyas distancias al origen r , sean mayores que ct , las “noticias” sobre la aceleración no han llegado todavía (o sea, no ha llegado la desviación). En posiciones con r menor que $ct - \Delta t$, la desviación ya ha pasado, y el campo eléctrico es el debido a una carga que se mueve con velocidad constante v . Este campo tiene una dirección que apunta hacia afuera respecto de la “posición actual” de la carga q . El campo eléctrico en un punto de observación fijo situado a una distancia r' de la posición instantánea de una carga q que se mueve con velocidad uniforme v está deducido en el Vol. II, Sec. 5.6. La dirección de este campo en el punto de observación está sobre la línea que lo une con la posición instantánea de la carga. La magnitud de este campo eléctrico está dada por

$$E = \frac{q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (122)$$

donde $\beta = v/c$ y θ es el ángulo entre la dirección de la velocidad \mathbf{v} y la dirección desde la posición instantánea de q al punto de observación fijo. Solamente nos ocuparemos de situaciones donde v es muy pequeña comparada con c . (Éste es el caso de emisión de luz visible por átomo, en donde v/c es del orden de $1/137$.) Entonces, como muy buena aproximación podemos poner $\beta = 0$ en la ecuación (122).*

Así tenemos el simple resultado de que, para una carga que se mueve con velocidad uniforme $v \ll c$, el campo eléctrico en un punto de observación distante es

$$\mathbf{E}' = q \frac{\hat{\mathbf{r}}'}{r'^2}, \quad (123)$$

donde $\mathbf{r}' = r'\hat{\mathbf{r}}'$ es el vector desplazamiento desde la posición instantánea de q respecto al punto de observación fijo.

Estamos interesados en el campo eléctrico en la desviación que se propaga hacia fuera con la velocidad de la luz. Podemos encontrarlo

* El caso general para v arbitrario ($v \leq c$) está dado por J. R. Tessman y J. T. Finnell, Jr., *Am. J. Phys.* **35**, 523 (1967).

usando la ley de Gauss en un instante dado para “unir” el campo inmediatamente por encima de la desviación [dado por la ec. (121)] con el que está justo por debajo [dado por la (123)] de tal manera que el flujo de \mathbf{E} (su integral de superficie) se conserve. (Ver Vol. II, Sec. 5.7.)

Consideremos ahora un tiempo t grande en comparación con la duración Δt de la aceleración. Entonces, podemos despreciar la distancia a $\frac{1}{2}a(\Delta t)^2$ que ha atravesado la carga en el tiempo Δt comparada con la distancia mucho más grande, vt , que ha atravesado a velocidad constante. Consideremos un punto de observación cuyo vector desplazamiento \mathbf{r} respecto del origen forma un ángulo θ con la velocidad \mathbf{v} . Se elige el tiempo t de modo que la desviación comience a barrer el punto de observación al tiempo t . De este modo, $r = ct$. Consideremos ahora \mathbf{r}' en la cola de la desviación. Puesto que $v \ll c$, la carga ha atravesado una distancia vt muy pequeña en comparación con $r = ct$. Por consiguiente, la dirección de $\hat{\mathbf{r}}'$ es esencialmente paralela a la dirección de $\hat{\mathbf{r}}$. La distancia r' está, por lo tanto, dada por

$$r' = r - vt \cos \theta = r \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) \approx r, \text{ dado que } \frac{v}{c} \ll 1. \quad (124)$$

Se muestra la geometría en la Fig. 7.8.

Sean E_{\perp} y E_{\parallel} las magnitudes de las componentes de \mathbf{E} que son respectivamente perpendicular y paralela a la dirección de propagación $\hat{\mathbf{r}}$, donde \mathbf{E} es el campo eléctrico en el espacio ocupado por la desviación. La conservación del flujo eléctrico implica continuidad de las líneas de fuerza. Por consiguiente, la relación entre la componente transversal (perpendicular) E_{\perp} y la componente longitudinal (paralela) E_{\parallel} se obtiene por simple inspección de la Fig. 7.8. El triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la línea de fuerza de \mathbf{E} en la desviación y cuyos catetos son E_{\perp} y E_{\parallel} es semejante al triángulo rectángulo con catetos de longitud $v_{\perp}t$ y $c\Delta t$. Así, por inspección de la Fig. 7.8 vemos que

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{v_{\perp}t}{c\Delta t}, \quad (125)$$

o, puesto que v_{\perp} es $a_{\perp} \Delta t$ y t es r/c

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{(a_{\perp} \Delta t)(r/c)}{c\Delta t} = a_{\perp} \frac{r}{c^2}, \quad (126)$$

donde a_{\perp} es la magnitud de la componente transversal de la aceleración \mathbf{a} .

Todavía necesitamos conocer E_{\parallel} , componente longitudinal de \mathbf{E} dentro de la desviación. Lo encontramos aplicando la ley de Gauss al pequeño volumen con forma de paquete de pastillas mostrado en la Fig. 7.9; allí dentro no hay carga, de modo que el flujo eléctrico entrante debe

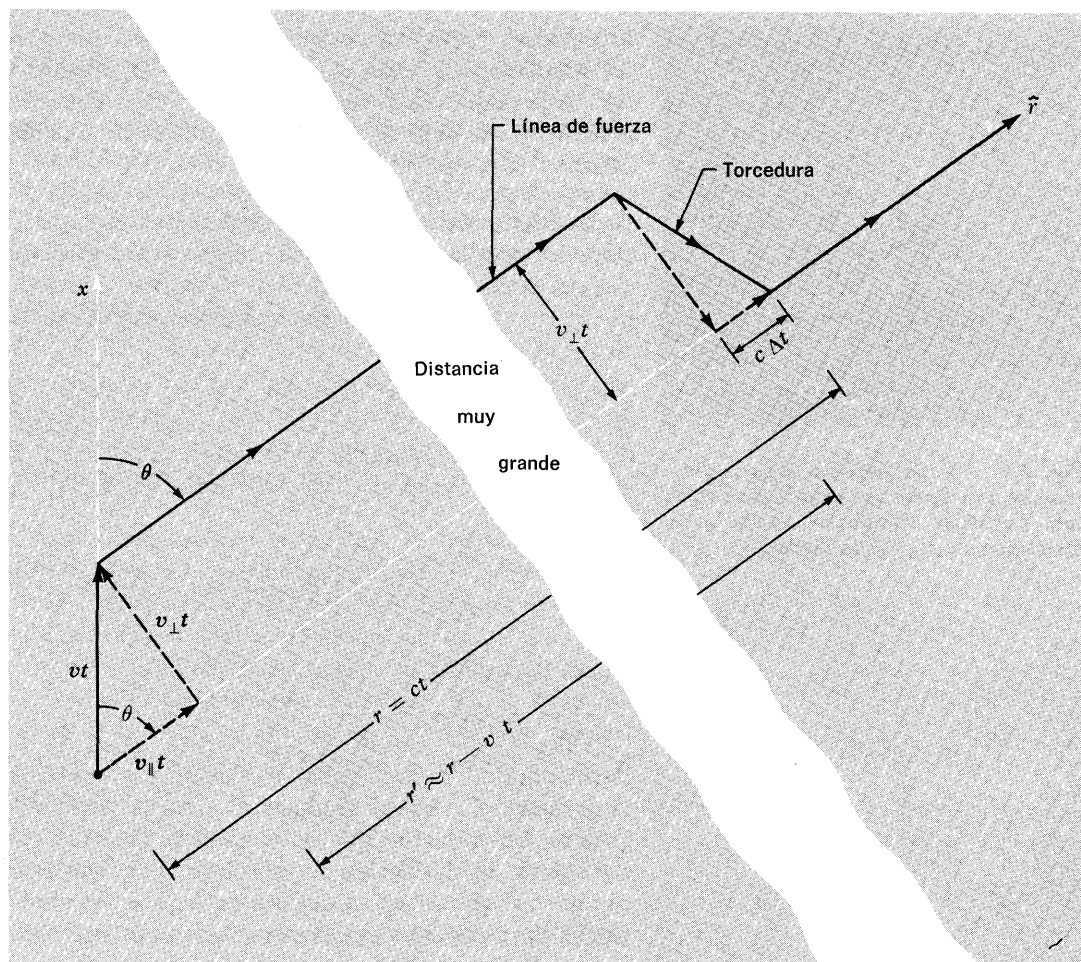


Fig. 7.8 Radiación de una carga puntual acelerada. La desviación en la línea de fuerza de E se propaga a velocidad c . El esquema se ha dibujado para el caso $t \gg \Delta t$ y $v (= a \Delta t) \ll c$. Los componentes de v perpendicular y paralelo a la dirección \hat{r} desde q al punto de observación, están indicados v_{\perp} y v_{\parallel} , respectivamente.

ser igual al saliente. Elegimos la caja de pastillas de modo tal que el flujo entrante es el producto de E_{\parallel} por el área de la superficie de entrada y el flujo saliente es el campo radial E_r justo en la cabeza de la torcedura multiplicado por un área igual. De la Fig. 7.9 concluimos que E_{\parallel} y E_r son iguales. Pero E_r está dado por la ecuación (121) del campo inverso del cuadrado. En consecuencia tenemos

[Si este argumento de la caja de pastillas se usa en la cola de la desviación se obtiene el resultado que E_{\parallel} debe ser igual al E_r dado por la ecuación (123). Pero E'_r es igual a E_r porque r' y r son esencialmente iguales, de acuerdo con la ecuación (124). En consecuencia, obtenemos

$$E_{\parallel} = E_r = \frac{q}{r^2}. \quad (127)$$

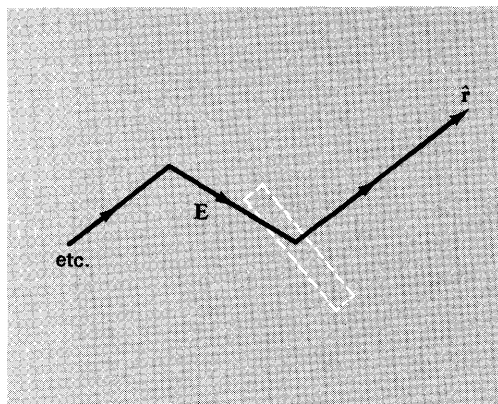


Fig. 7.9 Campo eléctrico E en la desviación. Las líneas de puntos muestran una superficie imaginaria usada para aplicación de la ley de Gauss.

la ecuación (127). La ecuación (125) puede también obtenerse mediante un argumento de caja de pastillas. El argumento nuestro, más simple, de “inspección” de la dirección de E en la desviación, es equivalente al artificio de la caja de pastillas, como puede fácilmente comprobar (Problema 7.16).]

Campo de radiación. Combinando las ecuaciones (126) y (127) encontramos, para la magnitud del campo transversal en la desviación

$$E_{\perp} = \left(a_{\perp} \frac{r}{c^2} \right) E_{\parallel} = a_{\perp} \frac{r}{c^2} \frac{q}{r^2} = \frac{q a_{\perp}}{r c^2}. \quad (128)$$

Ahora incluimos la dirección de E_{\perp} notando que, en la Fig. 7.8, E_{\perp} en el punto r al tiempo t está según la negativa de la dirección de a_{\perp} en el instante anterior t' , donde $t' = t - (r/c)$. También dignificamos a E_{\perp} con un nombre, *campo de radiación* E_{rad} :

$$\boxed{\begin{aligned} E_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) &= - \frac{q \mathbf{a}_{\perp}(t')}{r c^2}, \\ t' &= t - \frac{r}{c}. \end{aligned}} \quad (129)$$

Observe que siendo el componente radial de E en la desviación, el mismo que el campo radial por encima y por debajo de ésta, no lleva “información”; no es “radiación”; no es parte de una onda de propagación. Un detector que sólo pudiese detectar campo eléctrico radial, no notaría la desviación en absoluto. Por esta razón, sólo incluimos el campo transversal en la desviación bajo el nombre de “campo de radiación”. Este resultado es el esperado luego del obtenido para ondas planas en la Sección 7.4, donde aprendimos que las componentes longitudinales de E y B son constantes en el espacio y el tiempo para una onda plana y, por lo tanto, no deben considerarse parte de la onda. (En el presente ejemplo de radiación de una carga puntual, se espera que los campos en un punto distante r sean similares a los correspondientes a una onda plana sobre una región limitada, transversal respecto a \hat{r} .) Supondremos descaradamente que podemos apropiarnos de otros resultados para ondas planas de propagación; como ser, que B y E son perpendiculares entre sí y respecto a la dirección de propagación \hat{r} y que las magnitudes de B y E son iguales en todo instante y lugar.

Generalización de una carga puntual arbitraria no relativista. Suponga que tenemos una carga puntual q que está experimentando algún movimiento tridimensional complicado. Llamaremos a esto “movimiento arbitrario”, pero debe siempre satisfacer nuestra suposición de que $v \ll c$. Además, para simplificar, suponemos que q permanece en la vecindad

del origen de coordenadas. En consecuencia, q puede ser uno de los electrones en una antena de radio distante o en un átomo distante. Lo que queremos significar con “vecindad” y “distante” es que el vector desplazamiento \mathbf{r}' , desde la posición instantánea de q al punto de observación fijo, puede considerarse casi constante en dirección y longitud. Por lo tanto, un átomo “distante” puede estar alejado 10^{-5} cm del punto de observación, puesto que la “vecindad” ocupada por un átomo tiene solamente del orden de 10^{-8} cm de radio. Para que una antena de radio de 10 m de longitud esté tan “distante”, debe estar alejado 10 000 metros.

¿Cuál es la forma del campo de radiación debido a esta carga en movimiento “arbitrario”, en un punto de observación distante? La ecuación (129) fue deducida para un movimiento especialmente sencillo, que consistía en una aceleración constante durante un corto tiempo Δt seguida de un movimiento a velocidad constante. Hemos descubierto que el campo de radiación resultante en el punto de observación al tiempo t se debe enteramente a la aceleración transversal $\mathbf{a}_\perp(t')$ en el “tiempo retardado” anterior $t' = t - (r/c)$. Ahora bien, para un movimiento arbitrario en el cual $\mathbf{a}(t')$ va variando permanentemente en forma continua, podemos considerar a $\mathbf{a}(t')$ como constante en magnitud y dirección, para un intervalo de tiempo suficientemente corto $\Delta t'$. Por consiguiente, la aceleración $\mathbf{a}(t')$ produce durante $\Delta t'$ un campo de radiación en el punto de observación distante que está dado por la ecuación (129) y que barre el punto de observación en un intervalo de tiempo Δt . Llegamos ahora a una complicación. El tiempo retardado t' , en el cual ocurre la aceleración, está dado por

$$t' = t - \frac{r'}{c}. \quad (130)$$

La radiación emitida por q durante el intervalo $\Delta t'$, barre el punto de observación en un intervalo Δt dado por

$$\Delta t = \Delta \left(t' + \frac{r'}{c} \right) = \Delta t' + \frac{\Delta r'}{c}, \quad (131)$$

donde $\Delta r'$ es el cambio en la distancia entre la carga q y el punto de observación durante el intervalo $\Delta t'$. Vemos que, en general, Δt no es igual a $\Delta t'$. Por consiguiente, en un instante dado t en el punto de observación, hay una “superposición” entre las contribuciones al campo de radiación emitido en diferentes tiempos retardados t' .

Evitando la “superposición”. No deseamos estudiar este caso general. Notamos que $\Delta r'$ es igual al producto de la componente longitudinal de la velocidad por $\Delta t'$. Por consiguiente, para $v \ll c$, podemos, en una buena aproximación, despreciar $\Delta r'$ en la ecuación (131):

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \Delta t' + \frac{(\Delta r')}{c} \\
&= \Delta t' + \frac{(v_{\parallel} \Delta t')}{c} \\
&\approx \Delta t' \quad \text{for } \frac{v_{\parallel}}{c} \ll 1.
\end{aligned} \tag{132}$$

Por lo tanto, para $v \ll c$ hay una superposición despreciable entre Δt y $\Delta t'$. Entonces hay una correspondencia biunívoca entre la radiación detectada al tiempo t y la aceleración transversal a un *tiempo retardado único* t' . En ese caso, el campo de radiación $\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$ está dado por la ecuación (129) para todo t .

Una vez conocido E , también lo es B . De ahora en adelante suponemos que la ecuación (129) se cumple para un punto de observación distante, con \mathbf{r} esencialmente constante. También suponemos que \mathbf{B}_{rad} está dado por la relación que vale para una onda plana. De este modo (eliminando el subíndice “rad” de los campos de radiación) tenemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \tag{133}$$

Energía irradiada por una carga puntual. Para un punto de observación distante, el vector flujo de energía $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\
&= \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]^2 \hat{\mathbf{r}} \\
&= \frac{c}{4\pi} \left[\frac{-q \mathbf{a}_{\perp}(t')}{rc^2} \right]^2 \hat{\mathbf{r}} \\
&= \frac{q^2}{c^3} [\mathbf{a}_{\perp}(t')]^2 \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2},
\end{aligned} \tag{134}$$

donde las unidades de \mathbf{S} son erg/cm² seg. El flujo de energía en erg/seg que pasa del área infinitesimal dA , situada en el punto de observación \mathbf{r} (y orientada perpendicularmente a \mathbf{r}), está dado por el producto de la magnitud del vector flujo \mathbf{S} por el área dA . Llamemos dP a este flujo de energía (P indica potencia en erg/seg; la letra d indica que estamos considerando la potencia infinitesimal que pasa a través de dA):

$$\begin{aligned}
dP(\mathbf{r}, t) &= |\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)| dA \\
&= \frac{q^2}{c^3} \mathbf{a}_{\perp}^2(t') \frac{dA}{4\pi r^2}.
\end{aligned} \tag{135}$$

Sea $\theta(t')$ el ángulo que forma la aceleración instantánea retardada $\mathbf{a}(t')$ con la dirección constante de \mathbf{r} desde el entorno de q hasta el punto de observación. Entonces, de acuerdo con la Fig. 7.8 vemos que

$$a_{\perp}^2(t') = a^2(t') \sin^2 \theta(t'). \quad (136)$$

Entonces, la ecuación (135) puede escribirse

$$dP(\mathbf{r}, t) = \frac{q^2}{c^3} a^2(t') \sin^2 \theta(t') \frac{dA}{4\pi r^2}. \quad (137)$$

Potencia total instantánea irradiada en todas las direcciones. Mantenemos t' y r fijos e integremos dP sobre todas las direcciones $\hat{\mathbf{r}}$ (o sea, sobre la superficie de una esfera de radio r). Si no fuera por el factor $\sin^2 \theta(t')$, podríamos efectuar la integración trivialmente por simple reemplazo del área infinitesimal dA por el área total de la esfera $4\pi r^2$. Pero debemos incluir la variación de $\sin^2 \theta(t')$ a medida que integramos sobre distintas áreas infinitesimales dA en diferentes puntos de observación distribuidos sobre la esfera. Así, podemos escribir

$$P(t) = \frac{q^2}{c^3} a^2(t') \overline{\sin^2 \theta(t')},$$

$$t' = t - \frac{r}{c}, \quad (138)$$

donde

$$\overline{\sin^2 \theta(t')} \equiv \int \sin^2 \theta(t') \frac{dA}{4\pi r^2}. \quad (139)$$

Para evaluar esta integral, podemos usar *coordenadas polares esféricas* como se muestra en la Fig. 7.10. El área infinitesimal dA es el área de un pequeño rectángulo con lados de longitud $r d\theta$ y $r \sin \theta d\varphi$. Por lo tanto,

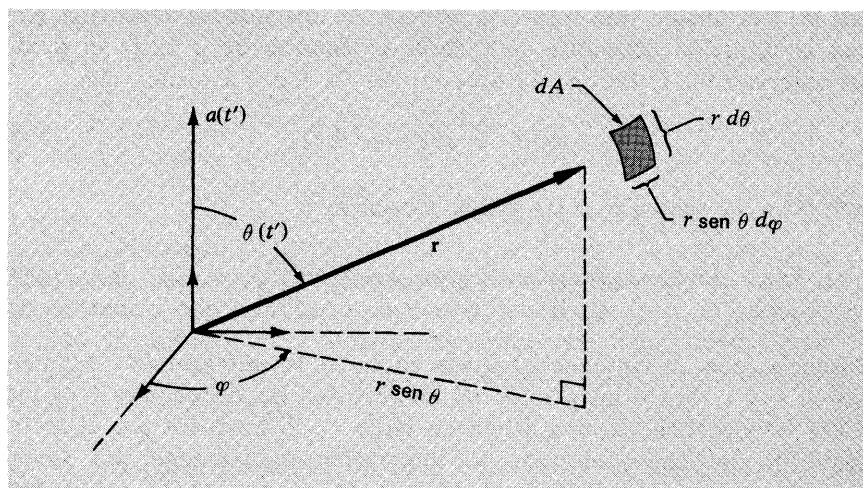
$$\frac{dA}{r^2} = \frac{(r d\theta)(r \sin \theta d\varphi)}{r^2} = d\theta \sin \theta d\varphi. \quad (140)$$

Entonces puede probar fácilmente (Prob. 7.40)

$$\overline{\sin^2 \theta(t')} = \frac{2}{3}. \quad (141)$$

He aquí una pequeña deducción de la ecuación (141). El vector \mathbf{r} tiene la componente $r \cos \theta$ según el eje polar. Llamemos z a este eje. Entonces es $z = r \cos \theta$. Cuando promediamos z^2 sobre todas las direcciones θ (manteniendo r fijo sobre una esfera), deseamos obtener la misma so-

Fig. 7.10 Coordenadas polares esféricas. El área infinitesimal dA en el extremo del radio vector r orientada perpendicularmente a él, tiene magnitud $r^2 d\varphi \sin \theta d\theta$.



lución que para el promedio de x^2 o y^2 . Pero para todo punto, tenemos $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Por consiguiente tenemos

$$\begin{aligned} r^2 &= \overline{r^2} = \overline{x^2 + y^2 + z^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2} \\ &= 3\overline{z^2} = 3r^2 \overline{\cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \overline{\cos^2 \theta} &= \frac{r^2}{3r^2} = \frac{1}{3}; \\ \overline{\sin^2 \theta} &= \overline{1 - \cos^2 \theta} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (142)$$

Una famosa fórmula para potencia irradiada. Ahora que hemos evaluado $\overline{\sin^2 \theta(t')}$, lo introducimos en la ecuación (138), y obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned} P(t) &= \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \mathbf{a}^2(t'), \\ t' &= t - \frac{r}{c}. \end{aligned}} \quad (143)$$

De acuerdo a la ecuación (143), la potencia irradiada que sale a través de una esfera de radio r_1 al tiempo t_1 , tiene el mismo valor en cualquier otro radio r_2 y tiempo t_2 que corresponda al mismo tiempo retardado t' . Esto significa que la energía se conserva y que se propaga hacia fuera a la velocidad de la luz. Observe que este resultado depende del hecho de que el campo de radiación varía como la inversa de r . Por consiguiente, el flujo de energía saliente $|\mathbf{S}|$ en erg/cm² decae como

la inversa de r . La energía se distribuye sobre una esfera de área proporcional a r^2 . Estos dos factores, r^{-2} por r^2 , se compensan mutuamente de modo que la energía saliente total por unidad de tiempo es constante sobre una esfera cuyo radio se expande con la velocidad de la luz.

Radiación y campos de “zona cercana”. La solución exacta para los campos eléctricos y magnéticos dependientes del tiempo, producidos por una carga móvil, contiene campos que varían proporcionalmente a r^{-2} y r^{-3} así como los campos de “radiación” que varían como r^{-1} . A distancias suficientemente pequeñas, dominan los campos dependientes del tiempo que varían como la inversa del cuadrado y del cubo. Algunas veces se los llama campos “de la zona cercana”. Si uno se encuentra en la “zona cercana” de una antena de radio o un átomo, estos campos son importantes. A distancias r suficientemente grandes, se hacen despreciables en comparación al campo que varía como r^{-1} , o sea, el campo de radiación. Así, por ejemplo, no contribuyen con ningún flujo de energía saliente, a grandes distancias. En la zona cercana sí contribuyen al vector flujo de energía $\mathbf{S}(r,t)$. Sus contribuciones dan un flujo de energía que se propaga parte del tiempo hacia fuera y parte del tiempo hacia dentro, de un modo análogo a una onda estacionaria. Por lo tanto, una carga puntual oscilante no produce una onda esférica de propagación saliente “pura”, sino más bien una combinación de ondas de propagación y estacionarias, dominando las últimas a pequeñas distancias y las primeras a distancias grandes. Un detector lejano está influido sólo por las ondas de propagación. Un detector cercano está influido por ambos tipos de ondas.

Definición de ángulo sólido. Sea dA un área infinitesimal situada en el punto de observación \mathbf{r} y orientada perpendicularmente a este vector. El *ángulo sólido diferencial* $d\Omega$ subtendido por dA en el origen se define como

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2}, \quad (144)$$

en unidades adimensionales llamadas estereorradianes, que se abrevian ster. Considere ahora una esfera de radio r con centro en el origen. El área de la superficie de esta esfera está compuesta de muchas áreas infinitesimales dA , cada una de las cuales está orientada perpendicularmente al radio vector que la une al origen. Por consiguiente, se puede asignar a cada área infinitesimal un elemento diferencial de ángulo sólido. El ángulo sólido total subtendido por la esfera se obtiene sumando todos los ángulos sólidos infinitesimales y, por lo tanto, está dado por el área total de la esfera dividida por r^2 :

$$\Omega = \int d\Omega = \int \frac{dA}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ ster.} \quad (145)$$

He aquí otra deducción de la ecuación (145). De acuerdo con la ecuación (140), el ángulo sólido diferencial en coordenadas polares esféricas está dado por

$$d\Omega = d\varphi \sin \theta d\theta, \quad (146)$$

con $d\varphi$ y $d\theta$ positivos, o por

$$d\Omega = d\varphi d(\cos \theta), \quad (147)$$

con $d\varphi$ y $d(\cos \theta)$ positivos. La variable φ varía entre cero y 2π ; θ entre 0 y π . La variable $\cos \theta$ va de -1 a $+1$. El ángulo sólido total subtenido por cualquier superficie cerrada que rodea el origen es

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) = (2\pi) \cdot 2 = 4\pi \text{ ster.} \quad (148)$$

Potencia irradiada dentro de un ángulo sólido diferencial $d\Omega$. Podemos usar la definición de ángulo sólido para escribir la ecuación (137) en la forma más sencilla

$$dP(\mathbf{r}, t) = \frac{q^2}{c^3} a^2(t') \sin^2 \theta(t') \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (149)$$

Radiación dipolar eléctrica. Si el movimiento de q es armónico según una dirección fija $\hat{\mathbf{x}}$, la radiación resultante se denomina radiación dipolar eléctrica. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} x(t') &= x_0 \cos \omega t' \\ a(t') &= \hat{\mathbf{x}} \ddot{x}(t') = -\omega^2 \hat{\mathbf{x}} x(t'). \end{aligned} \quad (150)$$

La potencia irradiada dentro de un ángulo sólido $d\Omega$ y promediada sobre un ciclo de oscilación es

$$\begin{aligned} dP(\mathbf{r}) &= \frac{q^2}{c^3} \langle a^2(t') \rangle \sin^2 \theta \frac{d\Omega}{4\pi} \\ &= \frac{q^2}{c^3} \omega^4 \langle x^2(t') \rangle \sin^2 \theta \frac{d\Omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad (151)$$

La potencia total en promedio temporal irradiada en todas direcciones se obtiene integrando sobre el ángulo sólido total. Luego simplemente reemplazamos, en la ecuación (151), $d\Omega$ por $\Omega = 4\pi$ y $\sin^2 \theta$ por su valor medio de $2/3$:

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \omega^4 \langle x^2(t') \rangle. \quad (152)$$

Ancho de línea natural para un átomo emisor de luz. Podemos usar la ecuación (152) para obtener una estimación clásica sencilla del tiempo de decaimiento libre de un átomo excitado que está emitiendo radiación dipolar eléctrica. Se verá que el resultado coincide, en forma marcadamente suficiente, con los valores observados experimentalmente, a pesar de que no usaremos explícitamente la teoría cuántica.

Consideremos un modelo atómico clásico sencillo. El átomo consiste en un “electrón” con carga $q = -e$ y masa m que está unido a un “núcleo” pesado por medio de un resorte con constante $m\omega_0^2$. Si al átomo se le entrega una energía de excitación E_0 al tiempo cero, oscila con movimiento armónico débilmente amortiguado a frecuencia ω_0 . (Despreciamos el leve cambio de la frecuencia ω_0 causado por la amortiguación, o sea, no nos molestamos en usar $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2$ en lugar de ω_0^2 .) La energía del átomo está dada por

$$E(t) = E_0 e^{-t/\tau}. \quad (153)$$

La inversa de la vida media, $1/\tau$, es igual a la disminución fraccional de energía por unidad de tiempo:

$$\frac{1}{E} \left[-\frac{dE}{dt} \right] = \frac{1}{\tau}. \quad (154)$$

La energía $E(t)$ está dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2(t) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t). \quad (155)$$

Podemos despreciar el cambio en $E(t)$ durante un ciclo y reemplazar las cantidades instantáneas en el miembro derecho de la ecuación (155) por los valores promediados en el tiempo:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle + \frac{1}{2}m \langle \dot{x}^2(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle, \end{aligned}$$

o sea,

$$E(t) = m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle. \quad (156)$$

Suponemos ahora que el amortiguamiento se debe enteramente a la pérdida de energía por emisión de radiación electromagnética. Se trata de radiación dipolar eléctrica, estando la potencia irradiada dada por la ecuación (152):

$$-\frac{dE}{dt} = P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^4 \langle x^2 \rangle. \quad (157)$$

Combinando las ecuaciones (154), (156) y (157), obtenemos el *ancho de línea natural* para un átomo que está emitiendo luz.

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{P}{E} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\omega_0^2}{m}, \quad (158)$$

en donde hemos usado el hecho de que, para un oscilador amortiguado, el ancho completo de frecuencias a potencia semimáxima (en el espectro de Fourier de la radiación) es igual a la inversa del tiempo de vida media. La ecuación (158) se aplica a cualquier radiación de dipolo eléctrico amortiguado, cuya amortiguación se debe únicamente a la radiación. Para un átomo que emite luz visible podemos tomar $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA} = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$, $\nu_0 = c/\lambda_0 = 3 \times 10^{10}/5 \times 10^{-5} = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Para e y m tomamos la carga del electrón $e = 4,8 \times 10^{-10} \text{ ues}$ y su masa $m = 0,91 \times 10^{-27} \text{ g}$. De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{3}{2} \frac{c^3}{e^2} \frac{m}{\omega_0^2} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right) \frac{(3 \times 10^{10})^3}{(4,8 \times 10^{-10})^2} \frac{(0,91 \times 10^{-27})}{(2\pi)^2 (6 \times 10^{14})^2} \approx 4,5 \times 10^{-8} \text{ seg.} \end{aligned} \quad (159)$$

Es importante recordar que $\tau \sim 10^{-8} \text{ seg}$ para átomos que decaen libremente emitiendo luz visible.

He aquí una cuestión a la que podemos aplicar nuestros resultados para radiación dipolar:

¿Por qué el cielo es azul? Nos fijaremos en la dependencia respecto a la frecuencia de la dispersión de la luz del sol dentro de nuestros ojos por un átomo de aire. Encontraremos que el azul se dispersa más que el rojo. Por esto el cielo es azul. (Las puestas de sol son rojas porque el azul ha sido eliminado en gran parte quedando el rojo.) Puede demostrar muy fácilmente por sí mismo este efecto de color de la manera siguiente: Consiga un cuenco de vidrio o jarra de agua y una linterna. Agregue unas cuantas gotas de leche al agua y agítela. Dirija el haz de la linterna a través del agua de manera de poder observar el haz de luz desde el costado en virtud de la dispersión por la leche en suspensión u observar directamente la lamparita de la linterna a través del agua. Note el tinte azul de la luz dispersa (es el azul del cielo). Note que el tinte rojizo de la lamparita observada directamente (es la puesta del sol). Continúe añadiendo leche gradualmente para simular el efecto de una niebla que crece paulatinamente.

Considere un electrón en una "molécula clásica de leche" impulsado en estado estacionario por el campo eléctrico de la onda electromagnética de propagación, producida por la linterna; si el haz está dirigido según \hat{z} , el campo eléctrico en la onda de propagación tiene componen-

tes según x e y solamente. Consideremos solamente la componente x del campo eléctrico en el haz de la linterna. (La componente en y da resultados análogos.) Más aún, consideramos un único color, o sea, un único componente de Fourier de la luz “blanca” (que consiste en frecuencias en el rango visible y fuera de él). Entonces el campo eléctrico $E_x(t)$ en el lugar de la molécula de leche está dado por

$$E_x = E_0 \cos \omega t. \quad (160)$$

Suponga que un “electrón” de la molécula de leche está unido al núcleo de leche con una constante de resorte $m\omega_0^2$. Despreciemos el amortiguamiento (o sea, supongamos que la frecuencia impulsora ω no está cerca de la frecuencia resonante ω_0). Entonces, la ecuación de movimiento del electrón es

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + qE_x. \quad (161)$$

En estado estacionario, $x(t)$ es una oscilación armónica a frecuencia ω . Por consiguiente, $\ddot{x}(t)$ es $-\omega^2 x(t)$. Entonces, la ecuación (161) da

$$\begin{aligned} -m\omega^2 x(t) &= -m\omega_0^2 x(t) + qE_x \\ x(t) &= \frac{qE_x(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \end{aligned} \quad (162)$$

La oscilación armónica $x(t)$ emite radiación dipolar. La potencia total irradiada está dada por la ecuación (152):

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 \langle x^2 \rangle \\ &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 \left[\frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 \langle E_x^2(t) \rangle. \end{aligned} \quad (163)$$

Ahora bien, al estudiar el índice de refracción de una molécula de vidrio clásica (Sec. 4.3), encontramos que la frecuencia angular efectiva ω_0 es grande comparada con ω , para frecuencias ω correspondientes a la luz visible. En consecuencia, podemos tomar $\omega_0 \gg \omega$ en la ecuación (163). Así vemos que la potencia dispersa es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia impulsora ω , o sea, a la inversa de la cuarta potencia de la longitud de onda impulsora:

$$P \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}. \quad (164)$$

Ley del cielo azul. La ecuación (164) se llama “ley del cielo azul de Lord Rayleigh”. La relación de longitud de onda de luz roja de 6500 Å

a luz azul de 4500 Å es $65/45 = 1,44$. La cuarta potencia de 1,44 es 4,3. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (164), la luz azul es dispersada alrededor de 4 veces más efectivamente que la luz roja. Por esto el cielo es azul. ¿Por qué es tan brillante? Vea el Tema suplementario 8.

Sección transversal integrada para dispersión. Suponga que tiene una bola de billar de radio R en un ancho haz uniforme de bolitas de acero que viajan en la dirección \hat{z} con velocidad v . Aquellas bolitas que golpean la bola son dispersadas elásticamente hacia fuera del haz. La energía que llevan es removida del haz y dirigida en otras direcciones. El total de bolitas dispersadas por unidad de tiempo es el producto entre el *flujo numérico*, en bolitas por centímetro cuadrado por segundo y la *sección transversal integrada* $\sigma = 4\pi R^2$ de la bola:

$$\text{Bolitas dispersadas por seg.} = \sigma \times (\text{flujo de bolitas incidente}) \quad (165)$$

Puesto que se supone que las bolitas son dispersadas elásticamente, cada bolita dispersada tiene la misma energía que una incidente. Por lo tanto, podemos multiplicar ambos miembros de la ecuación (165) por la energía de una bolita. Entonces la ecuación (165) se hace

$$\text{Energía dispersada por seg} = \sigma \times (\text{flujo de energía incidente}) \quad (166)$$

Podemos ahora *definir* mediante una interpretación adecuada de la ecuación (166), la sección transversal integrada para dispersión elástica de luz por una molécula de leche clásica: la energía “dispersada” por unidad de tiempo se *define* como la potencia irradiada P del electrón impulsado; y el flujo de energía incidente es el flujo de energía electromagnética S_z . De este modo, por analogía con la ecuación (166), definiremos σ_{sc} por

$$P = \sigma_{sc} \cdot \frac{c}{4\pi} \langle E_x^2(t) \rangle. \quad (167)$$

Comparando las ecuaciones (167) y (163), obtenemos

$$\sigma_{sc} = \frac{4\pi}{c} \frac{P}{\langle E_x^2 \rangle} = \frac{8}{3} \pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (168)$$

Por lo tanto, nuestro resultado ecuación (164), que dice que para $\omega_0 \gg \omega$ la intensidad dispersada es proporcional a ω^4 , está expresado más precisamente por la ecuación (168) que da la dependencia, respecto a la frecuencia, de la *sección eficaz integrada para dispersión de la luz por un átomo* (para este modelo clásico). La cantidad e^2/mc^2 tiene dimensiones de longitud. (Debe tenerla, puesto que σ tiene dimensiones de

longitud al cuadrado y la dependencia de σ respecto a la frecuencia es una relación adimensional.) Por razones históricas se llama *radio clásico del electrón*, r_0 , o *radio de Lorentz del electrón*:

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2} = \frac{(4,8 \times 10^{-10})^2}{(0,91 \times 10^{-27})(3 \times 10^{10})^2} = 2,82 \times 10^{-13} \text{ cm.} \quad (169)$$

Sección transversal de dispersión clásica de Thomson. Si el electrón está unido al núcleo por un resorte de constante cero, no está ligado, sino que es libre. Si la constante de resorte es cero, ω_0 es nula. Por lo tanto, la sección transversal para dispersión elástica de luz por un electrón libre, también llamada *sección transversal de dispersión de Thomson clásica*, se obtiene haciendo $\omega_0 = 0$ en la ecuación (168):

$$\sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8}{3}\pi r_0^2 = \frac{8}{3}(3,14)(2,82 \times 10^{-13})^2 = 0,67 \times 10^{-24} \text{ cm}^2. \quad (170)$$

Ahora bien, una sección transversal de 10^{-24} cm^2 puede no parecerle grande, pero, en algunos campos de la física (por ejemplo la física nuclear) y en cierto momento histórico, pareció tan grande como la pared de un granero. Por lo tanto se llama (*barn**.)

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2. \quad (171)$$

(Las secciones transversales nucleares se dan usualmente en milibarns, que se abrevia mb.) Por lo tanto, la sección transversal de Thomson dada por la ecuación (170) se recuerda fácilmente: es muy grande; equivale a dos tercios de barn.

Problemas y experimentos caseros

7.1 Muestre que la identidad dada en la ecuación (34), Sección 7.2, es correcta. Esta identidad es la base de la descripción de ondas de propagación "zigzag" para ondas en una guía de ondas. Es una ilustración de que las ondas armónicas tridimensionales de propagación forman un "conjunto completo" de funciones para describir ondas tridimensionales. Por supuesto, que las ondas tridimensionales estacionarias también forman un conjunto completo.

7.2 (a) Muestre que, para vidrio de índice 1,52, el ángulo crítico para reflexiones internas es aproximadamente 41,2 grados.

(b) ¿Cuál es el ángulo crítico para agua (índice 1,33)? Un prisma de agua de la forma de triángulo rectángulo isósceles (como el de la Fig. 7.3), ¿dará retrodirección de la luz sin ninguna pérdida (por refracción dentro del aire)? Primero suponga que el agua se extiende arriba y a la derecha del aire. Luego preocúpese sobre los portaobjetos de vidrio que forman los lados de su prisma de agua.

* "Barn": Granero. (N. del T.)

Experimento casero

7.3 Prisma de agua retrodirector. Haga un prisma de agua con dos portaobjetos y un poco de masilla o cinta adhesiva. Compare los resultados del problema 7.2b iluminando con un rayo de linterna dentro de la superficie del agua.

7.4 Muestre que el prisma de agua retrodirector mostrado en la Fig. 7.3 trabaja para otros ángulos de incidencia además del de incidencia normal que se muestra, en el sentido en que dirige la luz hacia atrás en dirección opuesta a la dirección incidente.

7.5 Calcule la distancia media de penetración (la distancia media de atenuación de amplitud $\kappa^{-1} = \delta$) para luz visible de longitud de onda 5500 Å retrodirigida por el prisma de agua de la Fig. 7.3. (Nos referimos a la distancia perpendicular a la superficie posterior vidrio-aire.) Suponga que el haz de luz incidente tiene incidencia normal como se muestra en la figura. Considere que el índice de refracción es 1,52.

Resp. $\delta = 2,2 \times 10^{-5}$ cm.

7.6 Luz en el vacío. Para la luz (o las microondas) en una guía de ondas encontramos que, si la frecuencia está debajo del corte, la dirección z (a lo largo de la guía) es “reactiva”. Las otras dos direcciones no eran reactivas. En principio, ¿será posible, por algún método ingenioso, construir una “guía de onda generalizada” en la cual las ondas sean reactivas en las tres direcciones x , y y z ?

7.7 Fibra óptica. Es posible “conducir” luz en una guía de ondas hecha de fibras de vidrio. La luz se mantiene en el vidrio porque se producen desviaciones por colisiones en la superficie aire-vidrio y así incide en ángulos mayores que el ángulo crítico. Sin embargo, si la fibra es muy pequeña en diámetro, se convierte en una guía de ondas en la cual la frecuencia de la luz está debajo del corte. Suponga que las fibras tienen una sección de corte cuadrada (como una guía de ondas rectangular). Estime la mínima longitud de extremos para una fibra si ésta debe ser dispersiva, es decir, si debe llevar ondas de propagación de luz visible.

Resp. Borde $> 1,7 \times 10^{-5}$ para $\lambda = 5000$ Å.

7.8 Ángulo crítico para reflexión por la ionosfera. Reemplace por vacío el vidrio a la izquierda de $z = 0$, en la Fig. 7.4. Reemplace el aire a la derecha de $z = 0$ por un plasma —la ionosfera— idealizada de modo de tener un límite liso (y una composición uniforme). Muestre que para todo ángulo de incidencia θ_1 hay una frecuencia de corte $\omega_{c.o.}$ que depende de θ_1 y que, para incidencia normal, esta frecuencia de corte es la frecuencia de oscilación del plasma ω_p . Muestre que para toda frecuencia ω por encima de la frecuencia de oscilación del plasma ω_p hay un ángulo crítico para reflexión total, tal que, para ángulos de incidencia mayores que el crítico, la onda es exponencial en la ionosfera. Como ejemplo, considere que la frecuencia de oscilación del plasma es $\nu_p = 25$ MHz (megahertz) y encuentre el ángulo crítico para microondas de frecuencia $\nu = 100$ MHz.

Resp. Para un θ_1 fijo, $\omega_c = \omega_p / \cos \theta_1$. Para una frecuencia fija ω por encima de ω_p , $\cos \theta_{\text{crit}} = \omega_p / \omega$.

Experimento casero

7.9 Cómo ven los peces al mundo por encima del agua. Para este experimento necesita un estanque tranquilo o una casa con piscina de natación. De otro modo (en una piscina pública) deberá ser el primero en llegar de modo que la superficie del agua esté aún tranquila. Use una máscara de buceo. Nade hacia abajo, vuélvase y mire hacia arriba. Como problema, prediga (ahora) qué es lo que verá.

7.10 Velocidad de fase de las ondas de agua con respecto a la profundidad. Suponga que tiene un acuario rectangular (o una caja de cartón pintada por dentro, o algo así) de 25 cm de longitud a lo largo de x . Debe llenarlo hasta una altura de equilibrio y excitar el modo sinusoidal más abajo (mostrado en la Fig. 7.5).

(a) ¿Cuál es la velocidad de fase (en cm/seg) para ondas de aguas profundas? (Recuerde que puede definir la velocidad de fase, a pesar de que las ondas sean estacionarias.)

(b) Haga un gráfico de la velocidad de fase (en cm/seg) en función de la profundidad h del agua (en cm), para este modo y este acuario, usando la relación exacta de dispersión (para ondas de pequeña amplitud) dada por la ecuación (72), Sección 7.3. En el gráfico muestre el "límite de agua profunda". También represente la expresión para la velocidad de fase para aguas superficiales en el mismo gráfico, haciéndolo como si ésta fuera válida para todo h , independientemente de la longitud de onda. Su gráfico exacto mostrará de ese modo, "la transición" entre las velocidades de fase de aguas superficiales y profundas.

7.11 Leyes de dispersión para ondas de agua. Consiga un recipiente rectangular que mida alrededor de un pie según x . (Cualquier cosa entre 1/2 pie y 2 pies servirá.) Deberá ser al menos 2/3 de profundo como lo es de largo (de modo que pueda llegar al límite de agua profunda). El mejor recipiente es un acuario (su costo aproximado es de 5 dólares en una tienda del ramo). El más barato es el de cartón (por ejemplo una caja de zapatos, de sombreros o de comestibles). Si se rocía con pintura impermeabilizante el interior del cartón, éste durará más y no nos mojaremos tanto. Pero el amortiguamiento debido a la flexibilidad del cartón reduce el tiempo de vida de los modos y hace que el cartón sea menos conveniente que el vidrio (o el plástico duro). Además, es conveniente poder ver a través de los lados del depósito de vidrio. Pero el cartón servirá.

(a) *Modo más bajo.* Éste se muestra en la Fig. 7.5. Calcule λ para su tanque, para este modo, y asimismo calcule δ . Ponga en forma gráfica la expresión teórica para la velocidad de fase $v_\phi = \lambda v$ para su depósito, para este modo, como una función de la profundidad de agua h como se discutió en el Problema 7.10. (Use la relación "exacta" de dispersión de la ec. (72), Sec. 7.3.) Ahora llene el depósito hasta una altura arbitraria h . Revuelva dentro algo de café, de modo que se pueda ver el movimiento a través del agua. Existe el modo más bajo moviendo el depósito suavemente hacia delante y hacia atrás. Cuando observe que lo ha logrado, déjelo seguir. Mida la frecuencia (un reloj común será suficiente). Calcule su resultado experimental para v_ϕ y ponga un punto experimental en su gráfico de la expresión teórica para la velocidad de fase. Repita la experiencia para distintos valores de h . Deberá tener por lo menos un punto experimental en "aguas superficiales", uno en "aguas profundas" y un tercero en la región de transición.

(b) *Modo siguiente más alto.* Si tiene un depósito de cartón puede excitar el modo en el centro del mismo, para $x = 0$ (en la Fig. 7.5), está en un antinodo en ψ_y y la longitud del depósito es de una longitud de onda. ¿Cómo puede excitar ese modo? Si el depósito es rígido no podrá hacerlo (al menos fácilmente). ¿Por qué? En ese caso, el siguiente modo fácilmente excitado tiene L igual a tres semilongitudes de onda y un nodo en ψ_y para $x = 0$ (Fig. 7.5). Calcule δ para este depósito y este modo y la frecuencia esperada. Ahora trate de agitar el depósito a esa frecuencia para excitar el modo. Mida la frecuencia de las oscilaciones libres en este modo, una vez que haya aprendido como excitarlo.

(c) *Pulsaciones transitorias.* Para esta experiencia se necesita un metrónomo. Pídale en préstamo o construya uno colgando una lata mediante un resorte de longitud variable, con un pedazo de papel como badajo para golpear, y producir un sonido: Con el metrónomo marcando, agite el depósito suave y uniformemente al compás del metrónomo. Varíe la longitud del resorte (o la frecuencia del metrónomo) en pequeños saltos de modo de barrer la frecuencia de reso-

Experimento casero

nancia para el segundo modo descrito más arriba en la parte (b). Notará las pulsaciones transitorias para la frecuencia de pulsación entre la fuerza impulsora y la frecuencia natural de oscilación. Cuando alcance la frecuencia de resonancia lo notará obviamente. (¡También descubrirá en estas experiencias muchas cosas que no son tenidas en cuenta por la teoría de pequeñas oscilaciones!) Puede ser posible estimar el ancho $\Delta\omega$ de la resonancia (yo no lo he intentado). En todo caso, *calcule* el ancho de la resonancia midiendo (en forma aproximada) el tiempo de decaimiento medio para el modo y usando luego la famosa relación entre el ancho de banda y el tiempo de decaimiento para un modo amortiguado $\Delta\nu\Delta t \approx 1$.

7.12 Obtenga la ecuación clásica de las ondas para **B**, como se sugiere, siguiendo la ecuación (79b), Sección 7.4.

7.13 Presión de radiación del sol. Dado que la constante solar (fuera de la atmósfera terrestre) es 1,94 pequeñas calorías por cm^2 y por minuto (que es $1,35 \times 10^6 \text{ erg/cm}^2 \text{ seg}$), calcule, en dynas/cm^2 la presión de radiación en la tierra (para incidencia normal) según dos hipótesis (a) y (b). Compare el resultado con la presión atmosférica del aire a nivel del mar.

(a) La tierra es “negra” y absorbe toda la luz.

(b) La tierra es un espejo perfecto y refleja toda la luz.

Resp. (a) Aproximadamente 5×10^{-11} atmósferas ($1 \text{ atm} \approx 10^6 \text{ dynas/cm}^2$).

7.14 Presión de radiación. (Primero trabaje en el Problema 7.13.) La presión de radiación del sol en la tierra da una fuerza repulsiva efectiva entre el sol y la tierra.

(a) Muestre que esta fuerza satisface la ley de la inversa del cuadrado. Así, si la tierra estuviera doblemente alejada del sol, la fuerza neta sobre la tierra sería 4 veces menor, *como lo sería la fuerza gravitatoria*.

(b) Repase la ley de Kepler. Demuestre que ésta puede escribirse (para órbitas circulares) en la forma $\omega^2 R^3 = MG$, donde ω es la frecuencia angular de un planeta que gira alrededor del sol, R la distancia desde el sol hasta el planeta, M la masa del sol, y G es la constante de la gravedad.

(c) Demostrar que para un objeto “negro” esférico que tiene una densidad de masa ρ , un radio r y que gira en una órbita circular alrededor del sol, la ley de Kepler debe transformarse en la siguiente expresión: $\omega^2 R^3 = MG - (P/4\pi c)(3/4\pi r)$, donde P es la potencia electromagnética total emitida por el sol.

(d) Dada la constante solar (Prob. 7.13) y dado que el sol está a 93 millones de millas de la tierra, calcule P en erg/seg .

(e) Suponga que tiene una “partícula de polvo” en órbita circular alrededor del sol. Considere la densidad como si fuera la misma que para el agua ($1,0 \text{ gm/cm}^3$). ¿Para qué radio r de la partícula, la presión de radiación hacia afuera será igual a la atracción gravitacional hacia dentro? ¿Qué ocurre con esas partículas de polvo (y con las más pequeñas)?

(f) Suponga que tiene un “cometa” que consiste en pequeñas partículas de polvo, hielo o alguna cosa, y que todas tienen la misma densidad y el mismo radio. Tal cometa, ¿cambiará su “forma” cuando pasa al sol? (ya no estamos hablando de órbitas circulares, sino de órbitas elípticas. Pero aún está en condiciones de lograr la respuesta).

(g) Se dice que la larga cola de un cometa (extendida en dirección opuesta al sol) se debe a la presión de radiación. Suponga que tiene un cometa (una nube de partículas de polvo) en una órbita circular de equilibrio. El cometa tiene una frecuencia angular común para todas las partículas. Pero no todas éstas tienen el mismo radio de equilibrio; el cometa se extiende desde R_1 a R_2 , donde R_1 es más próximo al sol y R_2 más lejano. Suponga que puede medir R_1 y R_2 (simplemente observando la forma extendida del cometa con un teles-

copio). Muestre cómo puede usar esa información y otra información fácilmente obtenible, para descubrir la distribución (o los límites de la distribución) de las medidas de los radios r , considerando que todas las partículas son “negras” y que tienen la densidad del agua. Por supuesto que todo esto no prueba que la presión de radiación es más importante que, por ejemplo, el “viento solar” de protones emitidos por el sol en la determinación de la presión hacia afuera en las partículas de polvo y la cola de los cometas.

7.15. Navegación por luz solar. Suponga que quiere diseñar una nave solar que pueda “revolotear” suspendida en el espacio, estando la influencia gravitatoria del sol exactamente anulada por la presión de radiación. Considere que la nave es de plástico aluminizado. Tome la densidad de la nave como 2,0. (El aluminio tiene una densidad 2,7 gm/cm³; el plástico tiene una densidad cercana a 1.) Suponga que no hay “carga”, de modo que la nave necesita soportar sólo su propio peso, y que la luz del sol es completamente reflejada. Muestre que, para que la nave esté suspendida en reposo (en el sistema inercial), su espesor d debe estar dado por

$$\rho d = \frac{2P/4\pi c}{MG},$$

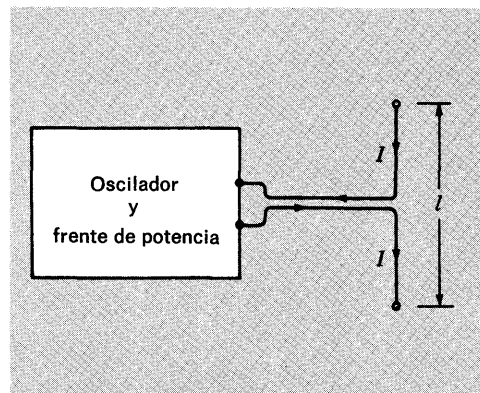
donde los símbolos son los definidos en el Problema 7.14. Muestre (del Problema 7.13) que $P = 3,8 \times 10^{33}$ erg/seg. Muestre (usando la ley de Kepler para la tierra, con $R = 149$ millones de kilómetros y $\nu =$ una vez por año) que $MG = 1,3 \times 10^{26}$ cm³/seg². Compruebe que para $P = 2$ el espesor requerido es aproximadamente 10^{-4} cm (salvo que esté equivocado). Esto es 1 micrón y es más delgado en un factor de 10 ó 100 de lo que hubiéramos deseado. Nosotros también quisiéramos soportar una carga útil. Parece como si necesitáramos algún movimiento orbital para mantenerlo sin caer hacia el sol. Demuestre que el resultado de este problema da el tamaño de una “brillante partícula cúbica de polvo” de densidad 2,0 que revolotea alrededor del sol, si está orientada con una cara hacia él.

7.16 Radiación de una carga puntual. Use una “integración sobre un paquete de pastillas” para obtener la ecuación (125), Sección 7.5, que dice $E_{\perp}/E_{\parallel} = v_{\perp}t/c\Delta t$. Vea la discusión que sigue a la ecuación (127), Sección 7.5.

7.17. Radiación dipolar eléctrica de una antena de radio de “doble dipolo”. Considere el radiotransmisor y la antena mostradas en el diagrama. Se supone que la corriente I es uniforme sobre la longitud total l de la antena. Los conductores, desde el oscilador a la antena están muy cercanos uno al otro o están enroscados uno alrededor del otro. Por lo tanto, la corriente *neta* en los conductores de entrada y salida es efectivamente nula, y éstos no irradian apreciablemente comparados con la antena. Las pequeñas esferas en los extremos de la antena son condensadores para recibir la carga acumulada por la corriente I . Estas esferas no son necesarias —la carga se acumula en los extremos de los conductores y tiende a hacer que la corriente no sea perfectamente uniforme, pero podemos despreciar esto. La longitud l de la antena es muy pequeña comparada con la longitud de onda λ de la radiación electromagnética.

(a) Demuestre que, para un punto de observación distante r , el campo eléctrico de radiación E está dado por

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{l \dot{\mathbf{I}}_{\perp}(t')}{rc^2}, \quad t' = t - \frac{r}{c},$$



Problema 7.17

donde \mathbf{I} es un vector cuya dirección y magnitud son las de la corriente en la antena, e \mathbf{I}_\perp es la proyección de \mathbf{I} transversal a la línea de visual \mathbf{r} desde la antena al punto distante de observación [Sugerencia: Puede obtener esta fórmula inventando una "carga puntual equivalente q moviéndose con una velocidad equivalente $\mathbf{v}(t')$ " que dará resultados indistinguibles a los de \mathbf{I}_\perp]

(b) Muestre que para el número de onda k , la impedancia característica Z experimentada por el oscilador (es decir, la carga resistiva que él cree tener conectada) está dada por

$$Z = (kl)^2 \cdot 20 \text{ ohms},$$

donde, recalamos, $c^{-1} \text{ statohm} = 30 \text{ ohms}$.

Experimento casero

7.18 Dispersión de la luz por moléculas de leche. Llene un jarro de vidrio con agua. Ilumine con un haz de linterna desde el costado hacia dentro del agua. Observe la luz desviada en un ángulo cercano a 90° y también mire a través del agua la lamparilla de la linterna. Agregue al agua una pocas gotas de leche y agítela. Continúe las observaciones y agregue más leche. Note el tinte azul de la luz desviada y el tinte amarillento o rojizo de la restante luz transmitida. Explíquelo. Observe que, cuando haya suficiente (o demasiada) leche en el agua, la luz dispersada ya no parecerá azulada, sino blanquecina como niebla o bruma. La "puesta del sol" se mantiene, sin embargo, haciéndose más y más roja. Explique esto. Finalmente, se hace tan denso que ya no se puede ver la lamparilla para nada, y la luz dispersada es blanca. Tampoco se puede "ver" el "haz" de luz en el líquido. El "aire" se ha convertido en una "nube blanca". Explíquelo. Observe la luz desviada con su polaroid. (Le explicaremos esto en el Cap. 8.)

7.19 Radiación por una delgada capa de carga. Suponga que el plano xy en $z = 0$ está cubierto con una capa muy delgada de cargas positivas de densidad de carga σ uniforme. Todas las cargas oscilan alrededor de la dirección x con la misma amplitud y frecuencia.

(a) Demuestre con la ley de Gauss que, para z positivo, $E_x(z, t) = 2\pi\sigma$, donde las cargas están todas oscilando o están todas en reposo. (Esto es como un resorte estimado en la aproximación del "slinky", donde la componente z de la tensión es constante, independientemente del movimiento.)

(b) Muestre, haciendo un esquema de una línea de fuerza, que el campo de radiación está dado por

$$\frac{E_x(z, t)}{E_z(z, t)} = -\frac{\dot{x}(t')}{c},$$

donde $\dot{x}(t')$ es la *velocidad* de cualquiera de las cargas para el tiempo retardado $t' = t - (z/c)$. Así, el campo de radiación para z positivo es

$$E_x(z, t) = -2\pi\sigma \frac{\dot{x}(t')}{c}.$$

(En lugar de un esquema puede preferir el argumento gaussiano de la caja de píldoras.) Observe el hecho peculiar de que, en contraste con el caso de radiación desde una única carga puntual, donde es la *aceleración* (retardada) la que es proporcional al campo de radiación, aquí es la anterior *velocidad* (retardada) la que es proporcional al campo de radiación. ¿Puede dar una explicación cualitativa sobre "qué ha pasado"? (Sugerencia: Considere las contribuciones de varias cargas puntuales distribuidas sobre el plano.)

7.20 Radiación por una delgada capa de carga. Obtenga el resultado del Problema 7.19 sumando (integrando) las contribuciones de todas las cargas puntuales del plano. Para lograr que su integral converja, considere que la lámina no es exactamente de espesor nulo, sino que tiene un espesor d (donde d es muy pequeño comparado con la longitud de onda λ). Suponga que la capa absorbe o dispersa la radiación (como debe ser) y que la constante de amplitud media de atenuación es κ . Muestre que esto da un factor de atenuación exponencial (f.a.e.)

$$\text{f.a.e.} = e^{-\alpha r}, \quad \alpha \equiv \frac{\kappa d}{z},$$

donde κ es el número de onda y r es la distancia desde la contribución de la carga puntual al punto de observación situado a una distancia perpendicular z de la capa. Defina $\varphi = kr - kz$. Note que $\varphi = 0$ para la carga puntual en $x = y = z = 0$, esto es, la carga puntual más cercana al punto de observación en $x = y = 0$, $z = z$. Muestre que si $x(t')$ está dada por la parte real de

$$x(t') = x_0 e^{i\omega t'},$$

entonces la contribución a E_x desde un aro circular en el plano con radio ρ y espesor radial $d\rho$ puede ser trampeada hasta que tenga la forma

$$dE_x = 2\pi k x_0 e^{i(\omega t - kz)} e^{-i\varphi} e^{-\beta\varphi} d\varphi,$$

donde

$$\beta \equiv \frac{\alpha}{k} = \frac{\kappa d}{kz},$$

y donde ha sido despreciado el hecho de que debe usarse la proyección de la aceleración perpendicular a la línea de visión. (Esto se basa en la suposición de que, como este factor de proyección es 1 para pequeños φ , podemos considerar que decrece lentamente para φ creciente y puede ser incluido dentro de nuestro factor "experimental" de atenuación, $e^{-\beta\varphi}$. Todo esto es posible debido al hecho sorprendente de que, cuando nosotros hemos concluido, podemos tomar $\beta = 0$ y encontrar una respuesta que es independiente de β . El factor $e^{-\beta\varphi}$ se llama factor de convergencia. Es necesario, para obtener una respuesta, pero no interesa qué valor use para β siempre que β sea pequeño en magnitud comparado con la unidad.) Luego muestre que E_x es la parte real de la integral de dE_x desde $\varphi = 0$ a $\varphi = \infty$. Demuestre que

$$\int_0^\infty e^{-i\varphi} e^{-\beta\varphi} d\varphi = \frac{1}{i + \beta} \approx -i \quad \text{para} \quad \beta \ll 1.$$

Finalmente, tome la parte real y muestre que obtiene el mismo resultado que en el Prob. 7.19. Ahora puede explicar el origen físico del "corrimiento de fase efectivo de 90°" que hace que el campo total esté 90° retardado en fase comparado con la contribución de la carga más cercana, situada en $x = y = z = 0$. La carga "promedio" está efectivamente un cuarto de longitud de onda más adelante que la carga más cercana.

7.21 Expresión aproximada para el índice de refracción. Considere una onda plana incidente en una lámina delgada de carga. Las cargas están en un plano delgado, el plano xy en $z = 0$. El espesor del plano es Δz . La densidad numé-

rica de cargas es N (en unidades de partículas por cm^3). Cada carga tiene la misma carga q , y masa m , y cada una está ligada con un resorte de constante $m\omega_0^2$. Suponga que cada carga experimenta fuerzas debido a su resorte y debido a la onda plana incidente impulsora. Desprecie la contribución de las otras cargas (es decir, desprecie la contribución de la polarización al campo). Tome el campo eléctrico incidente (en $z = 0$) como la parte real de $E_0 e^{i\omega t}$. Encuentre el campo de radiación en la dirección hacia delante. Superponga éste con el campo incidente. Muestre que el campo total está entonces dado en $z = 0$ (para estas aproximaciones) por la parte real de

$$E_{\text{tot}} = E_0 e^{i\omega t} \left\{ 1 - \frac{i\omega 2\pi N q^2 \Delta z}{mc(\omega_0^2 - \omega^2)} \right\}.$$

Muestre que, si se concibe la plancha de cargas como una plancha con espesor Δz e índice de refracción n , entonces la inserción de la plancha origina un corrimiento de fase correspondiente a un tiempo de retardo t_0 , es decir, en lugar de $E_0 e^{i\omega t}$ en la parte posterior de la plancha (en $z = 0$) se tiene un campo $E^{i\omega(t-t_0)}$, donde

$$\omega t_0 = \frac{\Delta z}{\lambda} 2\pi(n - 1) = k \Delta z(n - 1).$$

Demuestre que, para $\omega t_0 \ll 1$ esto da

$$n - 1 = \frac{2\pi N q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Muestre que esto es lo que uno encuentra aproximadamente (para n cercano a la unidad), en el resultado más exacto obtenido en la Sección 4.3.

7.22 Momento angular de ondas planas de propagación circularmente polarizadas. Obtenga en forma simple el famoso resultado $J = W/\omega$ como sigue: Suponga que la onda plana es producida por una lámina de cargas que se mueven en círculos similares. Cada carga está obligada a moverse en un círculo de radio fijo r mediante un tubo sin fricción. Las cargas van más despacio cuando pierden energía. Por lo tanto sus velocidades angulares disminuyen, su energía disminuye, y su momento angular disminuye, todo debido a la pérdida de radiación. (Sin embargo, siempre mantiene $v \ll c$.) Muestre que la pérdida de momento angular de las cargas moviéndose en círculos es ω^{-1} veces la pérdida de energía. Q. E. D.

7.23 ¿Cuáles son los promedios temporales de flujo de energía, densidad de energía y momento lineal por unidad de volumen en un haz de luz, uniforme, monocromático de intensidad 1000 vatios/ cm^2 ?

7.24 Un electrón oscila armónicamente con una amplitud de 10^{-8} cm y una frecuencia de 10^{14} Hz; ¿cuál es el promedio total de potencia irradiada?

Resp. Aproximadamente $1/3 \times 10^{-10}$ erg/seg.

7.25 ¿Cómo puede un objeto absorber energía luminosa sin absorber momento lineal? ¿Cómo puede absorber momento lineal con una despreciable absorción de energía? ¿Cómo puede absorber momento angular con absorción despreciable de energía?

7.26 Suponga que tiene un oscilador superconductor y una antena que emite radiación de microondas con una longitud de onda de 100 cm. En $t = 0$ retira la fuente de potencia que compensaba la energía perdida por radiación. No hay resistencias ordinarias en ninguna parte del circuito. Encuentre el tiempo de decaimiento medio de las oscilaciones armónicas amortiguadas de los electrones en la antena. Use los resultados del Prob. 7.17.

Resp. Sea L la inductancia en el circuito oscilante LC que da la frecuencia de oscilación. Sea l la longitud de la antena ($l \ll \lambda$). Entonces,

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{l^2}{L} \frac{\omega^2}{c^3}.$$

Esto puede ser comparado con la expresión para la inversa del tiempo de vida medio para una sola carga e que tiene masa m :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m} \frac{\omega^2}{c^3}.$$

7.27 Una estación de radio alejada 10 millas hacia fuera, irradia 50 vatios de ondas de radio verticalmente polarizadas. ¿Cuál es el máximo voltaje instantáneo que fuerza a los electrones en su antena receptora, si ésta tiene 20 cm de largo y está orientada verticalmente? Desprecie todas las reflexiones de las ondas desde la tierra, edificios, etc.

7.28 Fuente de luz de Smith-Purcell. Un angosto haz de electrones de energía cinética de 300 kev se propaga con incidencia rasante paralela a la superficie de una red metálica de difracción que tiene hendiduras separadas por $d = 1,67$ micrones. El haz se propaga perpendicular a las hendiduras. La "imagen especular" de la carga inducida que se propaga con un electrón dado, sufre una súbita desviación siempre que encuentra una hendidura, ya que la carga inducida debe seguir a la superficie. Así, una "desviación de radiación" se propaga hacia afuera de cada hendidura cuando el electrón la pasa. Suponga que el observador está en un ángulo θ respecto al haz de electrones donde $\theta = 0$ está lo largo del haz.

(a) Muestre que el observador recibe pulsaciones de radiación con período T entre pulsaciones, donde $T = (d/v - (d \cos \theta)/c)$; muestre que la longitud de onda resulta igual a $d(\beta^{-1} \cos \theta)$.

(b) ¿Esperaría que sea ésta la única longitud de onda observada en un ángulo dado θ ? (Piense acerca del análisis de Fourier de la dependencia temporal de los impulsos radiactivos que llegan a intervalos de tiempo T .)

(c) Halle los valores numéricos para electrones de 300 kev observados en $\theta = 15^\circ$. ¿Qué colores esperaría ver?

(d) ¿Esperaría que la luz estuviera polarizada? Lea ahora sobre los agradables experimentos de S. J. Smith y E. M. Purcell (autor del Vol. II), *Phys Rev.* **92**, 1069 (1953).

7.29 Forma de las ondas de agua estacionarias. En el texto usamos un argumento intuitivo para mostrar que si el desplazamiento vertical en una onda estacionaria tenía una dependencia respecto de x , de $\sin kx$, entonces el desplazamiento horizontal debía tener una dependencia $\cos kx$.

(a) Obtenga el mismo resultado algebraicamente. Suponga

$$\psi_y = \cos \omega t \sin kx f(y),$$

$$\psi_x = \cos \omega t [\cos kx g(y) + \sin kx h(y)].$$

Luego muestre que $h(y)$ debe ser cero.

416 Ondas en dos y tres dimensiones

(b) Muestre que los resultados obtenidos para el movimiento de una gotita de agua en una onda estacionaria corresponden a una oscilación armónica hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una línea recta.

7.30 Suponga que en la superficie del océano hay ondas de propagación con 10 pies de amplitud y una longitud de onda de 30 pies. Si fuera un pez (o un hombre rana), ¿a qué nivel por debajo de la superficie nadaría si quisiera que la amplitud de su movimiento fuera de $1/2$ pie?

Resp. Alrededor de 15 pies.

7.31 Forma de las ondas de agua de propagación. Suponga que ψ_y tiene la forma

$$\psi_y = A \cos(\omega t - kx)f(y),$$

donde $f(y)$ es una función desconocida de y . Suponga ahora que el agua se conserva, es incompresible y no tiene burbujas, para demostrar que ψ_y y ψ_x están dadas por las ecuaciones (75) y (76) de la Sección 7.3.

7.32 La ley de dispersión para las ondas de agua, ecuación (72), Sección 7.3, fue obtenida cuando estábamos considerando ondas estacionarias. ¿Cuál es la ley de dispersión para ondas de propagación?

7.33 Ley de dispersión para ondas de tensión superficial. La superficie del agua actúa como una membrana elástica. En el equilibrio, la tensión a lo largo de x es la tensión superficial constante, $T = 72$ dynas/cm, por la longitud L a lo largo de la “poco interesante” dirección z . Si la superficie tiene una curvatura convexa, la tensión superficial contribuye con una presión hacia abajo. Demuestre que, para una onda sinusoidal, la presión hacia abajo está dada por

$$p = Tk^2\psi_y.$$

Muestre que el peso gravitatorio del agua da una presión que es constante (el valor en el equilibrio) más una contribución:

$$p = \rho g\psi_y.$$

Muestre que la contribución a la fuerza restauradora por unidad de masa y por unidad de desplazamiento, ω^2 , debida a la tensión superficial puede obtenerse del resultado para la fuerza gravitatoria reemplazando ρg por Tk^2 . Muestre entonces que la ley completa de dispersión está dada por

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{T}{\rho}k^3\right)\left[\frac{1 - e^{-2kh}}{1 + e^{-2kh}}\right].$$

7.34 Ondas electromagnéticas planas. Demuestre que, para ondas electromagnéticas planas en el vacío, las ecuaciones de Maxwell que dan la relación entre E_x y B_y son “equivalentes” a las que relacionan E_x con B_y en el sentido de que un grupo de ecuaciones puede ser obtenido del otro simplemente rotando en 90° el sistema de coordenadas alrededor del eje z (que es el eje de propagación). Haga un esquema mostrando las orientaciones de \mathbf{E} , \mathbf{B} y los ejes x e y .

7.35 Ondas electromagnéticas estacionarias en el vacío. Demuestre que si $E_x(z,t)$ es la onda estacionaria $E_x = A \cos \omega t \cos kz$, entonces $B_y(z,t)$ es la onda estacionaria $A \sin \omega t \sin kz$.

7.36 Relaciones energéticas en ondas electromagnéticas estacionarias. Considere una onda estacionaria de la forma dada en el Prob. 7.35. Encuentre las densidades de energía eléctrica y magnética y el vector de Poynting como funciones del espacio y el tiempo. Considere una región de longitud $(1/4)\lambda$ que se extiende desde un nodo en E_x a un antinodo en E_x . Esquematice un gráfico de E_x y B_y versus z , sobre esa región, para los tiempos $t = 0$, $T/8$ y $T/4$. Haga un gráfico de la densidad de energía eléctrica, la densidad de energía magnética y la densidad de energía total para esa región, para los mismos tiempos. De la dirección y magnitud del vector de Poynting S_z para esos mismos tiempos.

7.37 Sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para ondas en una cuerda. Considere una cuerda homogénea y continua, de densidad lineal de masa ρ_0 y tensión de equilibrio T_0 . Como se sabe, tal tipo de cuerda puede llevar ondas no dispersivas con velocidad $v = \sqrt{T_0/\rho_0}$. Defina las cantidades ondulatorias $F_1(z,t)$ y $F_2(z,t)$ como sigue:

$$F_1(z,t) \equiv -\frac{T_0}{v} \frac{\partial \psi_x}{\partial z}, \quad F_2(z,t) \equiv \rho_0 \frac{\partial \psi_x}{\partial t}.$$

De este modo, F_1 es $1/v$ veces la fuerza de retorno transversal ejercida en la porción de la cuerda a la derecha de z por aquella a la izquierda de z , y F_2 es el momento transversal por unidad de longitud. Demuestre que F_1 y F_2 satisfacen el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\frac{1}{v} \frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{1}{v} \frac{\partial F_2}{\partial t} = -\frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

Muestre que una de estas ecuaciones es “trivial”, es decir, que esencialmente es una identidad. Muestre que la otra es equivalente a la segunda ley de Newton. Note que estas ecuaciones son de forma similar a las dos ecuaciones de Maxwell que relacionan E_x y B_y , con E_x análogo a F_1 y B_y a F_2 . Similarmente, una de las dos ecuaciones de Maxwell puede ser considerada como una “identidad trivial”, si uno conoce la teoría especial de la relatividad.

7.38 Encuentre cantidades ondulatorias adecuadas $F_1(z,t)$ y $F_2(z,t)$ para ondas longitudinales en una cuerda con cuentas, de tal modo que F_1 y F_2 satisfagan un sistema de ecuaciones de primer orden de la misma forma que el del Problema 7.37. Haga lo mismo para ondas de sonido y para ondas electromagnéticas en una línea de transmisión. (En este último caso, el sistema de ecuaciones no es simplemente “de forma similar” a las ecuaciones de Maxwell, éstas *son* ecuaciones de Maxwell expresadas en términos de corrientes y voltajes en vez de los campos E_x y B_y .)

7.39 Demuestre, por integración directa, que el valor promedio de $\sin^2 \theta$, promediado sobre todas las direcciones, es $2/3$, donde θ es el ángulo entre una dirección dada y un eje fijo, el eje “polar”, y donde cada ángulo sólido infinitesimal lleva un “peso” (en el promedio) proporcional al ángulo sólido. Use coordenadas esféricas polares para realizar la integración.

7.40 Espejismos en la carretera. Viajando en un caluroso día de verano, a menudo se ve, a lo lejos, lo que parecerían lagunas que reflejan el cielo o la parte delantera de un coche que se aproxima. Cuando se va acercando, los reflejos desaparecen súbitamente, cuando el ángulo de reflexión (medido desde la superficie de la carretera) se hace mayor que un cierto ángulo crítico. Estos

reflejos o “espejismos” se deben a *reflexión interna total* de la luz incidente desde el aire frío (el medio más denso) al aire más cálido cercano al pavimento caliente. El aire más caliente es menos denso y tiene menor índice. (Recalcamos que $n^2 - 1$ es proporcional a la densidad del aire.) Suponga que el aire cercano al pavimento es más caliente, en una cantidad ΔT , que el aire a varias pulgadas por encima del mismo. Considere, como una aproximación, que el cambio de temperatura es brusco. Tome la temperatura del aire frío como de $T = 300^\circ\text{K}$ (grados Kelvin), y el incremento ΔT como 10°C cerca del pavimento. El índice de refracción n del aire es alrededor de 1,0003. Sea φ el ángulo de incidencia de un rayo en el ángulo crítico para reflexión interna total, con φ medido desde el pavimento, esto es, φ es 90° menos el ángulo de incidencia medido desde la normal al pavimento. Considerando que $n - 1 \ll 1$, obtenga la fórmula $\varphi \approx [2(n - 1)\Delta T/T]^{1/2}$ para $\varphi \ll 1$. Si sus ojos están 4 pies por encima del pavimento, ¿a qué distancia verá el borde más cercano de la aparente “laguna de agua”?

Resp. Aproximadamente a 1000 pies..

7.41 Guía de ondas. Una guía de ondas rectangular tiene dimensiones internas transversales de 5×10 cm.

(a) ¿Cuál es la frecuencia en megaciclos por seg de la onda electromagnética que pasará a través de la guía sin ser atenuada?

(b) Muestre con un esquema la dirección y variación con la posición del campo eléctrico para esa onda.

(c) Encuentre la velocidad de fase y de grupo. (Expresado como un múltiplo de c) para una onda con frecuencia igual a $5/4$ de la menor frecuencia que es transmitida sin atenuación.

(d) Encuentre la longitud media de atenuación para una onda con frecuencia $4/5$ de la menor frecuencia no atenuada.

7.42 Coeficiente de reflexión para campo eléctrico. Dada la analogía de que inductancia por unidad de longitud en una línea de transmisión es equivalente a masa por unidad de longitud para una cuerda estirada, una capacitancia inversa por unidad de longitud es como la tensión de la cuerda, y dado que $C = \epsilon C_{\text{vac}}$ y $L = \mu L_{\text{vac}}$ y que la velocidad de fase para el vacío es c .

(a) Demuestre, por analogía con la cuerda, que el índice de refracción n es $(\epsilon\mu)^{1/2}$ y que la impedancia característica Z es $(\mu\epsilon)^{1/2}$ veces su valor para el vacío en la línea de transmisión. Luego muestre que el coeficiente de reflexión para el campo eléctrico es $R = [1 - (n/\mu)]/[1 + (n/\mu)]$ al pasar desde el vacío al medio. Esto es también el coeficiente de reflexión para el campo eléctrico para ondas planas que inciden normalmente desde el vacío sobre una superficie donde comienza el medio.

(b) Ahora le daremos (o le pediremos que dé) una deducción más rigurosa del coeficiente de reflexión, usando las ecuaciones de Maxwell. Muestre, usando las ecuaciones de Maxwell y una adecuada integración ineal, que el campo eléctrico tangencial es continuo en el límite, siempre que $\partial \mathbf{B}/\partial t$ no sea infinita en ese límite. (No lo es.) Entonces, suponiendo que la onda electromagnética incidente está linealmente polarizada con el campo eléctrico según x , muestre que $E_{x(\text{inc})} + E_{x(\text{ref})} = E_{x(\text{tr})}$.

(c) Use las ecuaciones de Maxwell para un medio tal, como están dadas en el Tema suplementario 9. Considere el campo $\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{M}$. Este campo es igual a $\mathbf{B}\mu$, por definición de μ , y también es llamado \mathbf{H} . Muestre que la componente tangencial de \mathbf{H} es continua, siempre que la derivada parcial respecto al tiempo de $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ no sea infinita. (No lo es.) Muestre que para una onda incidente desde el vacío $B_{y(\text{inc})} + B_{y(\text{ref})} = (1/\mu) B_{y(\text{tr})}$. Ahora use el hecho de que, en el medio, B_y es n veces E_x , y use la relación entre B_y y E_x en las ondas incidentes y reflejadas para obtener el coeficiente de reflexión $R = E_{x(\text{ref})}/E_{x(\text{inc})}$. Muestre que $R = [1 - (n/\mu)]/[1 + (n/\mu)]$.

Capítulo 8

Polarización

8.1	Introducción	420		
8.2	Descripción de estados de polarización	421		
	Polarización de ondas transversales	422	Propiedades de los estados de polarización transversales	427
	Carga puntual efectiva	422	Polarización transversal general — polarización elíptica	428
	Polarización lineal	423	Notación compleja	429
	Ondas estacionarias linealmente polarizadas	424	Funciones de onda complejas y amplitudes complejas	430
	Ondas progresivas linealmente polarizadas	424	Funciones de onda ortonormales	430
	Polarización circular	425	Flujo de energía promediado en el tiempo en notación compleja	430
	Ondas estacionarias circularmente polarizadas	426	Otras representaciones completas de luz polarizada	431
	Ondas progresivas circularmente polarizadas	426	Representación de polarización circular	431
	Convenciones de giro para ondas progresivas circularmente po- larizadas	426		
8.3	Producción de ondas polarizadas transversales	434		
	Polarización por emisión selectiva	434	Depolarización por dispersión múltiple	442
	Polarización por absorción selectiva	435	Polarización por reflexión especular — ángulo de Brewster	443
	Alambrado paralelo	435	Relaciones de fase para luz reflejada especularmente	444
	Polaroide	437	Relaciones de intensidad para luz reflejada especularmente	446
	Polarizador perfecto — Ley de Malus	439	Ventana de Brewster para un laser	446
	Polarización por dispersión simple	440	Polarización del arco iris	447
8.4	Doble refracción	447		
	Celofán	447	Tabla 8.1: Algunos cristales uniaxiales	453
	Ejes rápido y lento de una lámina de retardo	448	Actividad óptica	453
	Retardo de fase relativa	449	Primer gran descubrimiento de Pasteur	454
	Lámina cuarto de onda	450	Reflexión metálica	455
	Propiedades de las láminas de retardo	450		
8.5	Ancho de banda, tiempo de coherencia y polarización	455		
	Átomo clásico emitiendo radiación polarizada	456	Medición de cuatro constantes	460
	Duración del estado de polarización	456	Polarizador circular	462
	Tiempo de coherencia	458	Lámina cuarto de onda y lámina media onda	463
	Definición de luz no polarizada	459	Luz no polarizada	464
	Mediciones de polarización	459	Polarización parcial	465
	Tiempo de medición	460		
	Problemas y experimentos caseros	466		

Capítulo 8 Polarización

8.1 Introducción

En el Capítulo 7 aprendimos que los campos eléctrico y magnético en ondas electromagnéticas planas eran transversales a la dirección de propagación \hat{z} . Hay dos direcciones transversales, \hat{x} e \hat{y} , y los campos con una orientación con respecto a \hat{x} e \hat{y} son independientes de aquéllos con una orientación que difiere en 90° . Es posible, por lo tanto, tener varias cantidades (amplitudes) de los campos en cada una de las dos direcciones transversales y varias fases relativas posibles. Se llama *estado de polarización* a una relación específica de las amplitudes y fases de los dos campos transversales independientes.

Cuando las ondas electromagnéticas chocan (e interactúan) con la materia, a menudo ocurre que diferentes estados de polarización de la radiación incidente no interactúan con la materia en la misma forma. Por ejemplo, podríamos encontrar un material en el cual las partículas cargadas pueden moverse libremente a lo largo de \hat{x} , pero no pueden moverse para nada según \hat{y} . En ese caso, E_x puede realizar trabajo sobre las partículas cargadas, pero E_y , no. Entonces la energía de las ondas electromagnéticas asociada con E_x puede ser reducida siendo convertible en energía cinética de las partículas cargadas, y, por lo tanto, por colisiones entre partículas, en energía calórica, mientras que la amplitud de E_y no es afectada. O, en cambio, puede sólo ocurrir que la fase de E_x se corra respecto a la de E_y , sin ninguna disminución de energía (o sea, sin disminución de la amplitud de E_x). En todos esos casos de *interacción asimétrica*, el estado de polarización de la radiación electromagnética es modificado por la interacción. Este hecho tiene muchas consecuencias importantes. Estudiando el efecto de materiales bien conocidos sobre un haz incidente de estado de polarización desconocido, éste puede ser determinado. Inversamente, midiendo la modificación de una polarización conocida producida por un material se puede aprender algo acerca del material. Por ejemplo, la dirección del campo magnético en “nuestro” brazo de nuestra galaxia espiralada está siendo ahora relevada por medición de la dirección de polarización de ondas de radio de fuentes extragalácticas como función de la dirección de la fuente y de la longitud de onda de la radiación [G. L. Berge y G. A. Seielstad, *Scientific American*, p. 46, (junio de 1965)].

Es importante que el concepto de polarización se aplique solamente a ondas que tengan por lo menos dos “direcciones de polarización” independientes. Considérese, por ejemplo, una onda de sonido que se propaga en el aire en la dirección \hat{z} . Una vez que se conocen la frecuencia, amplitud y constante de fase para esa onda, ya no queda nada por espe-

cificar. Sabemos que el desplazamiento del aire en una onda de sonido tiene lugar a lo largo de la dirección de propagación —las ondas son longitudinales. Sin embargo, no es común decir que estas ondas son “longitudinalmente polarizadas”; eso sería una pobre terminología. Reservamos el término *estado de polarización* para describir ondas para las cuales hay por lo menos dos direcciones de polarización alternativas. En los casos de ondas de sonido en un *sólido* o de ondas sobre un resorte, hay tres estados de polarización posibles —son válidas una dirección de polarización longitudinal y dos transversales. En tal caso se puede tener una onda polarizada longitudinalmente y dos ondas diferentes polarizadas transversalmente (o una superposición general de las tres polarizaciones).

8.2 Descripción de estados de polarización

Todas las ondas que estudiamos consisten en alguna cantidad física cuyo desplazamiento desde su valor de equilibrio puede describirse mediante un vector $\psi(x, y, z, t)$. Usualmente estudiamos ondas planas para las cuales ψ tiene la forma $\psi(z, t)$, donde z es medido a lo largo de la dirección de propagación. (Aquí incluimos ambos tipos, ondas estacionarias y ondas progresivas.) Las cantidades $\partial\psi(z, t)/\partial t$ y $\partial\psi(z, t)/\partial z$ son a menudo las cantidades que presentan las propiedades físicas más interesantes. Hemos visto que éste es el caso para ondas en una cuerda y para ondas de sonido, donde en cada caso $\psi(z, t)$ designa el desplazamiento de las partículas del medio fuera de sus posiciones de equilibrio.

Para ondas planas propagándose a lo largo de z , podemos poner el desplazamiento como:

$$\psi(z, t) = \hat{x}\psi_x(z, t) + \hat{y}\psi_y(z, t) + \hat{z}\psi_z(z, t). \quad (1)$$

En el caso de ondas transversales en una cuerda, ψ tiene sólo componentes x e y . Se dice que tales ondas tienen polarización transversal. (En realidad, se puede tener también ondas longitudinales en una cuerda, consistentes en variaciones de la tensión y de la velocidad longitudinal de las partículas de la cuerda.) Para ondas de sonido en el aire, el desplazamiento ψ está a lo largo de la dirección de propagación \hat{z} . Éstas se llaman ondas longitudinales pero no son usualmente denominadas longitudinalmente polarizadas. (En realidad, es posible tener ondas de sonido transversales, dentro de un tubo. Estas ondas transversales pueden pensarse como ondas longitudinales que no vuelven por el tubo sino que más bien rebotan de un lado del tubo al otro. La dirección de propagación neta es hacia abajo en el tubo, pero las oscilaciones del aire tienen componentes transversales así como longitudinales.) En el caso de ondas electromagnéticas planas, el desplazamiento ψ es transversal a \hat{z} , como vimos en la Sección 7.5. Encontramos allí que \mathbf{E} y \mathbf{B} son siempre transversales a \hat{z} para ondas planas en el vacío. (Es posible

tener componentes longitudinales de \mathbf{E} y \mathbf{B} si, por ejemplo, las ondas están encerradas en una guía de ondas o en una cavidad.)

Polarización de ondas transversales. Desde ahora en adelante consideraremos ondas transversales de la forma

$$\psi(z,t) = \hat{x}\psi_x(z,t) + \hat{y}\psi_y(z,t). \quad (2)$$

Tendremos presente dos ejemplos físicos para la discusión que sigue: uno es de ondas transversales en un resorte estirado; el otro de ondas planas en el vacío. Para ondas en una cuerda, $\psi(z,t)$ indicará el desplazamiento transversal instantáneo de la cuerda de su posición de equilibrio. Las otras cantidades físicas interesantes son la velocidad transversal $\partial\psi/\partial t$ y la fuerza transversal $-T_0 \partial\psi/\partial z$ ejercida por la cuerda de la izquierda de la posición z sobre la de la derecha de z . Éstas son conocidas si $\psi(z,t)$ es conocida. Para ondas planas electromagnéticas, $\psi(z,t)$ indicará el campo eléctrico transversal $\mathbf{E}(z,t)$. La otra cantidad física interesante es el campo magnético transversal $\mathbf{B}(z,t)$, que es conocido si $\mathbf{E}(z,t)$ es conocido. Por ejemplo, siempre podemos resolver un $\mathbf{E}(z,t)$ general en una superposición de ondas progresivas viajando en ambas direcciones, $+z$ y $-z$. Siendo \mathbf{E}^+ la parte de \mathbf{E} aportada por las ondas progresivas en la dirección $+z$ y \mathbf{E}^- la parte aportada por las ondas que viajan en la dirección $-z$, podemos escribir

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}^+(z,t) + \mathbf{E}^-(z,t). \quad (3)$$

Entonces de nuestro estudio de ondas progresivas (Sec. 7.4) sabemos que el campo magnético \mathbf{B}^+ que corresponde a \mathbf{E}^+ es igual a $\hat{z} \times \mathbf{E}^+$, y que el campo magnético \mathbf{B}^- correspondiente a \mathbf{E}^- es igual a $-\hat{z} \times \mathbf{E}^-$. Así el campo magnético correspondiente a la ecuación 3 de superposición es

$$\mathbf{B}(z,t) = \hat{z} \times [\mathbf{E}^+(z,t) - \mathbf{E}^-(z,t)]. \quad (4)$$

Haremos ahora uso explícito de la ecuación (4). Sólo deseábamos demostrarle (o recordarle) que \mathbf{B} es conocido “automáticamente” (en el sentido en que las ecuaciones de Maxwell son “automáticas”) una vez que \mathbf{E} es conocido (suponiendo que sabemos que tenemos ondas planas en el vacío.)

Carga puntual efectiva. Otro cuadro físico que resulta de gran ayuda en el caso de ondas planas electromagnéticas es el obtenido si pensamos en las ondas planas como emitidas por una carga puntual que oscila armónicamente en el origen de coordenadas, la cual se supone que está suficientemente lejos, de modo que las ondas irradiadas son ondas pla-

nas con una aproximación suficientemente buena. Si el desplazamiento transversal de la carga q es indicado por

$$\psi(t) = \hat{x}x(t) + \hat{y}y(t) = \hat{x}x_0 \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{y}y_0 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (5)$$

entonces sabemos de nuestra discusión de la radiación de una carga puntual (Sec. 7.5), que el campo eléctrico $\mathbf{E}(z, t)$ está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= -\frac{q\mathbf{a}_\perp(t')}{rc^2} \\ &= -\frac{q\ddot{\psi}(t')}{zc^2}. \end{aligned}$$

Dado que $\ddot{\psi} = -\omega^2\psi$, tenemos

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{q\omega^2\psi(t')}{zc^2} = \frac{q\omega^2\psi\left(t - \frac{z}{c}\right)}{zc^2}. \quad (6)$$

Así, cuando estamos considerando ondas electromagnéticas planas progresivas, podemos pensar que $\psi(z, t)$ indica el campo eléctrico $\mathbf{E}(z, t)$, como alternativamente podemos pensarlo como indicando (aparte de la constante de proporcionalidad $q\omega^2/zc^2$) el desplazamiento de una carga positiva q en el instante retardado anterior $t' = t - z/c$. Aún si $\mathbf{E}(z, t)$ no es producido realmente por una carga sola q , podemos “inventar” la carga q , definiéndola por la ecuación (6). (Faltando algún dato explícito de la fuente de radiación, no podemos decir que la radiación *no* es producida por la carga puntual efectiva q .)

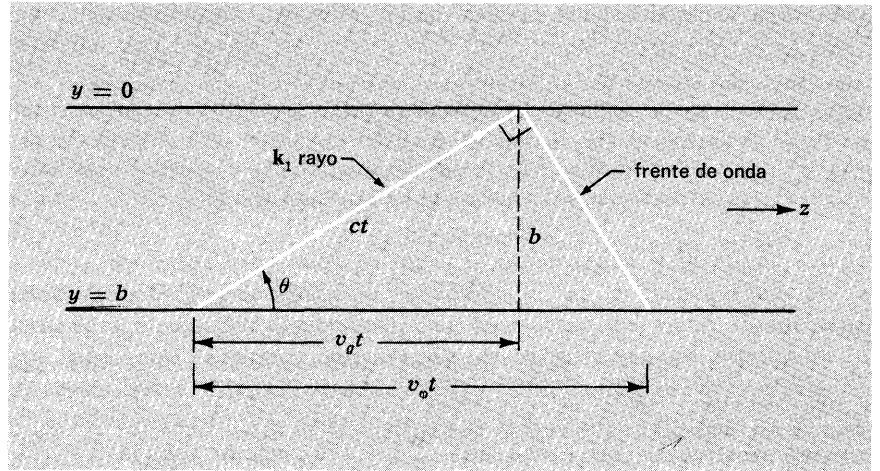
Polarización lineal. En el caso de ondas transversales (ondas planas electromagnéticas y ondas transversales en una cuerda), si el desplazamiento es una oscilación hacia atrás y adelante de una línea transversal a \hat{z} fija, se dice que las ondas están *linealmente polarizadas*. Hay dos direcciones transversales independientes. Éstas pueden tomarse \hat{x} e \hat{y} . Consideremos un valor fijo de z . Entonces las oscilaciones correspondientes a una onda plana linealmente polarizada puede tener una u otra de las formas

$$\psi(t) = \hat{x}A_1 \cos \omega t, \quad (7)$$

$$\psi(t) = \hat{y}A_2 \cos \omega t, \quad (8)$$

donde hemos suprimido z de la notación y hemos hecho cero la constante de fase. En forma más general, podemos tener una oscilación linealmente polarizada a lo largo de una línea que no es ni \hat{x} ni \hat{y} . Tal oscilación puede escribirse siempre como una superposición de las dos oscilaciones independientes linealmente polarizadas dadas por las ecua-

Fig. 7.2 Una de las ondas entrelazadas en una guía de ondas.



(llamado “rayo en óptica”) que se propaga diagonalmente a través de la guía una distancia ct en un tiempo t , como se muestra en el rayo indicado como “ k_1 ” en la Fig. 7.2. Estamos interesados en la velocidad de fase y en la velocidad de grupo *en la dirección z* . (Sabemos que sólo en esa dirección hay una onda de propagación. El compañero k_2 de la onda k_1 mostrada cancela la parte y de la onda de propagación k_1 , pero tienen la misma parte z .) Mientras el rayo viaja una distancia ct , la intersección del frente de ondas con cualquier valor fijo de y (por ejemplo $y = b$) viaja la distancia indicada $v_\phi t$ en la figura. Esto da la velocidad de fase según z , esto es, la velocidad a la cual viaja según z la cresta de la onda. Observe que, cuando el ángulo θ (como está indicado en la Fig. 7.2) es de 90° , la velocidad de fase tiende a infinito. En general, vemos a partir de la figura, que tenemos

$$v_\phi = \frac{c}{\cos \theta}. \quad (35)$$

La velocidad de grupo es la velocidad de propagación de la energía según z . Si interrumpiéramos alternadamente el paso de la onda, un pulso se propagaría a la velocidad de grupo. El rayo marcado con k_1 llevaría un pulso a la velocidad c diagonalmente a través de la guía. La onda k_2 daría un pulso que cancele la parte y de la onda k_1 . Los pulsos k_1 y k_2 atraviesan una distancia $v_g t$ según z en el tiempo correspondiente a la distancia indicada en la Fig. 7.2. Vemos que tenemos

$$v_g = c \cos \theta. \quad (36)$$

Usando la relación de dispersión podríamos ahora verificar que v_ϕ y v_g , como vienen dadas por las ecuaciones (35) y (36), son correctas. En lu-

reemplazamos ωt por $\omega t - kz$ en el desplazamiento linealmente polarizado para z fijo:

$$\psi(z, t) = (\hat{x}A_1 + \hat{y}A_2) \cos(\omega t - kz). \quad (15)$$

Polarización circular. Si el desplazamiento en una onda transversal es un movimiento en círculo, se dice que las ondas están circularmente polarizadas. Consideremos primero un valor fijo de z . No especificamos (aún) cuando las ondas se propagan a lo largo de $+\hat{z}$ o a lo largo de $-\hat{z}$ (ni tampoco cuando son ondas progresivas). Si el pulgar de su derecha apunta a lo largo de $+\hat{z}$ cuando los dedos giren en la dirección de rotación, entonces se dice que la oscilación es circularmente polarizada a lo largo de $+\hat{z}$. (De la misma manera, usamos la regla de la mano derecha para definir polarización circular a lo largo de $-\hat{z}$.) Una oscilación circularmente polarizada a lo largo de $+\hat{z}$ puede ser expresada como una superposición de una oscilación linealmente polarizada a lo largo de \hat{x} y una oscilación linealmente polarizada a lo largo de \hat{y} con la misma amplitud que la oscilación a lo largo de \hat{x} . Tomando los ejes x, y, z como (es lo usual) un conjunto de ejes según la mano derecha, tal que $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, decimos que para polarización circular a lo largo de $+\hat{z}$, la oscilación \hat{x} *precede* a la oscilación \hat{y} en 90 grados:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \hat{x}A \cos \omega t + \hat{y}A \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \hat{x}A \cos \omega t + \hat{y}A \sin \omega t. \end{aligned} \quad (16)$$

Similarmente, para polarización circular a lo largo de $-\hat{z}$, la oscilación \hat{x} se *retarda* con respecto a la oscilación \hat{y} , en 90 grados:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \hat{x}A \cos \omega t + \hat{y}A \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \hat{x}A \cos \omega t - \hat{y}A \sin \omega t. \end{aligned} \quad (17)$$

De acuerdo con nuestra discusión de las ondas electromagnéticas planas (Sec. 7.4), las ondas planas circularmente polarizadas tienen un momento angular $\mathbf{J} = \pm (W/\omega)\hat{z}$, donde W es la energía, y ω es la frecuencia angular. El signo del momento angular es el mismo que el del sentido de rotación de los campos. Así, el momento angular está a lo largo de $+\hat{z}$ para polarización circular según $+\hat{z}$, y está a lo largo de $-\hat{z}$ para polarización circular según $-\hat{z}$. (En nuestra discusión hasta aquí, \hat{z} es una dirección fija en el espacio. La discusión anterior se cumple para cualquier dirección de propagación de ondas progresivas; se cumple también para ondas estacionarias.) Las ondas circularmente polarizadas en una cuerda o resorte tienen también, por supuesto, momento angular.

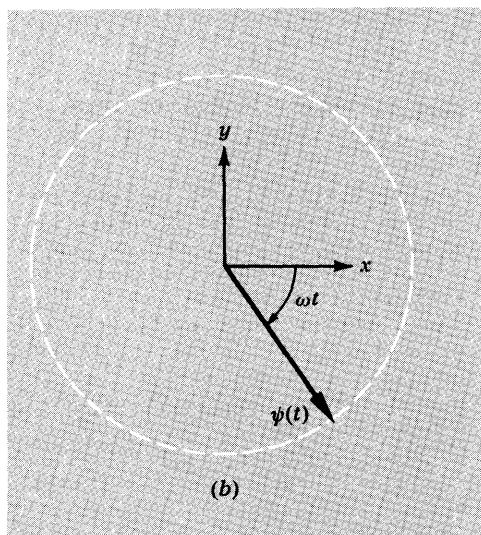
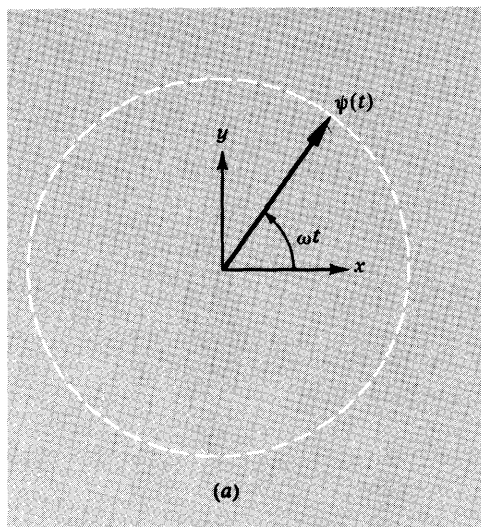


Fig. 8.2 Polarización circular. (a) Polarización circular y momento angular a lo largo de $+\hat{z}$, donde \hat{z} está fijo en el espacio y es independiente de la dirección de propagación. (b) Polarización circular y momento angular a lo largo de $-\hat{z}$.

El desplazamiento $\psi(t)$ para oscilación circularmente polarizada se muestra en la Fig. 8.2.

Ondas estacionarias circularmente polarizadas. Una onda estacionaria circularmente polarizada, con polarización (y momento angular) a lo largo de $+\hat{z}$, se obtiene multiplicando la oscilación circularmente polarizada para z fijo [dado por la ecuación (16)] por una función senoidal de z . Así, para una onda estacionaria con un nodo en $z = 0$ (por ejemplo) y polarización circular a lo largo de $+\hat{z}$, tenemos

$$\psi(z,t) = \left[\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right] A \sin kz. \quad (18)$$

Ondas progresivas circularmente polarizadas. Una onda progresiva circularmente polarizada, con polarización circular (y momento angular) a lo largo de $+\hat{z}$ se obtiene más fácilmente reemplazando ωt por $\omega t - kz$ (para propagación a lo largo de $+\hat{z}$) en la oscilación circularmente polarizada dada por la ecuación (16):

$$\psi(z,t) = A \left\{ \hat{x} \cos [\omega t - kz] + \hat{y} \cos \left[\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) - kz \right] \right\}. \quad (19)$$

Similarmente, si deseamos una onda con momento angular a lo largo de $-\hat{z}$, reemplazamos ωt por $\omega t - kz$; si deseamos una onda con momento angular a lo largo de $-\hat{z}$, partimos de la oscilación circularmente polarizada dada por la ecuación (17) y hacemos reemplazos semejantes de ωt por $\omega t - kz$ o $\omega t + kz$.

Convenciones de giro para ondas progresivas circularmente polarizadas. Supongamos que tenemos una onda progresiva circularmente polarizada propagándose en la dirección $+\hat{z}$. Supongamos que su momento angular esté también en la dirección $+\hat{z}$ y, por lo tanto, el sentido de rotación de los campos (para ondas electromagnéticas) o de los desplazamientos (para ondas en un resorte) está a lo largo de $+\hat{z}$, como resulta de la regla de la mano derecha. Es natural llamar a tal polarización “dextrógira”; llamaremos a esta convención la *convención del momento angular*. De acuerdo con la convención del momento angular, una onda progresiva circularmente polarizada se dice dextrógira si su momento angular está en la dirección de propagación y se llama levógira si el momento angular es opuesto a la dirección de propagación. Esta convención es, sin embargo, opuesta a la convención acostumbradamente usada en óptica. Por ejemplo, es opuesta a la convención usada para denominar el polarizador circular de sus cajas de herramientas ópticas como “levógiro”. La *convención óptica* puede ser llamada la “convención con forma de tornillo” o simplemente la *convención del tirabuzón*. Su justificación puede obtenerse considerando la emisión de una

onda progresiva circularmente polarizada, en un resorte que agitamos. Supongamos que se agita un extremo de un resorte en un movimiento circular rápido, que es en el sentido de giro de las agujas del reloj visto desde donde nos hallamos. Un paquete de ondas circularmente polarizadas, bajan por el resorte, alejándose de nosotros. Su sentido de rotación es el de las agujas del reloj; el momento angular está a lo largo de la dirección de propagación. La onda es dextrógira por la convención del momento angular. Ahora “frenemos el movimiento” con una instantánea mental, y veamos la forma instantánea del resorte. ¿Es un tornillo dextrógiro o levógiro? La convención óptica es permitir que el giro del tornillo sea utilizado para designar el giro de la polarización. ¡Desgraciadamente el giro es el de un tornillo levógiro! (Para ver esto, pensemos en el movimiento de la mano y el resorte y en cómo ha sido emitida la onda. Dibujemos la presente configuración del resorte cerca de la mano. El resorte, un poco más allá de la mano, tiene una posición angular presente correspondiente a la posición de la mano en un instante algo anterior —éste se queda atrás de la actual posición de la mano. El resorte, lejos aún de la mano, se retrasa todavía más, desde que sus ondas fueron emitidas más temprano aún. A medida que se avanza por el resorte en un tiempo fijo, se va trazando un tornillo levógiro.) Así la convención del tornillo, asigna dosificación de giro opuesto a la asignada en la convención del momento angular. La convención del momento angular es más fácil de recordar. La convención óptica es retenida más fácilmente si nos acordamos de que es un tornillo.

Es instructivo tener una experiencia tangible de distintas polarizaciones transversales jugando con un resorte. Para obtener ondas estacionarias, unamos un extremo a un poste telefónico y agitemos el otro extremo. Para simular un extremo “libre”, unamos una punta del resorte a una cuerda de unos 30 pies, y el otro extremo de la cuerda al poste. Será fácil generar ondas estacionarias lineal o circularmente polarizadas. Las ondas progresivas armónicas son difíciles de generar, a raíz de que no es fácil conseguir un cable-resorte con una impedancia apareada a una carga resistiva. [Sospecho que la combinación de una cuerda larga (con un extremo “libre”) con pistones de espuma de estireno apropiados (sin masa) o batiendo el agua de un cubo, pueden servir para el caso.] Sin embargo, podemos enviar fácilmente una pulsación o un paquete de ondas hacia abajo por el resorte y seguirlo cuando se refleja en el extremo fijo o en el libre.

Propiedades de los estados de polarización transversales. Jugando con un resorte o estudiando las ecuaciones anteriores, pueden verificarse las siguientes propiedades de los estados de polarización transversales (las cuales se cumplen también para ondas electromagnéticas planas):

1. En una onda linealmente polarizada, el desplazamiento en z fijo pasa por cero dos veces por ciclo.

En una onda estacionaria, todos los puntos pasan por cero simultáneamente.

En una onda progresiva, todos los puntos realizan el mismo movimiento que los demás, pero con un corrimiento de fase correspondiente al tiempo de propagación de la onda entre los puntos.

2. En una onda estacionaria o progresiva circularmente polarizada, el desplazamiento en z fijo tiene magnitud constante

Si el resorte transmite una onda progresiva circularmente polarizada, una instantánea en un instante fijo t mostrará que el resorte tiene la forma de un sacacorchos.

Si, en cambio, transmite una onda estacionaria circularmente polarizada el resorte está siempre en un plano. Una instantánea simple no puede distinguir esta forma de la de una onda estacionaria linealmente polarizada o la de una onda progresiva linealmente polarizada. (Una segunda instantánea, tomada un instante después, combinada con la primera instantánea, nos dirá cuál de estas tres posibilidades es la que tenemos.)

3. La reflexión en un extremo de un paquete de ondas que recorre un resorte, con polarización circular a lo largo de $+\hat{z}$ (una dirección fija en el espacio) de una onda reflejada con polarización circular a lo largo de la misma dirección. Esto es verdad para reflexión desde el extremo fijo o el libre (o cualquier otra clase de carga). Así el sentido de la rotación con respecto a la dirección fija \hat{z} es conservado bajo reflexión. Esto surge directamente de la conservación del momento angular. Un extremo fijo o libre de un resorte no puede ejercer un impulso rotativo y, por lo tanto, el momento angular con respecto al eje fijo $+\hat{z}$ se conserva bajo reflexión. Por supuesto, el giro es invertido a raíz de que la dirección de propagación es invertida en la reflexión. La radiación electromagnética tiene el mismo comportamiento que el resorte. Con esto significamos que el sentido de rotación con respecto a una dirección fija \hat{z} de luz circularmente polarizada, o microondas, o cualquier otra radiación electromagnética, no es cambiada por una reflexión de 180 grados, pero el giro, es decir, el sentido de rotación con respecto a la dirección de propagación, es invertido. El hecho de que el giro de la luz es invertido bajo reflexión no es nuevo. Ya sabemos que si miramos nuestra mano derecha en un espejo la vemos como una mano izquierda. Esto no parece obvio relacionado, con la conservación (bajo reflexión desde un espejo) del sentido de rotación de luz circularmente polarizada con respecto a una dirección fija \hat{z} , pero en realidad está relacionado. Ambas pueden ser pensadas como el resultado de la conservación del momento transversal a $+\hat{z}$ en la interacción de la onda con el medio reflectante, es decir, la pared en el caso del resorte o los electrones en el caso de la radiación electromagnética. (Véase Experimento casero 8.27.)

Polarización transversal general — polarización elíptica. Para un z fijo, una oscilación polarizada transversalmente, en general, tiene la forma

$$\psi(t) = \hat{x}A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{y}A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (20)$$

Si φ_2 es igual a φ_1 , o a $\varphi_1 \pm \pi$, tenemos polarización lineal. Si φ_2 es $\varphi_1 - \frac{1}{2}\pi$ y A_2 es igual a A_1 tenemos polarización circular a lo largo de $+\hat{z}$. Si φ_2 es $\varphi_1 + \frac{1}{2}\pi$ y A_2 es igual a A_1 , tenemos polarización circular a lo largo de $-\hat{z}$. Para el caso general en que A_2 y A_1 son distintas y φ_2 y φ_1 son arbitrarias, el desplazamiento ψ describe un paso elíptico. Podemos ver esto como sigue: Llamemos a ψ_x y ψ_y como x e y . Entonces x es

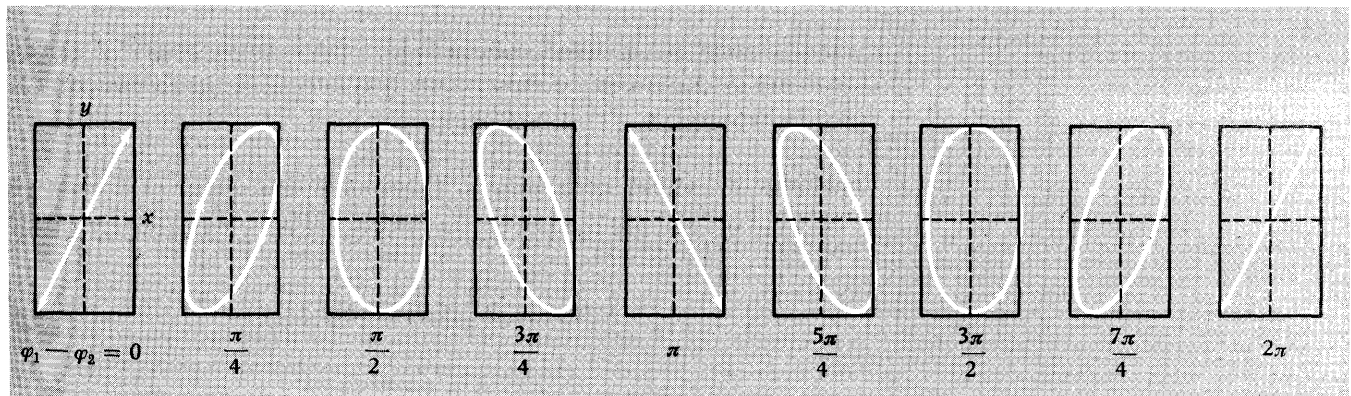


Fig. 8.3 Polarización general. La amplitud para el movimiento y se ha tomado doble que la del movimiento x . El movimiento según y está atrasado respecto del x por la constante de fase indicada, la cual es $\varphi_1 - \varphi_2$.

$A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ e y es $A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Desarrollemos cada coseno, de modo que x es una cierta combinación lineal de $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$, e y es otra combinación lineal. Ahora resolvamos estas dos combinaciones para $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$. Encontraremos así que $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$ son cada una una combinación lineal (diferente) de x e y . Sumemos ahora los cuadrados de $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$. El resultado (que es 1) es una expresión cuadrática que incluye x^2 , y^2 y xy . Tal expresión se llama sección cónica. Si los valores posibles de x e y tienen magnitud limitada (como aquí), la sección cónica es una elipse. (Véase Prob. 7.1.) En la Fig. 8.3 mostramos qué sucede cuando variamos la fase relativa $\varphi_1 - \varphi_2$ en la ecuación (20). [Puede demostrarse el efecto de fase relativa en polarización utilizando una cinta de celofán. (Véase Experimento casero 8.16.)]

Notación compleja. Cuando hay varias constantes de fase en una superposición de ondas, a veces conviene usar números complejos. Ilustraremos esto considerando una onda electromagnética progresiva armónica, propagándose en la dirección $+\hat{z}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z,t) &= \hat{x}E_x(z,t) + \hat{y}E_y(z,t) \\ &= \hat{x}E_1 \cos(kz - \omega t - \varphi_1) + \hat{y}E_2 \cos(kz - \omega t - \varphi_2). \end{aligned} \quad (21)$$

El campo eléctrico dado por la ecuación (21) es fácil de identificar como la parte real de la siguiente *función de onda compleja*:

$$\mathbf{E}_c(z,t) = e^{i(kz - \omega t)}(\hat{x}E_1 e^{-i\varphi_1} + \hat{y}E_2 e^{-i\varphi_2}). \quad (22)$$

El hecho de que $\exp i(kz - \omega t)$ puede ser factorizado fuera de toda la expresión completa para \mathbf{E}_c es a veces una ayuda en la evaluación de las expresiones que incluyen la superposición de varias ondas diferentes. Volveremos siempre a los campos eléctricos reales \mathbf{E} antes de aplicar

cualquier resultado a una situación física. (No aparece $\sqrt{-1}$ en las ecuaciones de Maxwell; no existe nada que nos recuerde un campo eléctrico de intensidad $\sqrt{-1}$ volt/cm.)

Funciones de ondas complejas y amplitudes complejas. La cantidad compleja E_c , cuya parte real es el campo eléctrico E , puede pensarse como una superposición

$$E_c(z, t) = A_1\psi_1(z, t) + A_2\psi_2(z, t), \quad (23)$$

donde

$$\psi_1(z, t) = \hat{x}e^{i(kz - \omega t)},$$

$$\psi_2(z, t) = \hat{y}e^{i(kz - \omega t)}, \quad (24)$$

$$A_1 = E_1e^{-i\varphi_1}, \quad A_2 = E_2e^{-i\varphi_2}. \quad (25)$$

Funciones de onda ortonormales. Las funciones de onda ψ_1 y ψ_2 constituyen un *conjunto completo de funciones de onda ortonormales*. El adjetivo “completo” significa que cualquier onda progresiva armónica puede expandirse en una superposición de ψ_1 y ψ_2 con constantes complejas A_1 y A_2 apropiadas. El adjetivo “ortonormal” significa que se tiene:

$$\psi_1^* \cdot \psi_1 = \psi_2^* \cdot \psi_2 = 1, \quad \psi_1^* \cdot \psi_2 = \psi_2^* \cdot \psi_1 = 0, \quad (26)$$

donde el asterisco indica la conjugación compleja (es decir, reemplazando i por $-i$). Así, tenemos

$$\psi_1^* \cdot \psi_1 = [\hat{x}e^{-i(kz - \omega t)}] \cdot [\hat{x}e^{i(kz - \omega t)}] = \hat{x} \cdot \hat{x} = 1.$$

$$\psi_1^* \cdot \psi_2 = [\hat{x}e^{-i(kz - \omega t)}] \cdot [\hat{y}e^{i(kz - \omega t)}] = \hat{x} \cdot \hat{y} = 0.$$

A raíz de las condiciones de ortonormalidad, ecuaciones (26), la magnitud absoluta elevada al cuadrado del vector complejo E_c tiene una expresión muy simple:

$$\begin{aligned} |E_c|^2 &\equiv (E_c^*) \cdot (E_c) \\ &= (A_1^*\psi_1^* + A_2^*\psi_2^*) \cdot (A_1\psi_1 + A_2\psi_2) \\ &= |A_1|^2 + |A_2|^2 \\ &= E_1^2 + E_2^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Flujo de energía promediado en el tiempo en notación compleja. La velocidad de conteo de un fotomultiplicador que detecta un haz de ondas electromagnéticas progresivas es proporcional al flujo de energía del haz promediado en el tiempo. Con más precisión, para frecuencia angular ω un detector con área A y eficiencia de conversión del foto-

cátodo ϵ tendrá un promedio de velocidad de conteo R (en unidades de cuentas por segundo) dado por

$$R = \frac{\langle S \rangle}{\hbar\omega} \cdot A \cdot \epsilon, \quad (28)$$

donde el flujo de energía promediado en tiempo (en erg/cm² seg) es

$$\langle S \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2 \rangle, \quad (29)$$

y

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}^2 \rangle &= \langle (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y)^2 \rangle \\ &= \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_2^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Los factores de $\frac{1}{2}$ en la última línea ecuación (30) resultan del promedio en el tiempo sobre el cuadrado de las oscilaciones armónicas dadas por la ecuación (21)

Comparando las ecuaciones (27) y (30) vemos que si deseamos trabajar con la cantidad compleja \mathbf{E}_c cuya parte real es el campo eléctrico \mathbf{E} , podemos obtener la expresión correcta para el flujo de energía promedio si usamos la unidad de la magnitud absoluta del cuadrado de \mathbf{E}_c en lugar del promedio del cuadrado de \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \text{Re } \mathbf{E}_c \equiv \text{parte real de } \mathbf{E}_c, \quad (31)$$

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} |\mathbf{E}_c|^2, \quad (32)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}^2 \rangle &= \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle, \\ |\mathbf{E}_c|^2 &= |E_{xc}|^2 + |E_{yc}|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Otras representaciones completas de luz polarizada. El estado de polarización más general puede ser representado como una superposición de ondas con polarización lineal a lo largo de \hat{x} y a lo largo de \hat{y} . Por supuesto, hay un número infinito de direcciones (fijas en el sistema inercial) que podemos haber elegido para \hat{x} . Así, hay un número infinito de representaciones de polarización lineal que pueden ser usadas. En notación compleja, podemos decir que hay un número infinito de conjuntos completos de funciones de onda ortonormales ψ_1 y ψ_2 que pueden ser usadas para formar las bases para una superposición (con coeficientes complejos) que den \mathbf{E}_c . Por ejemplo, supongamos que los vectores unitarios \hat{e}_1 y \hat{e}_2 son obtenidos de nuestros \hat{x} e \hat{y} originales, rotando \hat{x} e \hat{y} en un ángulo φ (en la dirección de rotación de \hat{x} a \hat{y}). Entonces se puede demostrar fácilmente que:

$$\hat{e}_1 = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{e}_2 = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi. \quad (34)$$

El conjunto completo de funciones de onda ortonormales correspondiente a la representación de polarización lineal a lo largo de \hat{e}_1 y \hat{e}_2 está dada por:

$$\psi_1 = \hat{e}_1 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \psi_2 = \hat{e}_2 e^{i(kz - \omega t)}. \quad (35)$$

Se puede comprobar fácilmente que ψ_1 y ψ_2 satisfacen las condiciones de ortonormalidad, ecuaciones (26).

Representación de polarización circular. Un estado de polarización general de una onda armónica progresiva puede representarse también como una superposición de componentes circularmente polarizadas, dextrógira y levógira, con amplitudes y constantes de fase apropiadas. Por ejemplo, una onda linealmente polarizada a lo largo de \hat{x} puede escribirse en cualquiera de las formas equivalentes.

$$\mathbf{E} = \hat{x}A \cos(kz - \omega t) \quad (36)$$

o bien

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \frac{A}{2} \left\{ \hat{x} \cos[\omega t - kz] + \hat{y} \cos \left[\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) - kz \right] \right\} \\ & + \frac{A}{2} \left\{ \hat{x} \cos[\omega t - kz] + \hat{y} \cos \left[\left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) - kz \right] \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

(Los términos en \hat{y} tienen igual amplitud y diferencia de fase de 180 grados; se suman a cero.) La representación de \mathbf{E} dada por la ecuación (36) es una representación de polarización lineal con amplitud A . La representación de \mathbf{E} dada por la ecuación (37) es una superposición de componentes circularmente polarizadas, con momento angular a lo largo de $+\hat{z}$ y $-\hat{z}$ y teniendo cada una amplitud $\frac{1}{2}A$. Las expresiones complejas análogas a las ecuaciones (36) y (37) son como sigue

$$\mathbf{E}_c = A\hat{x}e^{i(kz - \omega t)} \quad (38)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_c = & \frac{1}{2}A [\hat{x}e^{i(kz - \omega t)} + \hat{y}e^{i\{kz - [\omega t - (\pi/2)]\}}] \\ & + \frac{1}{2}A [\hat{x}e^{i(kz - \omega t)} + \hat{y}e^{i\{kz - [\omega t + (\pi/2)]\}}] \end{aligned} \quad (39)$$

Usemos ahora las expresiones

$$e^{i(\pi/2)} = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i, \quad (40)$$

$$e^{-i(\pi/2)} = \cos \frac{\pi}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -i$$

para escribir la ecuación (39) en la forma reducida

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{2}A[(\hat{x} + i\hat{y})e^{i(kz-\omega t)}] + \frac{1}{2}A[(\hat{x} - i\hat{y})e^{i(kz-\omega t)}]. \quad (41)$$

Podemos definir ahora un conjunto completo de funciones de onda circularmente polarizadas, ortonormal, por

$$\begin{aligned} \psi_+ &= \left(\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) e^{i(kz-\omega t)} \\ \psi_- &= \left(\frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) e^{i(kz-\omega t)} \end{aligned} \quad (42)$$

Puede comprobarse fácilmente que ψ_+ y ψ_- son ortonormales, es decir, que tenemos

$$\psi_+^* \cdot \psi_+ = \psi_-^* \cdot \psi_- = 1; \quad \psi_+^* \cdot \psi_- = \psi_-^* \cdot \psi_+ = 0. \quad (43)$$

Entonces el estado de polarización más general para onda progresiva armónica puede escribirse de la forma

$$\mathbf{E}_c(z, t) = A_+ \psi_+ + A_- \psi_-, \quad (44)$$

donde A_+ y A_- son constantes complejas. Para el caso especial de polarización compleja correspondiente a la ecuación (38), vemos que A_+ y A_- son

$$A_+ = A_- = \frac{1}{\sqrt{2}}A. \quad (45)$$

El promedio de cuentas R para un fotomultiplicador en un haz de ondas progresivas armónicas puede expresarse en términos de los coeficientes complejos para cualquier conjunto completo de funciones de onda. Así, en lugar de usar la representación de polarización lineal \hat{x} , \hat{y} [ver ecuaciones (28) a través de (33)], podemos usar la representación $+\hat{z}$, $-\hat{z}$ del momento angular

$$R = \frac{\langle S \rangle}{\hbar\omega} A \cdot \epsilon, \quad (46)$$

onde A es el área (*no la amplitud*), ϵ es la eficiencia y

$$\langle S \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2 \rangle, \quad (47)$$

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} |\mathbf{E}_c|^2, \quad (48)$$

$$|\mathbf{E}_c|^2 = |A_+ \psi_+ + A_- \psi_-|^2 = |A_+|^2 + |A_-|^2.$$

Rara vez usaremos funciones de onda complejas. Nuestro propósito al introducir aquí el tema es el de facilitar el reajuste mental requerido para estudiar física cuántica en el Vol. IV. (Las funciones de onda usadas en física cuántica son casi siempre complejas. La raíz cuadrada de -1 aparece explícitamente en las ecuaciones de onda de mecánica cuántica.)

8.3 Producción de ondas polarizadas transversales

En esta sección examinaremos varios métodos para producir el estado de polarización deseado. El control de polarización es más fácil cuando se controla el proceso de radiación, agitando un resorte o emitiendo ondas electromagnéticas con una antena de su propio diseño. Sin embargo, puede suceder que no se tenga control sobre el proceso de radiación. En este caso, cuando se parte de la luz de una lamparilla eléctrica o del sol, el problema es seleccionar de alguna manera un estado de polarización deseado a partir de la complicada superposición de estados diferentes existente. Tal vez las componentes de polarización indeseadas puedan ser absorbidas por una lámina de polaroide. O tal vez se pueda considerar el reflejo de la luz con reflexión despreciable de las componentes de polarización indeseadas y observar la radiación reflejada solamente. Esta clase de reflexión selectiva es lo que nos hace ver el cielo azul y lo que hace que la luz reflejada en el agua, el vidrio o el cemento sea polarizada.

Polarización por emisión selectiva. Cuando se agita un resorte, se controla el estado de polarización de las ondas al controlar la dirección de la agitación. De la misma manera, las ondas de radio o microondas emitidas por una antena tienen polarización dependiente del movimiento de los electrones en la antena. Si la antena es un pedazo recto de alambre, normal a \hat{z} , los electrones oscilando a lo largo del alambre agitan las líneas de fuerza eléctrica en esa dirección, y las ondas electromagnéticas propagadas a lo largo de \hat{z} están linealmente polarizadas con el campo eléctrico paralelo a la antena. Las que son irradiadas en otras direcciones de propagación están linealmente polarizadas a lo largo de la dirección de proyección de la antena perpendicular a la dirección de propagación. Si hay una antena recta a lo largo de \hat{x} y otra a lo largo de \hat{y} , y si ambas son alimentadas por corrientes iguales que tienen la misma fase, la radiación propagada a lo largo de $\pm \hat{z}$, estará linealmente polarizada a lo largo de la dirección entre \hat{x} e \hat{y} en 45 grados. Si la corriente x es igual en amplitud a la corriente y pero con un retardo de 90 grados en la fase, la radiación electromagnética irradiada a lo largo de $+\hat{z}$ o $-\hat{z}$ estará circularmente polarizada con momento angular a lo largo de $+\hat{z}$. La radiación emitida a lo largo de $+\hat{z}$ será dextrógira (por la convención del momento angular); la irradiada a lo largo de $-\hat{z}$ será levógira. La radiación es indistinguible (a una distancia sufi-

cientemente grande) de la que se producirá por una carga única q “equivalente a una carga puntual” que describe un movimiento circular

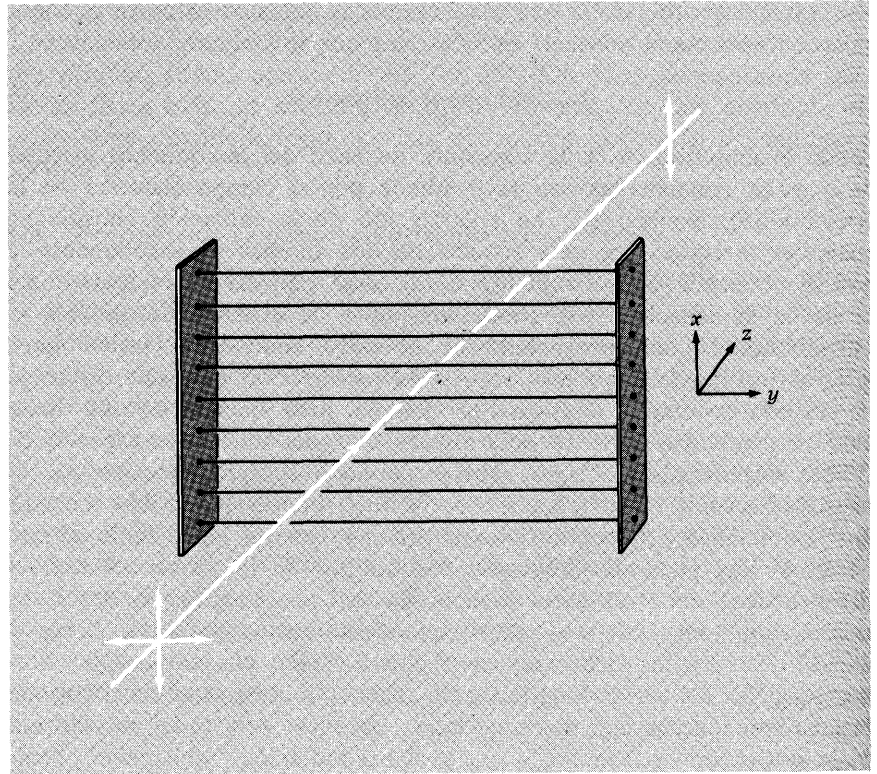
$$\psi = A[\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t], \quad (49)$$

donde la amplitud A (y la constante de fase) del movimiento circular de q están relacionadas con la irradiada por el campo eléctrico de la ecuación (6), Sección 8.2. La polarización de la radiación emitida en cualquier dirección por este sistema de dos antenas es exactamente lo que se obtendría del movimiento de la carga puntual equivalente como se da en la ecuación (49). Desde un punto de observación general, el movimiento circular proyectado de la carga equivalente se ve como (y lo es) un movimiento elíptico. Así, la polarización para una dirección de emisión general es elíptica. Por ejemplo, para emisión en una dirección perpendicular a \hat{z} , la polarización es lineal (un caso especial de “elipse degenerada”). Todos estos resultados surgen directamente de nuestra discusión de la radiación de la carga puntual (Sec. 7.5) son sólo dos condiciones: (i) debemos estar suficientemente lejos de la antena de modo que podamos despreciar los campos de la “zona cercana”, y (ii) la antena debe ser corta comparada con una longitud de onda, de manera que toma sólo una carga equivalente para representar el movimiento de todos los electrones en la antena. (Para una antena que tiene una longitud de varias longitudes de onda, los electrones de diferentes lugares contribuyen con distintas fases; entonces ésta toma más de una carga equivalente y tenemos lo que se llama radiación “multipolar”, como contraste con la radiación “dipolar” obtenida de una carga simple oscilando armónicamente.)

Polarización por absorción selectiva. Si se parte de un estado de polarización general, una forma de producir una polarización dada es librarse las componentes no deseadas de las ondas, arrojándose para que ellas realicen trabajo sobre algunas “partes móviles”, mientras las componentes deseadas no lo hacen. Como un ejemplo, consideremos ondas estacionarias en un resorte. Supongamos que \hat{z} es horizontal (a lo largo del resorte), \hat{y} es vertical y \hat{x} es horizontal. Una barra vertical, sin masa (espuma de estireno) está unida a un pistón sin masa que revuelve agua en un recipiente. El pistón será alimentado por la componente y de las vibraciones. Si partimos de nuestra onda estacionaria que incluye ambas direcciones, x e y en cantidades iguales, las vibraciones y serán rápidamente amortiguadas al ser convertida su energía en calor en el recipiente de agua (siempre que no lo mantengamos agitando).

Alambrado paralelo. En el caso de microondas podemos completar absorción selectiva mediante un alambrado paralelo de alambres conductores colocados a lo largo de \hat{y} , como se muestra en la Fig. 8.4. Supon-

Fig. 8.4 Un enrejado de alambres absorbe las microondas con \mathbf{E} según \hat{y} .



gamos que el campo eléctrico en la radiación electromagnética incidente (radiación de microondas) tiene ambos componentes, x e y . Podemos considerar el efecto de los alambres sobre estas dos componentes separadamente. Consideremos primero la componente y a lo largo de los alambres. El campo eléctrico de la radiación incidente conduce a los electrones a lo largo del alambre. El alambre (si es de cobre o plata o cualquier buen conductor metálico) actúa como una carga resistiva. Los electrones de conducción alcanzan una velocidad final en un tiempo que es corto comparado con el período de las microondas (que podemos tomar con una frecuencia de, por ejemplo, 1000 Mc). El campo eléctrico realiza trabajos sobre los electrones; éstos transfieren algo de su energía a la estructura cristalina del cobre mediante choques. Éstos también irradian. Resulta que sus radiaciones en la dirección opuesta interfiere destructivamente con la radiación incidente y la cancela esencialmente a cero. En la dirección opuesta, la radiación debida a movimiento de los electrones conducidos a lo largo de \hat{y} da una onda reflejada. (En realidad, sólo una pequeña parte de la energía de la radiación incidente con \mathbf{E} a lo largo de \hat{y} es convertida en calor dentro de los alambres. Gran parte es reflejada hacia atrás en la dirección $-\hat{z}$.) Así el alambrado paralelo elimina la componente y .

Consideremos ahora qué sucede a lo largo de \hat{x} . Los electrones no pueden moverse libremente a lo largo de \hat{x} , porque no pueden abandonar el alambre. En lugar de alcanzar una velocidad final estacionaria (como lo hacen para movimiento a lo largo de \hat{y}), los electrones construyen rápidamente una carga superficial a lo largo de los bordes $+x$ y $-x$ del alambre. Cuando el campo debido a la carga superficial es suficiente para cancelar el campo incidente (dentro del alambre), los electrones dejan de moverse. Esto sucede en un lapso corto comparado con el período de las microondas. Así los electrones están siempre en una especie de equilibrio estático (o aproximadamente), sin velocidad ni aceleración. Éstos no absorben ni irradian. En consecuencia, la componente de la radiación no es afectada.

Puede haber sucedido que también se genere una carga superficial en los *extremos* $+y$ de los alambres. Sin embargo, el campo resultante de estas cargas terminales (las cuales tienden a cancelar el campo incidente a lo largo de \hat{y} dentro de los alambres) puede hacerse tan pequeño como queramos en la región de interés (cerca del centro del alambrado) haciendo los alambres suficientemente largos en la dirección y .

Para luz visible con $\lambda \sim 5 \times 10^{-5}$ cm, no es fácil construir “alambres” conductores paralelos espaciados en menos de λ . ¡De todas maneras esto se ha hecho!*

Polaroide. En 1938 Edwin H. Land inventó el Polaroid, que se comporta de forma parecida a una rejilla de alambre. En el proceso de fabricación, un “alambre” de plástico consistente en largas cadenas de hidrocarburos es muy estirada en una dirección. Esto alinea las moléculas. Luego, se sumerge la lámina en una solución que contiene yodo. El yodo ataca las largas cadenas de hidrocarburos y produce electrones de conducción que pueden moverse a lo largo de las cadenas, pero no perpendiculares a ellas. Se obtienen así “alambres” efectivos a lo largo de las cadenas. La componente del campo eléctrico a lo largo de los alambres es absorbida; la perpendicular a los alambres es transmitida con muy poca atenuación. [Una simple analogía entre una sogá y un cerco de estacas se utiliza a veces como una analogía de la acción de un alambrado sobre ondas electromagnéticas incidentes. La sogá pasa entre las tablillas de la cerca. Las ondas son absorbidas si la *velocidad* transversal de la sogá es transversal a la dirección de las tablillas. La velocidad transversal para ondas en una sogá es análoga al campo *magnético* en una onda electromagnética. Así habrá que recordar que el campo magnético transversal a los alambres es absorbido. No es una técnica memorística muy buena, ya que debe recordarse de que es la velocidad transversal (más que la componente transversal de la tensión)

* G. R. Bird y M. Parrish, Jr., *J. Opt. Soc. Am.* **50**, 886 (1960), evaporaron oro en un ángulo rasante sobre una red de difracción de plástico que tenía 50 000 rayas por pulgada. El oro se depositó sobre la parte baja de las estrías para formar “alambres” paralelos conductores.

la que hace que la soga golpee a las tablillas, y debe recordarse que el análogo de la velocidad de la soga es el campo magnético en lugar del eléctrico (lo que es análogo a la tensión transversal). La nemotecnia requiere recordar más cosas que una simple explicación correcta.]

Una lámina de polaroide tiene entonces un eje (que cae en la lámina) llamado eje de *transmisión máxima*. Si E está a lo largo de este eje, la luz se transmite con muy poca absorción. Si E es perpendicular al eje de transmisión máxima, la luz es casi totalmente absorbida. El eje de transmisión máxima es perpendicular a la dirección de estiramiento del plástico, es decir, es perpendicular a los “alambres”.

Cuando se mira una hoja de papel blanco a través de un pedazo de polaroide, el papel se ve gris. Esto es porque la luz que viene del papel es absorbida por el polaroide y, entonces, el papel, naturalmente se ve más oscuro. Por otra parte, un pedazo de celofán transparente (u otro plástico transparente) transmite casi toda la luz incidente sobre él.

La caja de óptica tiene cinco trozos de plástico de color gris. Tomémoslo y miremos a su través. Uno de éstos es un trozo de polarizador circular (que será discutido después). Los otros cuatro trozos son de Polaroid HN-32, que son polarizadores lineales, llamados solamente polaroides (que discutiremos ahora). El polarizador circular puede identificarse como sigue: pongamos una moneda (o cualquier pedazo de metal) sobre una tabla; extendamos uno de los pedazos de plástico gris sobre la moneda; miremos la moneda a través del plástico. Ahora saquemos el plástico y miremos de nuevo. ¿Se ve igual la moneda? Si es así, no se trata del polarizador circular. (La fascinante asimetría mostrada por el polarizador circular será discutida luego.) Miremos hacia una luz incandescente a través de los dos trozos de polaroide, con los polaroides superpuestos frente a frente, y mantengámoslos frente al ojo y cerca de él. Hagamos rotar un polaroide con respecto al otro. Cuando la luz se extingue se dice que los polaroides están “cruzados”. Sus ejes de transmisión máxima están a 90 grados uno con otro.

Cuando los ejes máximos son paralelos, gran parte de la luz que atraviesa el primer polaroide atraviesa también el segundo. Idealmente, se obtendrían los siguientes resultados: la luz que proviene de la bombilla “no está polarizada” — esto significa que hay tanta intensidad con polarización lineal a lo largo de la dirección transversal \hat{x} como a lo largo de la dirección transversal \hat{y} (donde \hat{x} es *cualquier* dirección transversal — cualquier \hat{x} e \hat{y} forman una representación completa para la descripción de la luz polarizada). Si el primer polaroide tiene un acoplamiento de impedancia no reflectiva perfecto con ambas superficies revestidas, y si todas las cadenas de hidrocarburos fuesen perfectamente paralelas, y si el espesor fuese suficiente para que se absorbieran las componentes de polarización indeseada, entonces el 50 % de la intensidad de la bombilla será transmitida. Sin embargo, no hay revestimientos no reflectivos sobre los polaroides. Por lo tanto, alrededor del

4 % de la intensidad se pierde en cada superficie. [El índice de refracción del plástico es aproximadamente el mismo que el del vidrio, es decir, alrededor del 1,5. Por lo tanto la intensidad reflejada es $[(n - 1)/(n + 1)]^2 \approx 0,04$ de cada superficie. Podemos despreciar los efectos de interferencia entre las dos superficies cuando promediamos sobre una banda de colores razonables. Así hay una pérdida total del 8 %.] Si las cadenas de hidrocarburos estuviesen perfectamente alineadas, no habría más pérdidas. Tal polaroide está marcado HN-46, lo cual significa que el 46 % de la luz no polarizada es transmitida. Nuestro polaroide está rotulado HN-32, lo que significa que alrededor del 32 % de la intensidad original del 100 % es transmitida a través del primer polaroide. Esto significa que alrededor del 64 % de la componente deseada de la luz incidente no polarizada es transmitida. (Menos de 10^{-4} de la intensidad de la otra componente es transmitida sobre casi todo el espectro de color.) Si el segundo polaroide es paralelo al primero, éste transmitirá alrededor del 64 % de la intensidad incidente sobre él, dado que toda la luz al ser transmitida tiene la dirección de polarización correcta. Así, la intensidad que pasa por dos placas paralelas HN-32 de polarizadores lineales es alrededor de

$$I_{\text{sal}} = I_{\text{en}} \times 0,32 \times 0,64 = 0,21 I_{\text{en}}, \quad (50)$$

si I_{en} es la intensidad de luz incidente no polarizada.

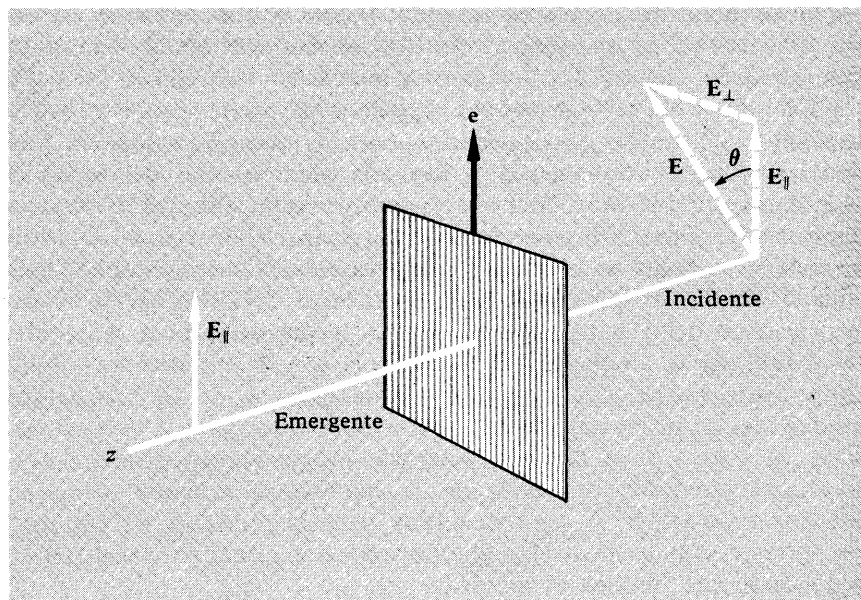
Polarizador perfecto — Ley de Malus. Indicaremos como polarizador perfecto un polaroide “HN-50”. (Este tipo no existe, pero es más fácil de discutir que de un polarizador real.) Despreciamos toda la pérdida de intensidad debida a reflexiones en las superficies. Suponemos que la componente no deseada es completamente absorbida y la componente deseada (la que tiene \mathbf{E} paralelo al eje máximo, es decir, perpendicular a las cadenas de hidrocarburos) es completamente transmitida. Si la luz polarizada incide normalmente a lo largo de \hat{z} con amplitud del campo eléctrico transversal \mathbf{E} y si \hat{e} es la dirección de transmisión máxima del polarizador perfecto, entonces sólo la componente de amplitud $(\mathbf{E} \cdot \hat{e})\hat{e}$, se transmite. Si el flujo de energía transmitida I_{sal} es menor que el flujo incidente I_{en} por un factor $(\mathbf{E} \cdot \hat{e})^2/(\mathbf{E}^2)$

$$I_{\text{sal}} = I_{\text{en}} \cos^2 \theta \equiv I_{\text{en}} (\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{e}})^2, \quad (51)$$

donde $\hat{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$ es un vector unitario a lo largo de la dirección de \mathbf{E} . La ecuación (51) es a menudo llamada *ley de Malus*. Véase Fig. 8.5.

Dos polaroides sucesivos núms. 1 y 2 con ejes máximos \hat{e}_1 y \hat{e}_2 a 90 grados entre sí, se llaman polaroides “cruzados”. El primer polaroide transmite \mathbf{E} a lo largo de \hat{e}_1 , y el segundo absorbe este campo completamente. No se transmite luz más allá del segundo polaroide. Sin embargo, si se inserta un tercer polaroide entre los polaroides cruzados,

Fig. 8.5 Polarizador perfecto. El eje para la transmisión fácil de E es el \hat{e} . E_{\parallel} , la componente de E que es paralela a \hat{e} es transmitida. La otra componente, E_{\perp} es completamente absorbida.



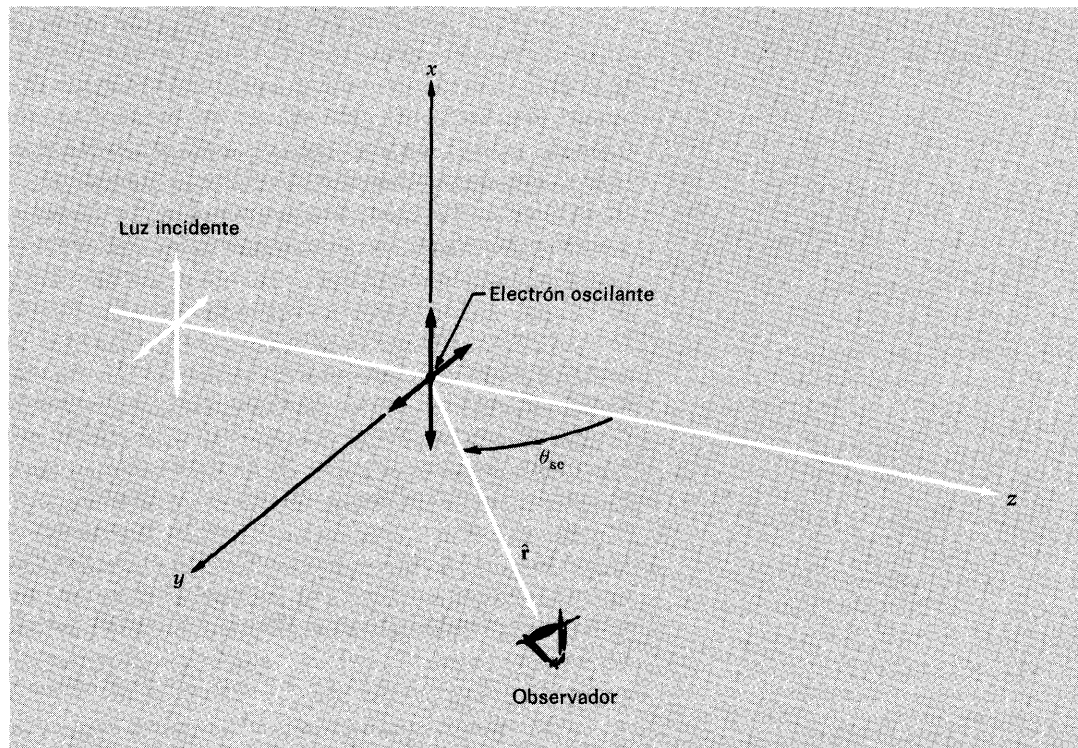
el campo transmitido no es cero, siempre que \hat{e}_3 no esté a lo largo ni de \hat{e}_1 ni de \hat{e}_2 . Véase Prob. 8.3. También puede demostrarse esto con las piezas de polaroide de la caja de herramientas de óptica.

Polarización por dispersión simple. En un día soleado miremos hacia el cielo azul a través de un trozo de polaroide mantenido cerca del ojo, de modo que podamos ver una gran zona de cielo. Rotemos el polaroide y busquemos un mínimo que aparecerá como un repentino oscurecimiento del cielo. La luz que proviene de esta parte del cielo está fuertemente polarizada. Midamos (muy por encima) el ángulo entre la línea que une nuestra cabeza con el sol y la línea que une la cabeza y la región de mayor polarización del cielo. (Encontramos que es de alrededor de 90° .) Midamos la dirección de polarización. (Podremos hallar los ejes de transmisión máxima de un polaroide mirando a una fuente con polarización conocida. Por ejemplo, miremos hacia una luz reflejada desde una ventana o desde un piso de madera o plástico. Como mostraremos más adelante en esta sección, la luz reflejada se polariza paralelamente a una superficie plana, digamos el piso.)

La explicación para la polarización del cielo azul es como sigue: sea \hat{z} la dirección de propagación de la luz desde el sol a una molécula de aire dada (véase Fig. 8.6). El campo eléctrico en la luz del sol no está polarizado. (Podemos comprobarlo cortando un pequeño agujero en un pedazo de cartón, sosteniendo el cartón de forma tal que la luz del sol forme un punto brillante sobre el piso pasando por el agujero del cartón, cubriendo el agujero con un trozo de polaroide, rotando

éste y observando la variación de intensidad del punto sobre el piso. ¡No hay que mirar al sol!) Los electrones de una molécula de aire actúan algo así como osciladores excitados por la luz incidente. Éstos, por tanto, oscilan en una superposición de movimientos a lo largo de \hat{x} e \hat{y} (las direcciones transversales a \hat{z}). Los electrones oscilantes irradian en todas direcciones, pero no irradian igual en todas ellas. De nuestra discusión anterior en la Sec. 7.5, sabemos que la amplitud y la dirección de polarización del campo eléctrico irradiado por una carga puntual oscilante única, son proporcionales a la amplitud de movimiento “proyectado” de la carga oscilante, como lo ve un observador que mira hacia la carga oscilante que irradia. Por amplitud del movimiento proyectado significamos la amplitud de este vector componente del movimiento de los electrones que es perpendicular a la dirección de propagación \hat{r} desde la carga oscilante hasta el observador. Si \hat{r} está a lo largo de \hat{y} , entonces el observador ve sólo la componente \hat{x} del movimiento de los electrones. Observa, por lo tanto, radiación que está 100 % linealmente polarizada a lo largo de \hat{x} . La intensidad es solamente la mitad de lo que sería si mirase hacia atrás a lo largo del eje \hat{z} y pudiese ver los movimientos \hat{x} e \hat{y} de los electrones. [En nuestro ejemplo es difícil mirar hacia atrás a lo largo de \hat{z} , directamente, por-

Fig. 8.6 Polarización por simple difusión. Se ha elegido el eje \hat{y} de modo que yace en el plano \hat{z} y \hat{r} . El observador ve el movimiento total del electrón proyectado sobre \hat{x} , pero ve una amplitud proyectada en \hat{y} que es sólo una fracción $\cos \theta_{os}$ del movimiento real sobre \hat{y} . A $\theta_{os} = 90^\circ$, la radiación está 100 % polarizada a lo largo de \hat{x} .



que entonces seremos cegados por el sol. Pero se puede mirar desde varios ángulos y ver que, si se mira cerca del sol, el cielo aparece no polarizado. Éste es también el caso si se mira luz que requiere grandes ángulos de dispersión (tan cerca de 180 grados como se pueda) para alcanzar el ojo.] Este proceso de polarización está ilustrado en la Fig. 8.6.

Las abejas no necesitan polaroides para detectar la polarización del cielo azul; éstas lo usan para volar.* Hay quien (no yo) puede detectar también la polarización sin polaroide; son los que ven el “cepillo de Haidinger”**.

Depolarización por dispersión múltiple. La azulada luz reflejada por la cual vemos un haz de una linterna “desde el costado” cuando penetra aire común (es decir, contaminado), se polariza por el mismo mecanismo que el del cielo azul. Si el aire está contaminado, el haz de la linterna aparece blanco en lugar de azul; entonces la luz no es polarizada. Tampoco está polarizada la luz del sol cuando es reflejada por nubes blancas, por azúcar o por un pedazo de papel blanco. Aunque una dispersión simple en ángulo recto puede dar luz fuertemente polarizada por dispersión simple, esto no significa que muchas dispersiones son aún mejores. Si se refleja luz en el ángulo correcto desde un pedazo de vidrio, se obtiene luz 100 % linealmente polarizada. (Esto será discutido en el próximo párrafo.) Pero si se muele el vidrio como polvo, la luz que viene hasta su ojo desde un lugar dado de la superficie habrá sufrido muchas reflexiones y habrá penetrado a una considerable profundidad dentro del vidrio esmerilado. Como resultado, estará observando los electrones que vibran en todas direcciones (transversal a su línea de visual), puesto que han sido excitados por radiación que incide sobre ellos desde distintas direcciones, aparte de la original proveniente de la fuente luminosa. Son impulsados por la luz que ha penetrado una pequeña distancia, ha sido reflejada varias veces y ha vuelto a su trayectoria. Se puede obtener una bonita demostración del efecto depolarizador de la dispersión múltiple colocando un trozo de papel aceitado común entre dos polaroides cruzados. El papel aceitado polariza casi completamente la luz polarizada producida por el primer polaroide. El hecho de que el papel aceitado está produciendo dispersión múltiple de la luz, puede observarse mediante el simple experimento de dejarlo sobre una página impresa. Si el papel está muy cerca de la impresión se pueden ver fácilmente las letras negras. Si lo movemos una pulgada por encima de la página, las letras se tornan tan borrosas que se hace imposible distinguirlas. Para entender esto consideremos la “luz negra” que va desde una letra de la página hasta el ojo como un pequeño haz de linterna — siendo este haz difundido por el papel aceitado. Otro buen

* Karl von Frisch, *Bees, Their Vision, Chemical Sense, and Language* (Cornell University Press, Ithaca, N. Y., 1950).

** M. Minnaert, *Light and Colour* (Dover Publications, Inc., New York, 1954). Éste es un libro admirable lleno de “experimentos caseros al aire libre”.

experimento es tomar un haz de linterna e iluminar con él alguna cosa a través de un papel aceitado. Observemos el tamaño de la mancha transmitida a medida que va alejando la linterna del papel engrasado. Un pequeño trozo de vidrio transparente o plástico no produce dispersión múltiple de la luz incidente (se puede leer a través de él estando o no cercano a la impresión) y, por lo tanto, no depolariza.

Polarización por reflexión especular — ángulo de Brewster. Observemos la reflexión de algún objeto de un trozo de vidrio común de ventana o superficie plana de agua. Probemos la polarización de la luz reflejada con un trozo de polaroide. Veremos que a un ángulo de incidencia de aproximadamente 56° (medidos desde el rayo incidente hacia la normal a la superficie) para vidrio de índice $n = 1.5$, o a un ángulo aproximado de 53° para agua (índice aproximado $n = 1.33$), la luz reflejada está polarizada directamente en un 100 % paralela a la superficie. Este ángulo de incidencia especial se llama ángulo de Brewster. Rotando el polaroide hasta la posición apropiada, puede extinguir completamente la luz reflejada si está incidiendo según el ángulo de Brewster. (Si orientamos adecuadamente el polaroide y lo mantenemos cercano al ojo como para ver un amplio rango angular, veremos una banda de “extinción” centrada en el ángulo de Brewster.)

Para todo ángulo de incidencia, los ángulos de los rayos incidente y refractado, o sea θ_1 y θ_2 están relacionados por la ley de Snell,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (52)$$

Los rayos incidente y reflejado forman ángulos iguales con la normal. (Esto se llama ley de reflexión especular.) En consecuencia para el ángulo particular de incidencia θ , para el cual $\theta_1 + \theta_2$ es 90° , el rayo reflejado forma un ángulo de 90° con el refractado (o sea transmitido) como se muestra en la Fig. 8.7. La dirección de oscilación de los electrones en el vidrio es transversal al rayo transmitido (puesto que ésa es la dirección de su fuerza impulsora). Para cualquier ángulo de incidencia, la componente del movimiento del electrón perpendicular al plano de incidencia (perpendicular al plano del papel en la Fig. 8.7) es completamente “visible” para un observador que mira la luz reflejada (irradiada por electrones impulsados en el vidrio), puesto que esta componente del movimiento es perpendicular a la dirección de propagación entre el electrón y el observador (dirección del rayo reflejado). Sin embargo, la componente del movimiento del electrón que yace en el plano de incidencia no es perpendicular a la dirección del rayo reflejado. Sólo la componente del movimiento proyectada perpendicularmente al rayo reflejado contribuye a la radiación reflejada. Al ángulo de incidencia de Brewster, la componente del movimiento de los electrones en el plano de incidencia está exactamente según la línea electrón observador y no contribuye con luz reflejada. Por lo tanto, la luz reflejada está

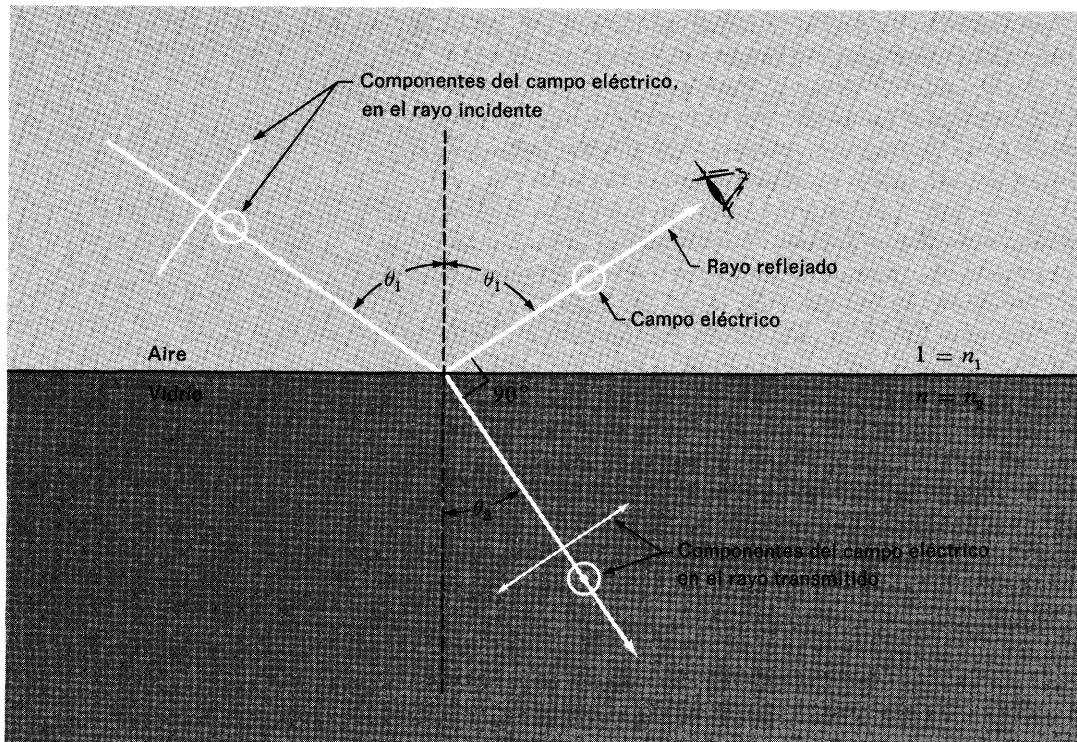
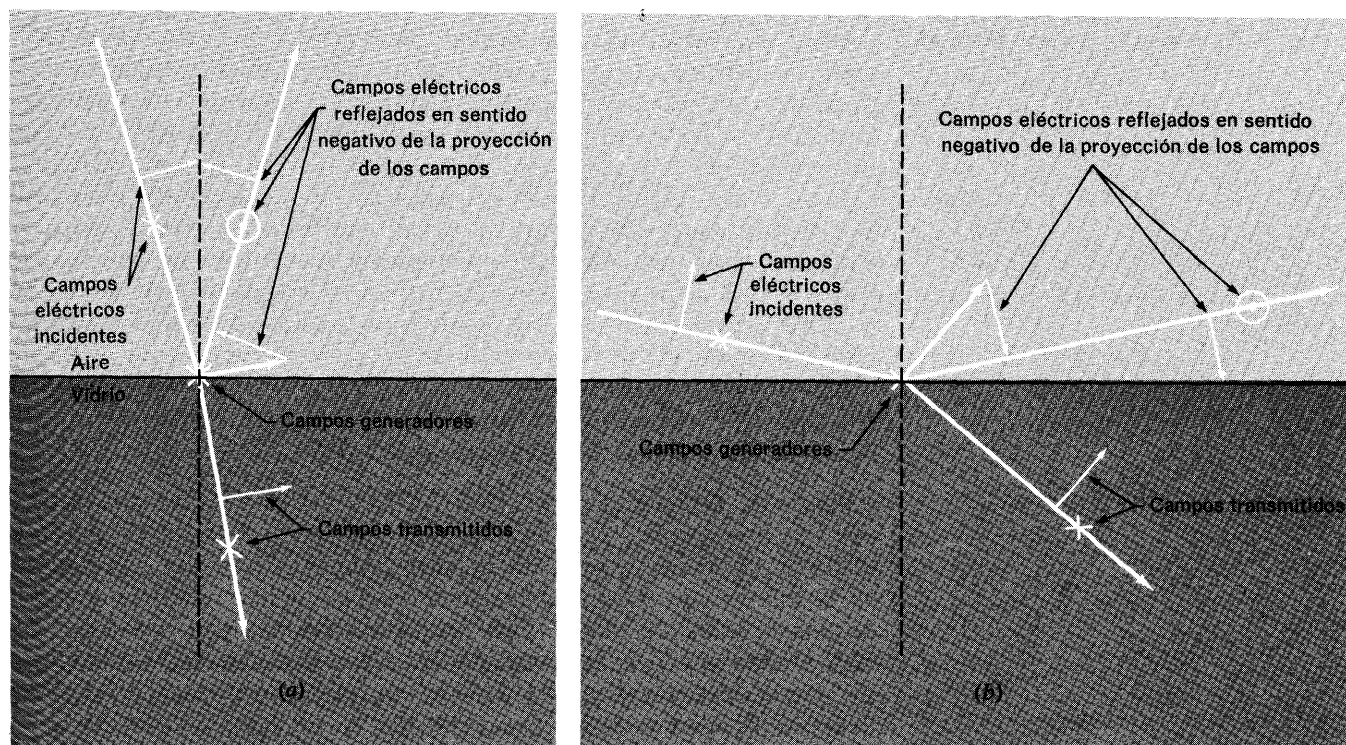


Fig. 8.7 Ángulo de Brewster. Los ángulos se han tomado correctamente para el vidrio ($n = 1,5$). La luz reflejada se halla 100 % polarizada perpendicularmente al plano de incidencia, es decir, el plano determinado por el rayo incidente y la normal. (Los círculos con punto indican la polarización del campo eléctrico en y fuera del plano del papel.)

completamente polarizada perpendicularmente al plano de incidencia. De la Fig. 8.7 vemos que esta condición corresponde a $\theta_1 + \theta_2$ igual a 90° . En consecuencia, la ecuación (4) da [cuando $n_1 = 1$, $n_2 = n$ y $\sin \theta_2$ igual a $\sin(90^\circ - \theta_1)$, que es $\cos \theta_1$]

$$\operatorname{tg} \theta_1 = n, \quad \theta_1 = \text{ángulo de Brewster} \quad (53)$$

Relaciones de fase para luz reflejada especularmente. Las relaciones de fase entre luz incidente, transmitida y reflejada son interesantes. Éstos se muestran en la Fig. 8.8. Estas relaciones de fase pueden comprenderse como sigue. La onda transmitida siempre tiene la misma fase que la onda incidente. Podemos ver esto por analogía con ondas reflejadas y transmitidas en una cuerda. La onda incidente provee la fuerza motriz y produce una onda transmitida con coeficiente de transmisión positivo, porque la fuerza motriz que provee la onda incidente es similar a la fuerza motriz producida originalmente por la onda incidente. (Para una discusión más cuantitativa de reflexión y transmisión con incidencia normal, véase Sec. 5.3.) La onda transmitida se debe principalmente a la fuente luminosa original, pero, en parte, se debe también a la radiación proveniente de los electrones excitados en el vidrio. La onda reflejada



se debe completamente a la radiación proveniente de los electrones excitados. Sabemos que para incidencia normal, el coeficiente de reflexión para el campo eléctrico (viajando de aire a vidrio) es negativo (véase Sec. 5.3). Sabemos también que el campo eléctrico reflejado debe estar formado por la superposición de las contribuciones proporcionales al movimiento proyectado de los electrones vistos por un observador que estuviese mirando la luz reflejada. El movimiento de los electrones es proporcional al campo eléctrico transmitido. Por lo tanto, todas las relaciones de fase para incidencia normal surgen correctamente si decimos que para luz incidente desde aire a vidrio *el observador que mira la luz reflejada ve una amplitud que es la negativa de la amplitud proyectada del campo transmitido, como proyectada perpendicularmente a la línea de visual del observador*. Esto se cumple no solamente para incidencia normal, sino para todo ángulo de incidencia. Además, da correctamente el ángulo de Brewster, y éste da las relaciones de fase para todos los otros ángulos de incidencia. (Da la intensidad sólo aproximadamente.) Pueden verificarse fácilmente las relaciones de fase en la Fig. 8.8 usando dos trozos de polaroide y una placa de microscopio. (Véase Experimento casero 8.26.)

Fig. 8.8 Relación de fase en luz reflejada en el vidrio. (a) θ_i menor que el ángulo de Brewster. (b) θ_i mayor que el ángulo de Brewster. (Los puntos indican que \mathbf{E} se halla fuera del plano del papel, una cruz, que yace en este plano; y una flecha en el plano del papel indica que la dirección \mathbf{E} corresponde al de la flecha.)

Relaciones de intensidad para luz reflejada especularmente. No deduciremos estas relaciones.* Utilizando polaroides y una placa de microscopio puede verificarse fácilmente que la componente perpendicular al plano de incidencia, de polarización lineal, es reflejada con intensidad fraccional gradualmente creciente a medida que el ángulo de incidencia aumenta desde 0 grados (incidencia normal) a 90 grados (incidencia rasante). Para incidencia normal, alrededor del 4 % de la intensidad es reflejada desde una superficie única; aproximadamente el doble es reflejado desde una placa de microscopio que tiene dos superficies. Para incidencia rasante, esencialmente el 100 % de la luz es reflejada. Para la componente polarizada en el plano de incidencia, la intensidad reflejada desde las dos superficies de la placa decrece desde alrededor del 8 % para incidencia normal hasta cero para ángulo de Brewster (56 grados) y entonces crece gradualmente hasta casi 100 % para incidencia rasante. Véase Experimento casero 8.26.

Ventana de Brewster para un laser. Una aplicación interesante del ángulo de Brewster es el diseño de una ventana de vidrio que transmite el 100 %, llamada ventana de Brewster. Suponga que tiene un aparato en el que es necesario o conveniente enviar un haz luminoso a través de una ventana de vidrio. Para incidencia normal, sólo alrededor del 92 % de la luz incidente es transmitida a través de la ventana de vidrio. (Se pierde aproximadamente el 4 % en cada superficie.) Esto puede tolerarse en algunas situaciones, pero no en un laser de gas con espejos por la parte de fuera de las ventanas y que uno quiere quizá atravesar 100 veces; en este caso no es posible porque $0,92$ elevado a la potencia 100 es sólo aproximadamente 0,0003. Una solución ingeniosa es hacer girar la ventana de tal modo que el haz incida con ángulo de incidencia de Brewster. La componente de polarización perpendicular al plano de incidencia es parcialmente reflejada y parcialmente transmitida. Después de numerosas transmisiones por reflexión a través de la ventana, queda eliminada del haz. Por otra parte, la componente de polarización paralela al plano de incidencia se transmite totalmente — el coeficiente de reflexión es cero para el ángulo de Brewster. Así, aun después de atravesar la ventana muchas veces, esta componente no experimenta una pérdida apreciable. El resultado es que la mitad de la luz es eliminada de manera casi total, otra mitad es casi totalmente retenida, y la luz emitida por el laser está 100 % polarizada. Los lasers de gas baratos tienen usualmente ventanas de Brewster. Busque un laser de éstos. Compruébemos con un polaroide la polarización a la salida. Desconectemos el laser y abrámoslo para ver las ventanas de Brewster. (Algunos lasers no emplean ventanas de vidrio y su salida no está polarizada linealmente.) En la Fig. 8.9 se ilustra el funcionamiento de una ventana de Brewster.

* Una buena deducción de estas relaciones llamadas fórmulas de Fresnel, es dada por R. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, cap. 33 (Addison Wesley, Reading, Mass., 1963).

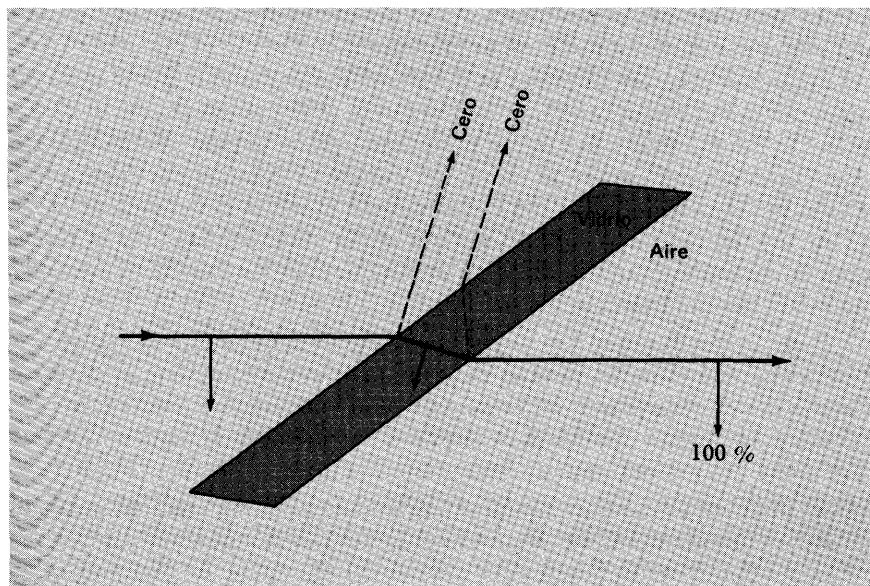


Fig. 8.9 Ventana Brewster. La figura se ha trazado para $n = 1,5$.

Polarización del arco iris. Aún más espectacular que la polarización del cielo azul es la polarización del arco iris. Es interesante tratar de predecir si la polarización es radial o tangencial (con respecto al arco). Si no se puede esperar a que llueva para verificar la predicción, consígase una regadera y esperemos al sol (o empléese una fuente de luz, si es de noche).

Para una explicación del funcionamiento del arco iris, véase M. Minnaert, *Light and Colour* (Dover Publications Inc., New York, 1954).

8.4 Doble refracción

En la Sección 8.3 aprendimos a variar el estado de polarización de un haz de ondas electromagnéticas, mediante absorción o reflexión selectiva (selectiva en el sentido que una componente de polarización es absorbida o reflejada más que la otra). En esta sección aprenderemos a cambiar el estado de polarización mediante el cambio de la fase relativa de las dos componentes.

Celofán. Tomemos dos polaroides y crucémoslos de manera que no pase luz por ellos. Ahora pongamos un pedazo de celofán (papel de envolver caramelos, pan, etc., — un plástico transparente cualquiera puede servir) entre los polaroides cruzados. ¡Ahora pasa luz! Como el celofán es perfectamente transparente, sin la apariencia “oscura” del polaroide, sabemos que el celofán no puede absorber luz. La única manera en que puede variar la polarización de la luz es cambiando las fases relativas

de las distintas componentes de polarización. (Entonces no hay pérdida de intensidad, como puede verse fácilmente.)

Hagamos rotar el celofán entre los polaroides, mientras los mantengamos cruzados. Encontraremos dos ángulos a 90° entre sí (en una rotación de 180°), para los cuales el celofán tiene mayor efecto, y otros dos ángulos a 90° entre sí, para los cuales el celofán no tiene efecto. Entonces el celofán tiene dos direcciones especiales, orientadas a 90° entre sí y en el plano del celofán, que están relacionadas con la propiedad de introducir corrimientos de fases relativas en las diferentes componentes de polarización de la luz.

Para demostrar que no todos los plásticos transparentes tienen esta propiedad, tomemos un pedazo de plástico de envolver (como el de marca Saran) o del polietileno estirable que usan en algunas tintorerías para proteger las ropas. Pongámoslo entre los polaroides cruzados. Veremos que tiene muy poco efecto. Muy poca luz pasa a través. (Va a haber un pequeño efecto, pero mucho menor en el caso del celofán.) Ya que (o si) hallamos un pedazo de plástico que no tiene “ejes ópticos, o sea, direcciones especiales en su plano, tratemos de crear una dirección especial. Tomemos un pedazo de este plástico elástico y estirémoslo. Pongamos el plástico entre los polaroides cruzados con la dirección de estiramiento a 45° con los ejes de los polaroides cruzados. Obtendremos un efecto notable.

Lo siguiente nos da la explicación del comportamiento de este plástico. Antes de estirarlo, las moléculas orgánicas grandes del plástico estaban enmarañadas. Por el estiramiento, las moléculas tienden a enderezarse y alinearse. Los electrones en una molécula orgánica en forma de cadena larga tienen distinta “constante elástica efectiva” para las vibraciones a lo largo de la cadena de hidrocarburos que para las direcciones perpendiculares a ella. Por esto, la polarizabilidad de la molécula es distinta para un desplazamiento a lo largo de la cadena de hidrocarburos que para los desplazamientos perpendiculares a ella. Después del estiramiento, la dirección de la dimensión larga de las moléculas tiende a alinearse según la dirección de estiramiento. Una de las direcciones perpendiculares a la dirección de estiramiento se puede tomar en el plano de la hoja de plástico. (La otra es perpendicular a la hoja y no nos interesa.) La susceptibilidad eléctrica (polarización inducida por unidad de volumen y por unidad de campo eléctrico) para campos eléctricos según la dirección de estiramiento, será por esto distinta a la de los campos perpendiculares a la dirección de estiramiento. Por lo tanto, la constante dieléctrica es distinta para las dos direcciones y *el índice de refracción es también distinto para estas dos direcciones.*

Ejes rápido y lento de una lámina de retardo. Estas dos direcciones, la de estiramiento y la perpendicular a ella (en el plano de la hoja), son llamadas ejes ópticos. El eje óptico que tiene mayor índice de refracción

(para \mathbf{E} según él) es llamado eje lento. (Mayor índice de refracción significa menor velocidad de fase.) El otro eje óptico se llama eje rápido. Nosotros llamaremos a los dos índices de refracción correspondientes n_r y n_l (r por rápido, l por lento), con $n_l > n_r$. Una hoja de celofán o plástico u otro material con estas propiedades se llama *lámina de retardo*.

Examinemos ahora el efecto de una lámina de retardo en una onda de propagación electromagnética plana que incide sobre ella. Primero descompongamos el campo eléctrico incidente en componentes ortogonales según el eje lento $\hat{\mathbf{e}}_l \equiv \hat{\mathbf{x}}$ y el eje rápido $\hat{\mathbf{e}}_r \equiv \hat{\mathbf{y}}$. Supongamos que para $z = 0$ hay vacío, y que la lámina de retardo comienza en $z = 0$ y se extiende hasta $z = \Delta z$, después de lo cual hay vacío nuevamente.

$$\mathbf{E}_c(0, t) = e^{i\omega t} [\hat{\mathbf{x}} A_s e^{i\varphi_s} + \hat{\mathbf{y}} A_r e^{i\varphi_r}]. \quad (54)$$

Supongamos que las oscilaciones del campo eléctrico de la onda incidente en $z = 0$ están dadas por la parte real de la magnitud compleja. Las amplitudes A_l y A_r y las constantes de fase φ_l y φ_r son las que se obtienen al descomponer el campo eléctrico incidente en componentes linealmente polarizadas según $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$. [Como las amplitudes y constantes de fase son arbitrarias, la ecuación (54) representa un estado general de polarización.] Consideremos ahora la onda transmitida dentro de la lámina de retardo, entre $z = 0$ y Δz . Despreciamos pérdidas por reflexión en la primera superficie, y entonces simplemente reemplazamos ωt por $\omega t - kz$ en la ecuación (54). Pero debemos tener en cuenta que k no es igual para \mathbf{E} según $\hat{\mathbf{e}}_l$ que para \mathbf{E} según $\hat{\mathbf{e}}_r$. Entonces, considerando que k es proporcional al índice de refracción y está dado por $n\omega/c$, en la lámina de retardo tenemos

$$\mathbf{E}_c(z, t) = e^{i\omega t} [\hat{\mathbf{x}} A_s e^{i\varphi_s} e^{-in_s \omega z/c} + \hat{\mathbf{y}} A_r e^{i\varphi_r} e^{-in_r \omega z/c}]. \quad (55)$$

Retardo de fase relativo. Cuando la onda llega a la salida de la lámina en $z = \Delta z$, cada componente ha sufrido un retardo de fase relativo a la fase que hubiese tenido si la placa hubiese sido vacío (con $n = 1$). Para la componente l , está dado por $(n_l - 1)\omega\Delta z/c$:

$$\text{Retardo de fase } E_l \text{ relativo al vacío} = (n_s - 1) \frac{\omega \Delta z}{c}. \quad (56)$$

Similarmente, tenemos

$$\text{Retardo de fase de } E_r \text{ relativo al vacío} = (n_r - 1) \frac{\omega \Delta z}{c}. \quad (57)$$

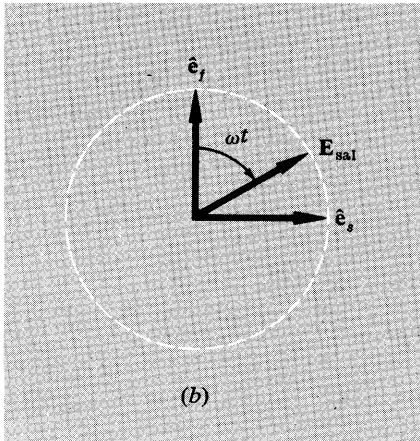
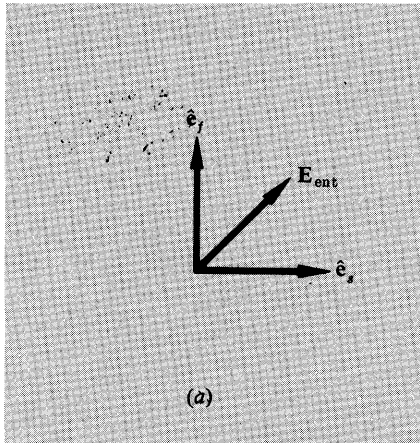


Fig. 8.10 Lámina cuarto de ondas. Luz incidente linealmente polarizada con \mathbf{E} a 45° grados de eje óptico. (a) Entrada. (b) Salida. Este resultado es obtenido para dirección de propagación en el plano del papel o fuera de él.

Restando la ecuación (57) de la (56) encontramos el retardo de fase de E_i relativo a E_r :

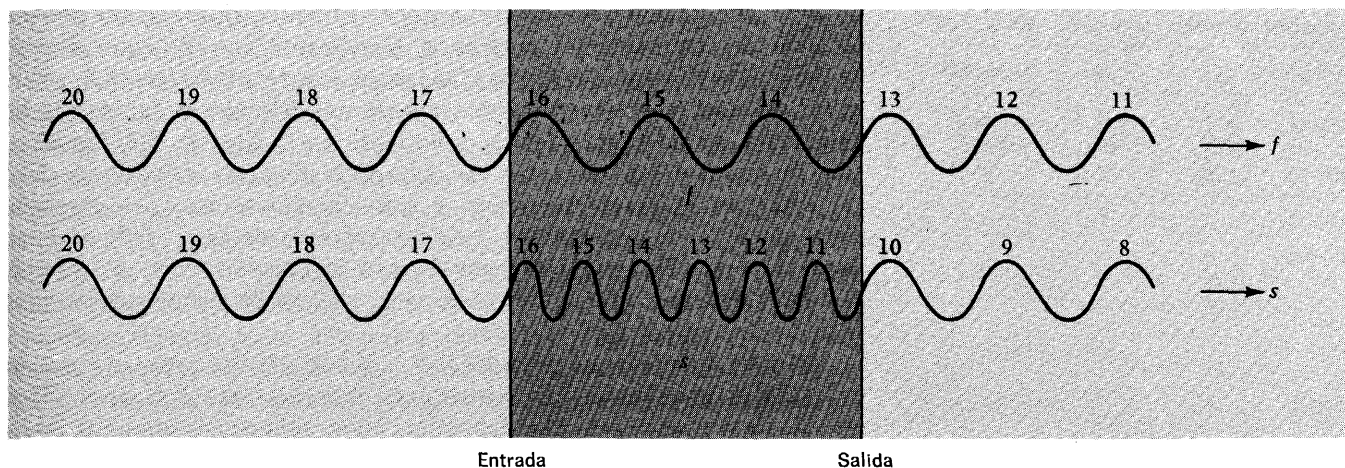
$$\begin{aligned} \text{Retardo de fase de } E_i \text{ relativo a } E_r &= (n_s - n_f) \frac{\omega \Delta z}{c} \\ &= (n_s - n_f) 2\pi \frac{\Delta z}{\lambda_{\text{vac}}}, \quad (58) \end{aligned}$$

donde λ_{vac} es la longitud de onda en el vacío.

Lámina de cuarto de onda. Consideremos el ejemplo siguiente, que nos ayudará a mantener los signos correctos. Supongamos que la luz incidente está polarizada linealmente con \mathbf{E} según la línea a 45° entre \hat{e}_i y \hat{e}_r . Entonces A_i y A_r son iguales y φ_i y φ_r son iguales. Supongamos que el espesor de la lámina es tal que la componente lenta sufre un retardo de $1/4$ de ciclo relativo a la componente rápida, o sea, sufre un retardo de $\pi/2$ relativa a la componente rápida. Esta lámina de retardo se llama *lámina de cuarto de onda*. La onda que sale de la placa tiene amplitudes iguales para las componentes lenta y rápida, y la componente rápida está adelantada 90° en fase, con respecto a la lenta. Esto implica que tenemos luz polarizada circularmente, con sentido de rotación desde \hat{e}_r hacia \hat{e}_i . Estos resultados están contenidos en la ecuación (55). Se muestran en la Fig. 8.10.

Obtener los signos sin dificultad es crucial para entender las láminas de retardo. Ésta es otra explicación que puede ayudarle a convencerse de que el sentido de rotación es el mostrado en la Fig. 8.10 para una lámina de cuarto de onda. Si las dos componentes de polarización se propagan en el vacío, en cualquier lugar z y tiempo t a la oscilación según \hat{x} y a la oscilación según \hat{y} les corresponde el mismo retardo con respecto a la emisión en la fuente de luz. A estas dos componentes de polarización se las hace atravesar una placa con n_i mayor que n_r . A la salida de la placa, el valor instantáneo de E_i debe haber sido emitido en un tiempo anterior que el correspondiente al valor en el mismo punto instantáneo y simultáneo de E_r (a la salida de la placa). Esto es debido a que la onda progresiva que lleva a E_i ha atravesado la misma distancia que la que lleva a E_r , pero lo ha hecho con una velocidad de fase menor; entonces tiene que haberse iniciado antes. Por esto, E_r corresponde a un instante de emisión más reciente y, por ende, a una fase más avanzada que la de E_i , y entonces E_r adelanta a E_i . Estas relaciones de fase se ilustran en la Fig. 8.11.

Propiedades de las láminas de retardo. Deberá convencerse de la verdad de los siguientes enunciados y “reglas” numerados. (No hay que aprenderlos de memoria. Deben comprenderse tan bien que se puedan olvidar las respuestas y deducirlas siempre que se desee.)



(i) Una lámina de media onda (con el doble de espesor que una lámina de cuarto de onda) convierte luz linealmente polarizada en luz linealmente polarizada; la dirección de polarización a la salida se obtiene por reflexión en uno de los ejes ópticos de la dirección de polarización a la entrada. (Casi nunca nos importa en cuál de los ejes, o sea, no nos importa la fase absoluta. No nos importa un signo menos en la dirección de la amplitud.) O sea, una lámina de media onda invierte el signo *relativo* de las componentes de la onda incidente.

(ii) Una lámina de media onda convierte a la luz polarizada circularmente dextrógira en luz polarizada circularmente levógira y viceversa.

(iii) Una lámina de cuarto de onda convierte a la luz polarizada linealmente con polarización entre \hat{e}_l y \hat{e}_r en luz polarizada elípticamente con sentido de rotación desde \hat{e}_l y \hat{e}_r . Si la polarización incidente es a 45° con \hat{e}_l y \hat{e}_r , la polarización de salida es circular. (Nota: Esto significa que si rotamos la polarización lineal de E_{en} de la Fig. 8.10 en 90° a la salida, la frecuencia ω rotará en sentido opuesto al indicado a la Fig. 8.10. Para usar la "regla" para ver esto, invirtamos simplemente la convención de signos en \hat{e}_r , o en \hat{e}_l de la Fig. 8.10, de modo que E_{en} nuevamente quedará entre los vectores \hat{e}_l y \hat{e}_r . Entonces la regla dice que la rotación a la salida es desde \hat{e}_r a \hat{e}_l .)

(iv) Una lámina de cuarto de onda convierte la luz polarizada circularmente en luz polarizada linealmente. Para obtener una regla sencilla, identificaremos los ejes lento y rápido de modo que el sentido de rotación de la luz incidente polarizada circularmente vaya del eje rápido al eje lento. Entonces la lámina de cuarto de onda convierte la luz polarizada circularmente en polarizada linealmente a 90° con la bisectriz entre \hat{e}_l y \hat{e}_r . (La vibración r ya entra adelantada en $1/4$ ciclo. Después de la lámina de cuarto de onda, está adelantada en $1/2$ ciclo.)

Fig. 8.11 Relativo retardo de fase de componentes de polarización lenta y rápida. Los números dan el tiempo de emisión de la fuente a la entrada de la placa que produce el retardo, las dos componentes tienen el mismo tiempo desde la emisión, como se indica en la figura. A la salida, la componente lenta emitida en el ciclo 10 se encuentra al mismo tiempo que la componente rápida emitida en el ciclo 13. La componente rápida se ha adelantado a la componente lenta en tres ciclos completos.

(v) Una lámina de retardo no tiene influencia en el estado de polarización de luz incidente polarizada linealmente con \mathbf{E} según $\hat{\mathbf{e}}_l$ o $\hat{\mathbf{e}}_r$.

(vi) Una lámina de retardo no puede convertir la luz “no polarizada” (lo que se obtiene directamente de una lámpara o del sol) en luz polarizada. Estudiaremos luz no polarizada en la Sección 8.5. Por ahora sólo decimos que para la luz no polarizada hay una relación de fases “al azar” entre las componentes x e y , cuando se hace un promedio sobre el lapso de observación. Los corrimientos de fase relativos introducidos por la lámina de retardo dejan a la relación entre las fases de x e y tan al azar como antes, o sea, si φ_x y φ_y están relacionadas al azar, también lo estarán φ_x y $\varphi_y + \Delta\varphi$.

(vii) Si hacemos un “sandwich” pegando juntos (cara a cara) un polaroide y una lámina de media onda con sus ejes ópticos a 45° al eje de transmisión máxima del polarizador, obtenemos un polarizador circular. La luz no polarizada debe incidir en la cara del sandwich correspondiente al polaroide.

(viii) Un polarizador circular que produce luz circularmente polarizada dextrógira, transmite con eficiencia 100 % (despreciando pequeñas pérdidas por reflexión) a la luz circularmente polarizada dextrógira que se propaga en dirección opuesta (o sea, que incide en la cara del sandwich correspondiente a la lámina de cuarto de onda) y absorberá totalmente a la luz polarizada circularmente levógira que incide en la lámina de cuarto de onda. (Este hecho se puede recordar fácilmente por analogía con una rosca y un tornillo. Una rosca que convierte una barra cilíndrica “no polarizada” en un tornillo dextrógiro, también “transmite” un tornillo dextrógiro en la dirección opuesta, pero aniquila totalmente a un tornillo dextrógiro que quiera propagarse en esta dirección. Este hecho tiene consecuencias muy interesantes. Véase Experimento casero 8.18.

Hemos considerado láminas de retardo hechas estirando una hoja de plástico en una dirección.

Esto es lo que (esperamos) habrá ya hecho con un pedazo de plástico de envolver. Así es como la Polaroid Corporation fabrica las láminas de media onda y de cuarto de onda de su equipo de óptica. Ésta es la forma en que el celofán adquiere sus propiedades (pasando entre laminadoras que aprietan y alinean a sus moléculas). Un pedazo de vidrio de ventana común es isotrópico y no manifiesta doble refracción (o sea, no tiene ejes ópticos). Pero si miramos un pedazo de vidrio en tensión, entre dos polaroides cruzados, se verá luz transmitida en algunos lugares. Los lentes de seguridad son sometidos a tensiones grandes, y manifiestan imágenes de doble refracción interesantes. Las escuadras y fuentes de plástico manifiestan hermosas imágenes de tensiones coloreadas cuando se las pone entre polaroides cruzados. Los efectos de color son en parte debidos a la variación del índice de refracción con el color (o sea, la

longitud de onda), pero, en su mayoría se deben a la variación del corrimiento de fase con la longitud de onda.

La mayor parte de los materiales cristalinos manifiestan doble refracción. Si (como el plástico estirado) éstos tienen sólo una dirección de anisotropía se llaman *uniaxiales*. La dirección según el eje de anisotropía se llama dirección “extraordinaria”. Las otras dos direcciones perpendiculares al eje de anisotropía se llaman direcciones “ordinarias”. Los índices de refracción correspondientes se llaman n_e y n_o (e por extraordinario y o por ordinario) para el campo eléctrico según las direcciones e y o . El eje de anisotropía puede ser un eje lento o un eje rápido, dependiendo de la estructura del cristal. La Tabla 8.1 muestra algunos ejemplos con los índices de refracción para luz de 5890 Å de longitud de onda (luz amarilla emitida por átomos excitados de sodio).

Tabla 8.1 Algunos cristales uniaxiales

Material	n_e	n_o	e Eje
Cuarzo	1,553	1,544	Lento
Calcita	1,486	1,658	Rápido
Hielo	1,307	1,306	Lento

Actividad óptica. Éste es un experimento casero muy interesante. Llenemos un frasco de vidrio (no de plástico) con aproximadamente 2 pulgadas de jarabe de maíz Karo. Pongamos una lámpara y un polaroide debajo del frasco y otro sobre éste. Miremos a través del jarabe. Veremos bellos efectos de color. Investiguemos cuantitativamente. Usemos el filtro de gelatina rojo o verde del equipo de óptica para trabajar con una banda razonablemente pequeña de longitudes de onda. (Podemos mirar una lámpara usando la red de difracción de Edmund del equipo de óptica con y sin el filtro, puesto para saber qué banda de colores estamos usando.) Variemos la cantidad de jarabe. Encontraremos que la luz polarizada linealmente permanece polarizada así, pero la dirección de polarización rota aproximadamente 30° en el sentido de las agujas del reloj (cuando se mira a la luz) por cada pulgada de jarabe. Este fenómeno se denomina *actividad óptica*.

Experimento casero

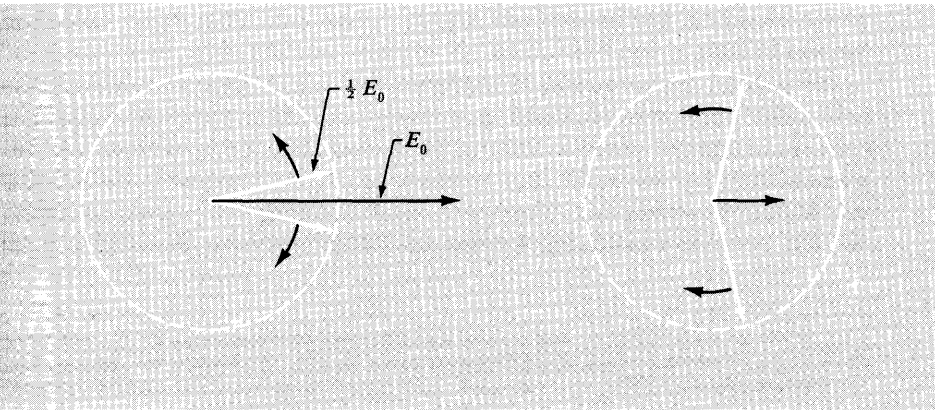


Fig. 8.12 La oscilación linealmente polarizada de amplitud E_0 es una superposición de oscilaciones circularmente polarizadas de sentido izquierdo y derecho y que cada una tiene amplitud $\frac{1}{2} E_0$. La dirección de la superposición linealmente polarizada depende de las fases relativas de las componentes circulares.

Ésta es la explicación. La luz polarizada linealmente que se produce en el primer polaroide es una superposición de luz polarizada circularmente dextrógira y levógira (véase Fig. 8.12).

$$\mathbf{E}_c = E_0 \hat{x} e^{i\omega t} = \frac{E_0}{2} [\hat{x} e^{i\omega t} + \hat{y} e^{i[\omega t - (1/2)\pi]}] + \frac{E_0}{2} [\hat{x} e^{i\omega t} + \hat{y} e^{i[\omega t + (1/2)\pi]}] \quad (59)$$

Las moléculas de azúcar tienen estructura helicoidal. Todas las moléculas de azúcar hecho de maíz tienen el mismo sentido. Una hélice tiene el mismo sentido vista desde ambos extremos. Por esto, una disolución de moléculas de azúcar orientadas al azar tiene un sentido neto igual al de las moléculas individuales. Debido a la estructura helicoidal de las moléculas, la disolución de azúcar tiene distintos índices de refracción para las ondas progresivas con polarización circular dextrógira y levógira. A medida que la onda polarizada linealmente avanza por la disolución, una de las componentes polarizada circularmente se adelanta en fase a la otra. Analizando un poco la cuestión con ayuda de un esquema, nos convenceremos de que el sentido de rotación de la polarización lineal es el mismo que el sentido de rotación de la componente circular rápida (el más rápido es el de menor índice de refracción). ¿Qué pasa si enviamos luz a través de una disolución de azúcar, hacemos que se refleje en un espejo y que atraviese nuevamente la disolución, esta vez en sentido opuesto? ¿Se duplica la rotación? ¿O se anula?

Primer gran descubrimiento de Pasteur. El primer gran descubrimiento de Luis Pasteur fue que el ácido racémico, una forma ópticamente inactiva del ácido tartárico, es una mezcla de ácido tartárico levógiro y dextrógiro. Consiguió reconocer en el microscopio los cristales dextrógiros y levógiros en la mezcla racémica, y separó los cristales en dos montones usando una pinza muy fina. Cuando los disolvió en agua, los de un montón rotaban el plano de polarización de la luz en el mismo sentido que lo hace el ácido tartárico producido por las uvas. El otro montón rotaba la polarización en la misma cantidad, pero en sentido inverso. ¡Esta clase de ácido tartárico nunca había sido observado hasta entonces!*

El sentido único que se observa en moléculas orgánicas helicoidales fabricadas por los organismos que viven actualmente es, sin duda, una clave fundamental para la historia de la evolución de la vida en nuestro planeta. ¡Todas las moléculas actuales de DNA (la esencia de la vida) son hélices dextrógiros! ¿Por qué? ¿Por casualidad? ¿Tuvieron alguna vez los océanos cantidades iguales de DNA primitivo dextrógiro y le-

* Para un comentario de éste y otros importantes descubrimientos de Pasteur, véase *Pasteur and Modern Science*, René Dubos (Anchor Books, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N. Y., 1960).

vógiro? ¿Aprendió el ácido DNA dextrógiro a hacer desaparecer el levógiro? Nadie lo sabe todavía.*

Reflexión metálica. Después de observar la polarización intensa (es 100 % para el ángulo de Brewster) que se obtiene por reflexión especular en un material dieléctrico tal como vidrio o agua, uno se siente sorprendido por ella al observar la polarización obtenida por reflexión en espejos comunes aluminizados o plateados (o en cualquier otra de apariencia plateada, tal como un cuchillo de mesa o partes de automóviles cromadas) al encontrar, prácticamente, polarización nula. Esto se debe a que los metales con apariencia plateada reflejan casi completamente ambas polarizaciones. A esto se debe la apariencia plateada; serían más oscuros si polarizasen al reflejar menos luz de una polarización que de otra. (Para visualizar esto, ponga un espejo plateado al lado de un vidrio y mire a ambos para aproximadamente el ángulo de Brewster para el vidrio. Coloque algo oscuro debajo del vidrio.)

El que una pieza de metal brillante no produzca luz polarizada a partir de luz no polarizada, no debe hacernos suponer que no tiene efecto en luz polarizada. Un pedazo de celofán no produce luz polarizada, si se hace incidir sobre él luz no polarizada, pero puede cambiar el estado de polarización de luz incidente polarizada. Esto es exactamente una pieza de metal brillante. Puede comprobarse en un experimento sencillo mediante el cual se puede convertir luz polarizada linealmente en polarizada circularmente por reflexión metálica. Véase Experimento casero 8.28.

8.5 Ancho de banda, tiempo de coherencia y polarización

En esta sección discutiremos la polarización de la luz emitida por átomos. Usaremos el modelo clásico de un electrón ligado a un núcleo pesado. En este modelo, el electrón oscila y emite ondas electromagnéticas clásicas, de la misma manera que si el átomo fuese una pequeña antena de radio. Este modelo clásico omite la "corpuscularidad" de la emisión luminosa, o sea, omite el hecho que la luz es emitida y absorbida en "terrones" llamados fotones. Aparte de esto, el modelo clásico da, en muchos casos, los mismos resultados que la sofisticada teoría cuántica. La diferencia principal es que en la teoría clásica pensamos que las ondas electromagnéticas transportan un flujo continuo de energía, mientras que en la teoría cuántica aprendemos que el flujo no es continuo. De cualquier modo, las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones de la teoría electromagnética clásica) hacen las predicciones correctas para el flujo de energía promedio.

* Para un relato sobre el papel del sentido de los organismos vivos y sobre las interacciones de decaimiento débiles de partículas elementales, véase *The Ambidextrous Universe*, Martin Gardner (Basic Books, Inc., Publishers, New York, 1964).

Clásicamente, nosotros pensamos que los campos eléctricos y magnéticos de la radiación electromagnética son “tangibles” y que sus cuadrados nos dan la densidad de energía “real” de la onda. La teoría cuántica interpreta la densidad de energía clásica como el número promedio de fotones por la energía de un fotón. (Cuando el número promedio de fotones en un volumen dado es menor que uno, se le llama la probabilidad de encontrar un fotón.) Podremos estudiar teoría cuántica en el volumen IV. Sólo hacemos estas observaciones para asegurar que los resultados que obtendremos con un modelo clásico son válidos en teoría cuántica, si se reinterpreta el flujo de energía como el flujo de probabilidad por la energía del fotón.

Átomo clásico emitiendo radiación polarizada. Consideremos un solo átomo situado en $x = y = z = 0$. El electrón puede estar oscilando en una superposición de movimientos según \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} . El observador de la luz emitida está situado en algún lugar alejado sobre el eje z . Sólo contribuyen a las ondas electromagnéticas observadas (luz) las componentes x e y del movimiento del electrón.

Supongamos que en $t = 0$ el electrón es excitado a una vibración, quizás por un choque. Después de $t = 0$, el electrón vibra libremente con frecuencia natural ω_0 . El estado de polarización de la radiación emitida depende de las amplitudes x e y de las componentes del movimiento y de la fase relativa de los movimientos x e y . El electrón no vibra eternamente. Pierde energía por radiación, con un *tiempo de decaimiento medio* τ (el tiempo en que la energía decrece en un factor e , también llamado *vida media*). Después de varias vidas medias, el electrón ha perdido la mayor parte de su energía, y la radiación posterior es despreciable. Durante el tiempo (del orden de τ) que irradia, los movimientos según x e y mantienen fase relativa constante. (Ambos oscilan con la misma frecuencia, y sustentamos la hipótesis de que el átomo no es perturbado en este lapso.) Entonces, la polarización de la radiación emitida durante este tiempo es constante.

Más tarde, el átomo puede sufrir un segundo choque, que excite nuevamente al electrón en un movimiento que sea superposición de oscilaciones según \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} , todas con la misma frecuencia ω_0 , y con amplitudes y constantes de fase que dependan de las circunstancias del choque. Si el átomo está en un gas y es bombardeado uniformemente de todos lados, podemos suponer que prácticamente no habrá correlación entre las amplitudes x e y fases de excitaciones sucesivas. Por lo tanto, el estado de polarización de la radiación emitida durante el segundo intervalo de tiempo (del orden de τ) que sucede a la segunda excitación no tiene relación con el correspondiente a la primera excitación.

Duración del estado de polarización. Supongamos que en lugar de un átomo tenemos muchos átomos excitados en cualquier instante. Todos

ellos están en una pequeña región vecina a $x = y = z = 0$, y el observador sobre el eje z ve una onda electromagnética que es la superposición de las ondas emitidas individualmente por los átomos. Llamemos "instante" a un intervalo de tiempo que es corto comparado con el tiempo de decaimiento medio τ , pero que contiene muchas oscilaciones de frecuencia ω_0 . Supongamos que el observador describe la radiación en función de las amplitudes E_x y E_y y de la fase relativa entre E_x y E_y . En cualquier "instante", E_x es una superposición de las contribuciones de todos los átomos que irradian durante ese instante. Lo mismo E_y . Todos los átomos oscilan con la misma frecuencia dominante ω_0 , pero distintas amplitudes y constantes de fase. Entonces, la superposición E_x tiene frecuencia dominante ω_0 y amplitud y constante de fase que dependen de las amplitudes y constantes de fase de los átomos participantes. (El mismo enunciado vale para E_y .) Durante cualquier intervalo de tiempo que sea corto comparado con τ , todos los átomos que están vibrando pierden sólo una pequeña fracción de su energía y mantienen las mismas constantes de fase. Por esto, la amplitud y la constante de fase de la superposición E_x (o E_y) no cambia apreciablemente durante un intervalo de tiempo que sea corto en comparación con τ . *El estado de polarización de la onda electromagnética total permanece constante durante un intervalo de tiempo que sea corto comparado con τ .* En particular, la fase relativa entre E_x y E_y permanece constante. Ahora, supongamos que esperamos durante varias vidas medias τ , y luego reexaminemos el estado de polarización de la onda total. Después de varias vidas medias, los átomos que estaban irradiando (al comienzo del intervalo) han decaído y han sido reemplazados por átomos nuevos. (No interesa qué fracción de los átomos "nuevos" estaban entre los viejos y han sido reexcitados.) El movimiento de los átomos nuevos no está correlacionado con el de los viejos, excepto en que, por simplicidad, podemos suponer que la energía de excitación promedio es la misma para los átomos nuevos que para los viejos. Cuando sumamos las componentes x de radiación de todos los átomos, obtenemos la componente E_x de la onda total. Debe tener aproximadamente la misma amplitud que la obtenida para E_x con el grupo viejo de átomos. Pero la constante de fase del nuevo valor de E_x es totalmente impredecible a partir de la constante de fase del viejo E_x . El mismo enunciado vale para E_y . Por lo tanto, como la fase relativa de los movimientos del nuevo grupo de átomos no tiene correlación con la fase relativa de los movimientos del grupo viejo, vemos que *la fase relativa de E_x y E_y varía de manera totalmente impredecible y "al azar", durante intervalos de tiempo largos comparados con τ .*

Hemos supuesto que el electrón en el átomo oscila libremente durante el tiempo de decaimiento τ . También supusimos que el átomo estaba en reposo. Entonces el espectro de Fourier de la radiación emitida por un solo átomo tiene un ancho de banda $\Delta\omega$ que vale aproximadamente

τ^{-1} . (Tiempos de decaimiento característicos son de aproximadamente 10^{-8} seg para los átomos que emiten luz visible; esto da un ancho de banda de aproximadamente 10^8 rad/seg.) En un tubo de gas de descarga los átomos no están en reposo, sino que se desplazan con velocidades del orden de 10^5 cm/seg. Esta velocidad provoca un corrimiento Doppler, cuyo signo depende de si el átomo se acerca o aleja del observador. El “ensanchamiento” Doppler provoca un ancho de banda que es mayor que el ancho “natural” τ^{-1} por un factor del orden de 100. Además, frecuentemente, el proceso de radiación se interrumpe por choques, antes que el átomo tenga oportunidad de decaer. En este caso el ancho de banda aumenta aún más por “ensanchamiento por choque”.

Tiempo de coherencia. Cuando se han tenido en cuenta todos los factores del “ensanchamiento de frecuencia”, se obtiene finalmente un ancho de banda $\Delta\omega$, que puede ser mucho mayor que τ^{-1} . En este caso, el tiempo durante el cual el estado de polarización puede considerarse como aproximadamente constante no es el tiempo de decaimiento natural τ , sino es el llamado *tiempo de coherencia* t_{coh} , dado por

$$t_{\text{coh}} \approx \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (60)$$

Podemos interpretar la ecuación (60) de la siguiente manera. El estado de polarización permanece esencialmente invariable siempre que la fase relativa de E_x y E_y varíe en una cantidad pequeña comparada con 2π . Entonces, el tiempo de coherencia t_{coh} está dado por aproximadamente el tiempo que le lleva a las frecuencias máximas y mínima de la banda en desfasarse en 2π :

$$\Delta\omega t_{\text{coh}} \approx 2\pi, \quad (61)$$

que es la misma que la ecuación (60).

El hecho de existir un ancho de banda finito $\Delta\omega$, no implica necesariamente que la polarización varíe después de un intervalo de tiempo del orden de $(\Delta\nu)^{-1}$. Por ejemplo, puede haber un polaroide entre los átomos que irradian y el observador. En este caso, las componentes x e y de la radiación vistas por el observador mantienen una relación de fase constante, aunque el ancho de banda es aún $\Delta\nu$. Esto es porque las componentes x e y ya no son “independientes”. El polaroide, por decirlo así, ha “examinado” las componentes x e y de la radiación incidente y en cualquier instante ha “elegido para transmitir” sólo aquellas partes de las componentes x e y incidentes superpuestas con la relación de fase apropiada para hacer mover a los electrones del polaroide en la dirección de transmisión máxima, transversal a los “alambres”. Aque-

las partes de la radiación incidente x e y que tienen una fase relativa que hace mover a los electrones “según los alambres” fueron absorbidas.

Este es otro ejemplo. Supongamos que tenemos dos fuentes de luz de gas de descarga que dan luz de la misma frecuencia dominante ω_0 , el mismo ancho de banda y la misma intensidad promedio. Con una placa de vidrio o espejo “semiplateado” apropiado, podemos fabricar una distribución tal que las dos fuentes, para el observador, parezcan estar superpuestas (o sea, que sus imágenes estén superpuestas). La luz de cada fuente apunta en la dirección $+z$, hacia el observador. Ahora ponemos un polaroide sobre cada fuente, de manera que una fuente irradie polarizado linealmente según \hat{x} , y la otra según \hat{y} (cuando ambos haces luminosos se propagan según la dirección $+z$). Si el observador hace una medición de la polarización durante un lapso corto comparado con el tiempo de coherencia $(\Delta\nu)^{-1}$, encontrará un estado de polarización definido. Si deja pasar un tiempo largo comparado con $(\Delta\nu)^{-1}$ y hace otra medición de la polarización, encontrará un estado de polarización totalmente no relacionado con el anterior. Además, el observador hallará que es esencialmente imposible distinguir esta radiación de la que se obtendría quitando una de las fuentes y quitando también el polaroide de la otra fuente.

Definición de luz no polarizada. Ahora estamos preparados para explicar qué queremos decir por luz “no polarizada”. Luz no polarizada es aquella cuyas componentes de polarización (x e y , o dextrógira y levógira) son emitidas “independientemente” (o sea, no se las mantiene en fase, como, por ejemplo, con un polaroide) y cuyas amplitudes y fases relativas para las dos componentes de polarización han sido medidas por un método que hace promedios sobre intervalos de tiempos largos comparados con el tiempo de coherencia $(\Delta\nu)^{-1}$. No existe luz “intrínsecamente” no polarizada. Para pasar de luz “no polarizada” a luz completamente “polarizada” sólo hay que inventar un método que permita medir la polarización antes que las fases tengan oportunidad de variar.

Mediciones de polarización. Una descripción cuantitativa de la “cantidad de polarización” que significa la cantidad de correlación entre fases y amplitudes que se mantiene durante el intervalo de medición, puede hacerse de la manera siguiente: Supongamos que representamos el estado instantáneo de polarización por A_1 , A_2 , φ_1 y φ_2 en la representación de polarización lineal, donde \mathbf{E} es la parte real de

$$\mathbf{E}_c = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}(\hat{x}E_1e^{i\varphi_1} + \hat{y}E_2e^{i\varphi_2}). \quad (62)$$

Podemos escribir esto como una superposición de Fourier continua de ondas armónicas que ocupan una pequeña banda de frecuencias; pero

también podemos pensar que la ecuación (62) es una onda casi armónica con frecuencia dominante ω_0 y amplitudes y constantes de fase E_1 , E_2 , φ_1 y φ_2 que no son constantes en el tiempo, sino que varían lentamente (de manera impredecible).

Veamos ahora cómo expresar E_1 , E_2 , φ_1 y φ_2 en términos de sólo mediciones de intensidad. (Usamos la palabra intensidad como sinónimo de flujo de energía.) Es el tipo de medición que es más fácil de hacer. Suponemos tener polaroide y láminas de cuarto de onda y también un fotomultiplicador con el cual medir el flujo de fotones (número de fotones por unidad de área) para cualquier disposición experimental. El flujo de fotones promedio es proporcional al flujo de energía clásico promedio. Éste es proporcional al promedio sobre un ciclo del cuadrado del campo eléctrico. Suponemos que tenemos un fotomultiplicador con un fotocátodo de área y eficiencia de detección conocidos, y que, por lo tanto, podemos determinar el promedio temporal del cuadrado del campo eléctrico del haz de luz que incide en el fotocátodo.

Tiempo de medición. Sea T el tiempo total de duración de todas las mediciones que serán descritas; lo llamaremos *tiempo de medición*. Es el tiempo durante el cual se determinarán todas las constantes interesantes E_1 , E_2 , φ_1 y φ_2 . Queremos completar la medición antes que el estado de polarización tenga oportunidad de cambiar. Por lo tanto, suponemos que el tiempo de medición T es pequeño comparado con el tiempo de coherencia $\Delta\nu^{-1}$. Nuestra descripción puede parecer la de un experimento lento que lleva “todo el día”; pero no es necesariamente así. Podemos (mediante la suficiente ingenuidad) arreglar las cosas de manera de medir todo simultáneamente. En este caso, la limitación básica en el tiempo de medición T sería el tiempo de resolución del aparato. Si el instrumento es un fotomultiplicador típico, el tiempo de resolución es de aproximadamente 10^{-9} seg. Por lo tanto, podremos medir el estado de polarización “instantáneo” de radiación con el tiempo de coherencia mayor que 10^{-9} seg, por ejemplo 10^{-8} seg.

Medición de cuatro constantes. Debemos dejar que el experimentador haga algo. Entonces no vamos a especificar exactamente cómo tendrá que realizar los experimentos (que describiremos) en un tiempo T del orden 10^{-8} seg. Éste es un procedimiento para encontrar las cuatro constantes que describen el haz de luz, si conocemos su frecuencia y dirección. Suponemos que además del fotomultiplicador calibrado tenemos un polaroide perfecto (o calibrado) y una lámina de cuarto de onda. El procedimiento es el siguiente:

1. Pongamos el polaroide frente al fotomultiplicador. Elijamos arbitrariamente los ejes transversales \hat{x} e \hat{y} . Rotemos el eje de transmisión máxima hasta \hat{x} . Midamos el promedio temporal de cuentas por fotones.

El resultado da

$$\langle E_x^2 \rangle = \frac{1}{2} E_1^2. \quad (63)$$

2. Rotemos el polaroide hasta \hat{y} y midamos las cuentas. Esto da

$$\langle E_y^2 \rangle = \frac{1}{2} E_2^2. \quad (64)$$

3. Rotemos el polaroide hasta una dirección a 45° entre \hat{x} e \hat{y} . Llamemos \hat{e} a esta dirección. Entonces, el versor \hat{e} está dado por

$$\hat{e} = \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}. \quad (65)$$

La componente del campo eléctrico transmitido por el polaroide es el producto escalar entre \hat{e} y el campo incidente \mathbf{E} . Usando el complejo \mathbf{E}_c de las ecuaciones (65) y (62) tenemos que

$$\hat{e} \cdot \mathbf{E}_c(z, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \left(\frac{E_1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_1} + \frac{E_2}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_2} \right). \quad (66)$$

El flujo de fotones transmitidos es una medida de

$$\langle (\hat{e} \cdot \mathbf{E})^2 \rangle = \frac{1}{2} [\frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 + E_1 E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (67)$$

Como nosotros ya hemos determinado E_1^2 y E_2^2 (E_1 y E_2 son números reales positivos) a partir de las ecuaciones (62) y (64), vemos que la ecuación (67) nos da $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Aún necesitamos $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ para determinar la fase relativa. (En general, no nos interesan las fases absolutas.) Para obtenerlo, usamos la lámina de cuarto de onda:

4. Dejemos el polaroide según \hat{e} a 45° con \hat{x} e \hat{y} . La ecuación (66) nos da el campo transmitido. Coloque ahora una lámina de cuarto de onda *delante* del polaroide con su eje lento según \hat{x} o según \hat{y} . Para definirnos, suponga que el eje lento está según \hat{y} . Entonces \mathbf{E}_c como se da en la ecuación (62) tiene φ_2 reemplazada por $\varphi_2 - \frac{1}{2}\pi$. (También, φ_1 y φ_2 han adquirido una constante sin interés, que dejamos de lado.) Consecuentemente, $\hat{e} \cdot \mathbf{E}_c$ como está dado por la ecuación (66) tiene φ_2 reemplazada por $\varphi_2 - \frac{1}{2}\pi$. Midamos ahora el flujo de fotones más allá del sistema de placa cuarto de onda más un polaroide. El flujo está dado por una expresión como la ecuación (67) con φ_2 reemplazada por $\varphi_2 - \frac{1}{2}\pi$. Así determinamos

$$\langle (\hat{e} \cdot \mathbf{E})^2 \rangle = \frac{1}{2} [\frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 - E_1 E_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (68)$$

De esta manera hemos determinado completamente E_1 , E_2 y $\varphi_1 - \varphi_2$ mediante mediciones representadas por las ecuaciones (63), (64), (67) y (68). Éstos son los resultados que se obtienen si el tiempo T medido es corto comparado con el tiempo de coherencia.

Como mencionamos anteriormente, si el haz de luz se hace pasar a través de un polarizador (como una pieza de polaroide o un polarizador circular) antes de alcanzar el equipo detector, entonces el tiempo de coherencia no es tan corto como $\Delta\nu^{-1}$. Verdaderamente, el tiempo de coherencia de polarización es infinito (al menos si alguien no quita el pedazo de polaroide). Entonces, pueden hacerse las mediciones implicadas por la descripción anterior; puede usarse también el ojo en lugar del fotomultiplicador. Deberá practicar utilizando sus herramientas ópticas para determinar el estado de polarización de una fuente luminosa de polarización desconocida. Si la fuente está lineal, circular o elípticamente polarizada y tiene tiempo de coherencia mayor que los pocos minutos que se tardan en hacer la medición, entonces podemos determinar completamente el estado de polarización usando el ojo, un polaroide y una placa de cuarto de onda. (También se puede usar el polarizador circular y la lámina de media onda.)

Nuestra descripción de una medición general de polarización fue más general que lo necesario para muchos casos prácticos. Por ejemplo, si la luz es polarizada según cierta dirección transversal, es inútil usar direcciones cartesianas generales \hat{x} e \hat{y} . Cuando hallemos que la luz está linealmente polarizada, se orientará naturalmente \hat{x} en la dirección de polarización. En este caso, la fase relativa $\varphi_1 - \varphi_2$ carece de importancia, ya que la amplitud según \hat{y} es cero. Similarmente, si hallamos, por ejemplo, que la luz está polarizada circularmente y es dextrógira, es inútil usar la representación de polarización lineal (que se usó en la descripción general anterior) para describirla.

Polarizador circular. El polarizador circular de un equipo de óptica es un sandwich que consiste en un polarizador lineal adherido a una lámina de cuarto de onda. El eje de transmisión máxima del polaroide forma un ángulo de 45° con los ejes ópticos de la lámina de cuarto de onda. El extremo de "entrada" es la cara del sandwich correspondiente al polarizador lineal. El extremo de salida es la cara correspondiente a la lámina de cuarto de onda. Si se envía luz no polarizada de una lámpara al extremo de entrada, se obtiene luz *levógira* (por la convención del destornillador óptico). Por lo tanto, el polarizador ha absorbido toda la luz excepto la que corresponde al movimiento de electrones en círculos que (si se pudiesen ver) serían recorridos en el sentido opuesto al de las agujas del reloj, si se mira hacia la lámpara. Si agregamos una lámina de media onda detrás del extremo de salida convertimos la luz levógira en luz dextrógira. Si, en cambio, hacemos que la luz levógira se refleje sobre un espejo con incidencia casi normal, la convertiremos en luz

dextrógira. También puede usar su polarizador circular, en “sentido opuesto”, como analizador. Entonces “deja pasar” la luz del mismo sentido que la que él produce (cuando se usa como polarizador); y absorbe la luz de sentido opuesto. Esto se puede entender así. El retardo en fase de la componente lineal de polarización lenta relativa a la componente lineal rápida, es independiente de la dirección en que es atravesada la lámina de cuarto de onda. Cuando el polarizador circular es usado como polarizador, el polarizador lineal seguido de la lámina de cuarto de onda produce polarización lineal con E rotando desde \hat{r} hacia \hat{I} . Si esta luz es reflejada en un espejo, continúa rotando en la misma dirección con respecto a un eje fijo en el espacio (por conservación del momento angular). Cuando pasa nuevamente por la lámina de cuarto de onda, el retardo en fase es similar al anterior y entonces provoca un nuevo desfase de 90° cuando la luz llega al polarizador lineal, propagándose ahora en sentido contrario al de la primera vez. Esto implica que la luz está linealmente polarizada a 90° de su dirección original a lo largo del eje de transmisión máxima del polarizador lineal, ya que una componente ha sufrido una inversión de signo respecto a la otra. La luz es entonces, absorbida. Esto le explica por qué un espejo o pieza brillante de metal parece “negra” (en realidad es azul oscuro) cuando coloca su polarizador circular sobre él con su extremo de entrada hacia arriba. El espejo invierte el sentido. Similarmente, *cualquier* luz dextrógira será absorbida por su polarizador (que produce luz levógira) cuando incide en la cara de salida. Por otra parte, si incide luz polarizada levógira en el extremo de salida de un polarizador levógiro, la componente lineal según la componente del eje \hat{I} de la lámina cuarto de onda *adelanta* a la componente \hat{r} . La lámina de cuarto de onda reduce este adelanto de 90° a cero. Entonces, cuando la luz llega al polarizador lineal, las componentes lineales \hat{I} y \hat{r} están en fase, y la luz es completamente transmitida a través del polarizador lineal. Emerge linealmente polarizada y con el total de la intensidad (despreciando las pérdidas que usualmente despreciamos).

Éste es otro ejemplo: Supóngase que miramos a una fuente de luz a través de un polaroide; al rotar el polaroide alrededor de la línea de observación no produce variación de intensidad. Entonces supóngase que miramos hacia ella a través de su polarizador levógiro; la intensidad permanece invariable (¿qué puede deducirse de esto?) Después, ponemos la lámina de cuarto de onda entre la fuente y el polarizador levógiro y repetimos la última medición; la luz es absorbida completamente. *Conclusión*: Es luz polarizada circularmente levógira.

Lámina de cuarto de onda y lámina de media onda. Tomemos una de las piezas de plástico transparente del equipo de óptica. Pongámosla cara a cara con un polaroide, con su borde formando un ángulo de 45° con el borde del polaroide. Miremos a través de ambas piezas hacia una lám-

para o hacia el cielo, con el polaroide hacia la fuente. Coloquemos otro polaroide en el otro lado del plástico transparente. Rotemos el segundo polaroide. Repítase el experimento con la otra pieza de plástico. ¿Cuál es la lámina de cuarto de onda y cuál la de media onda? Repítase el experimento con el borde del plástico transparente paralela al borde de los polaroides.

La etiqueta de la lámina de retardo de la que fue cortada su pieza no dice “retardadora de cuarto de onda”; dice, en cambio, “el valor de retardo” es $140 \pm 20 \text{ m}\mu$. Un $\text{m}\mu$ es un milimicrón $= 10^{-3} \cdot 10^{-6} \text{ metro} = 10^{-7} \text{ cm} = 10 \text{ \AA}$. Entonces, el retardo es de 1400 \AA . En un cuarto de onda si la longitud de onda es $4 \times 1400 \text{ \AA} = 5600 \text{ \AA}$ (corresponde al verde). Es otra fracción de longitud de onda si la longitud de onda es distinta de 5600 \AA . Tratemos de entender qué significa la etiqueta. El retardo de fase relativa $\Delta\varphi$ entre las componentes l y r que atraviesan una lámina retardadora de espesor Δz y con índices n_l y n_r es

$$\Delta\varphi = 2\pi(n_s - n_f) \frac{\Delta z}{\lambda}. \quad (69)$$

Para una lámina de cuarto de onda, el retardo de la fase corresponde a $1/4$ de ciclo, o sea $\frac{1}{2}\pi$ radianes. Por lo tanto, una lámina de cuarto de onda debe tener

$$(n_s - n_f) \Delta z = \frac{1}{4}\lambda. \quad (70)$$

La etiqueta indica que $(n_l - n_r)\Delta z$ vale $1/4 \lambda_0$, donde λ_0 vale 5600 \AA . Ése es el “retardo espacial” independiente de λ (en la mayor parte del rango visible). Esto significa que, en buena aproximación, $n_l - n_r$ es independiente de la longitud de onda. Para una longitud de onda arbitraria (visible), tenemos

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{5600 \text{ \AA}}{\lambda}. \quad (71)$$

De manera similar, su lámina de media onda tiene un valor de retardo de $280 \pm 20 \text{ m}\mu$.

Luz no polarizada. Si se usa el equipo de óptica para determinar la polarización de la luz de una lámpara, encontraremos que el polarizador lineal no manifiesta variaciones de intensidad para cualquier ángulo alrededor de la línea de observación; ni tampoco hay variaciones de intensidad cuando se coloca una lámina de cuarto de onda entre la fuente y el polarizador. En función de x, y , representación lineal de la polarización de las ecuaciones (63), (64), (67) y (68), esto implica (usamos una “barra”

sobre las cantidades medidas para que las mediciones transcurran durante el tiempo de medición T)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overline{E_1^2} &= \frac{1}{2}\overline{E_2^2} \\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\overline{E_1^2} + \frac{1}{2}\overline{E_2^2} + \overline{E_1 E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}] \\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\overline{E_1^2} + \frac{1}{2}\overline{E_2^2} - \overline{E_1 E_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}].\end{aligned}\quad (72)$$

De otra forma, para cualquier elección de ejes x e y , el promedio temporal de E_x^2 es igual al promedio temporal de E_y^2 , y el promedio temporal de $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ y $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ es cero. Pero, por supuesto, ¡no existe *ningún* ángulo $\varphi_1 - \varphi_2$ con la propiedad que tanto su seno como su coseno valgan cero! Lo esencial en la ecuación (72) es la barra, que indica el promedio temporal sobre el intervalo de tiempo T . La razón por la cual a la fase relativa le corresponde cero para el promedio temporal de su coseno y para el promedio temporal de su seno, es que la fase relativa varió al azar durante el intervalo largo T en que hicimos la medición. Ha tomado todos los valores entre $-\pi$ y $+\pi$ (la fase relativa sólo está definida en un intervalo 2π). Tanto el seno como el coseno han tomado tantos valores positivos como negativos que han dado cero como promedio.

Si nosotros pudiésemos completar la medición en menos de 10^{-10} seg (para una fuente de descarga de gas con ensanchamiento Doppler típico), obtendríamos un resultado muy diferente. Encontraríamos que la luz está completamente polarizada en cualquier “instante”, donde un instante incluye muchas oscilaciones, pero es pequeño comparado con el ancho de banda (el tiempo de coherencia).

Uno puede simular luz polarizada con un “slinky”. Lo agita en una dirección durante un momento, luego en otra. Hagamos una fotografía con tiempo de exposición T . Si T es corto comparado con el tiempo en que lo movimos en una dirección, la fotografía indicará polarización completa. Si T es largo, cualquiera que examine la fotografía dirá “El slinky está no polarizado” — que justamente significa que T fue muy largo.

Polarización parcial. Si T no fue ni demasiado largo ni demasiado corto comparado con el tiempo de coherencia, la radiación se llama *parcialmente polarizada*. En este caso, hay diferencias distinguibles entre los resultados de las cuatro mediciones de intensidad que dan $\overline{E_x^2}$, $\overline{E_y^2}$, $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ y $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$. Hay muchas formas de expresar el hecho de que la polarización ha sido enmascarada durante el tiempo de medición T . Por ejemplo, se puede definir una “polarización fraccional P ” por

$$P^2 \equiv [\overline{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}]^2 + [\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}]^2, \quad (73)$$

donde $\overline{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$ y $\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ están definidos por las mediciones de intensidad que dan los resultados de las ecuaciones (63), (64), (67) y (68). Si T es pequeño comparado con el tiempo de coherencia, entonces P vale 0. Para valores de T intermedios, P vale entre 0 y 1. Por supuesto, P no contiene toda la información; ésta está contenida en las cuatro mediciones.

Problemas y experimentos caseros

8.1 Desarrolle explícitamente los pasos señalados a continuación de la ecuación (20), Sección 8.2, para demostrar que la ecuación (20) representa un desplazamiento $\psi(t)$ que sigue una trayectoria elíptica.

8.2 Luz no polarizada de un tubo de descarga atraviesa un filtro de gelatina verde, que aísla la línea verde. Mediante rendijas y lentes se forma un haz paralelo que se propaga en la dirección $+z$. El haz está bien definido en la dirección $z = 0$. En $z = 100$ hay un fotomultiplicador que cuenta los fotones del haz. El promedio de conteo es de 60 cuentas por minuto: $R = 64$.

(a) Ponemos una lámina cuarto de onda, con el eje de propagación rápida a lo largo de \hat{x} en $z = 10$. ¿Cuál es el valor de R ahora? (Desprecie pequeñas pérdidas debidas a reflexiones, etc.)

(b) Ponemos un polarizador lineal con eje de máxima transmisión a lo largo de $(\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2}$ en $z = 20$. ¿Cuánto vale R ahora? (Nota: En este problema, a medida que interponemos cosas dejamos lo que ya habíamos puesto en su lugar. Las posiciones z son para ayudar a mantener el orden.)

(c) Agregamos una lámina de media onda con eje de máxima transmisión a lo largo de \hat{x} en $z = 30$. ¿Cuánto vale R ?

(d) Ahora agregamos un polarizador lineal con eje de máxima transmisión según \hat{x} en $z = 40$. ¿Cuánto vale R ?

(e) Ahora se agrega un polarizador circular levógiro en $z = 50$. ¿Cuál es el máximo conteo posible (con el polarizador en la dirección de propagación)? ¿Cuál es el mínimo conteo?

(f) Con el polarizador levógiro de la parte (e) dispuesto para conteo máximo, ponemos una lámina de media onda con eje de máximo de transmisión según $(\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2}$ en $z = 60$, seguido de un polarizador lineal en $z = 70$ con su eje de máximo de transmisión según \hat{y} . ¿Cuánto vale R ?

8.3 Luz circulante polarizada de intensidad I_0 (intensidad significa flujo de energía por unidad de área y por unidad de tiempo; es proporcional a la corriente de salida de un fotomultiplicador, para luz de frecuencia dada) incide en un polaroide simple. Muestre que la corriente de salida (intensidad de la luz que sale por detrás del polaroide) es $1/2 I_0$.

8.4 Luz linealmente polarizada con dirección de polarización que forma un ángulo θ con \hat{x} , incide sobre un polaroide con eje de máxima transmisión según \hat{x} . El primer polaroide está seguido por un segundo polaroide con eje de transmisión máxima según la dirección de polarización de la luz incidente original. Muestre que si la intensidad inicial es I_0 , la intensidad de salida es $I_0 \cos^4 \theta$.

8.5 Luz circularmente polarizada de intensidad I_0 incide sobre un sandwich de tres polaroides. El primero y el tercer polaroide están cruzados, o sea, sus ejes de transmisión máximos forman un ángulo de 90° entre sí. El polaroide del medio hace un ángulo θ con el eje del primer polaroide. Muestre que la intensidad de salida es $1/2 I_0 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$.

8.6 Se dispone un número muy grande de polaroides $N + 1$ en un sandwich. El ángulo del eje de transmisión máxima de cada polaroide forma un ángulo

constante α mayor que el de su precedente inmediato en el sandwich. Por consiguiente, el último polaroide forma un ángulo $\theta = N\alpha$ con el primero. Despreciando pérdidas por reflexión en las superficies, y suponiendo que incide luz linealmente polarizada de intensidad I_0 en el primer polaroide con su polarización según el eje de transmisión máximo del primer polaroide, hallar la intensidad de salida. Tome N muy grande y retenga sólo el primer término de una serie apropiada de potencias (desarrollo de Taylor).

$$\text{Resp. } I = I_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{N} + \text{términos de orden superior} \right).$$

Esto significa que aunque θ sea 90° , tal que el primer y el último polaroide estén cruzados, la intensidad de salida es igual a la intensidad de entrada si tenemos suficientes polaroides intermedios. ¡Nosotros podemos rotar “suavemente” el plano de polarización y no perder nada! Por consiguiente, si adherimos un número grande de polaroides (usando un adhesivo con el mismo índice que los polaroides, para minimizar las reflexiones), tendríamos algo como una molécula de azúcar gigante, que rota el plano de polarización sin absorber energía.

Otra manera de obtener “actividad óptica microscópica” es doblar pedazos de hojalata en forma de sacacorchos (todos similares), sumergirlos en espuma de estireno (una buena aproximación a un medio de soporte sin masa, rígido, libre de electrones), y hacerle pasar microondas polarizadas linealmente. El plano de polarización de las microondas va a rotar.

8.7 Suponga que se tiene luz polarizada que incide con polarización según \hat{x} . Ahora desea tener luz polarizada a 30° con \hat{x} , o sea, según

$$\hat{e} = \hat{x} \cos 30^\circ + \hat{y} \sin 30^\circ.$$

¿Cómo puede obtenerse este campo transmitido (a) a costa de perder intensidad, (b) sin perder intensidad y sin usar polaroides?

8.8 ¿Cuál es la intensidad transmitida para luz no polarizada de intensidad I_0 que incide sobre polaroides cruzados con una lámina de media onda entre ellos (a) cuando el eje óptico de retardo de la lámina (llamado eje lento) es paralelo al eje de transmisión máxima de uno de los polaroides; (b) cuando el eje óptico de la lámina forma un ángulo de 45° con los ejes de transmisión máxima?

8.9 Respóndase a las mismas preguntas que en el Problema 8.8, pero usando una lámina de cuarto de onda.

8.10 Use varias hojas de plástico (instrumentos de dibujo, celofán, cinta de celofán autoadhesiva, etc.), para refracción doble, rotándolas entre polaroides cruzados. ¿Cómo podemos afirmar que se tuvo la suerte de encontrar una lámina cuarto de onda o media onda? Intentemos el experimento de estirar papel Saran para hacerlo doblemente refractante.

Experimento casero

8.11 Lámina de cuarto de onda con papel Saran. Consiga un rollo de papel de envolver Saran (del tipo de plástico fácilmente estirable que se usa para envolver sandwiches). Aproximadamente, seis o siete capas paralelas hacen una lámina cuarto de onda muy buena. (Una lámina cuarto de onda del mismo tamaño —aproximadamente 1 pie cuadrado— puede obtenerse de Polaroid Corporation, Cambridge, Mass. 02141.) Se la puede “sintonizar” para distintos colores agregando o quitando una capa. Por ejemplo, si siete capas forman una lámina cuarto de onda perfecta para 5600 \AA (verde), entonces ocho capas van a serlo para $(8/7)(5600) = 6400 \text{ \AA}$ (rojo). Para eliminar algunas de las arrugas, podemos adherir el papel en un lado de un cartón con un agujero.

Experimento casero

Experimento casero

8.12 Dependencia de las láminas retardadoras con el color. Una "lámina de media onda" lo es en realidad sólo para una longitud de onda particular. La lámina de media onda en su equipo de óptica lo es para 5600 Å. Consiga una fuente blanca lineal brillante. (Cualquier lámpara incandescente con un vidrio claro servirá, por ejemplo, una bombilla de 150 vatios con filamento derecho que sea una hélice de aproximadamente una pulgada de largo y 1 mm de diámetro.) Mire a la fuente blanca con su red de difracción. (Para obtener mejor resolución separe los colores según la dirección perpendicular a la dirección de la fuente lineal.) Ahora tome dos polaroides *paralelos*. Ponga la lámina de media onda entre los polaroides y a 45°. Entonces, el color para el cual la lámina de media onda lo es realmente va a tener su polarización lineal girado 90° y será absorbido. Miremos a través del sandwich usando su red de difracción. (Mantengamos todo cerca de un ojo.) ¿Se ve la banda oscura en el verde? ¡Ese es el color de 5600 Å! (Nota: Rótese el último polaroide levemente para sintonizar para el máximo de oscuridad dentro de la banda de absorción.)

Experimento casero

8.13 Lámina de media onda con papel Saran. Construya una lámina de media onda por el método descrito en el Experimento casero 8.11. Exigirá alrededor de 12 a 15 capas (si el papel es como el mío). Quizás pueda usarse el método del Experimento casero 8.12 para "sintonizar" la lámina, agregando capas hasta que la banda de absorción esté a 5600 Å (determinándolo por comparación con la lámina de media onda de su equipo). Esto le dará con precisión regular el valor de $(n_i - n_r)\Delta z$ para una lámina.

Experimento casero

8.14 Polarización en slinky. Encuentre un resorte y un compañero. Junto con su compañero, sostengan extremos opuestos del resorte.

(a) Agite cada uno el resorte según una dirección de rotación dextrógira (desde su propio punto de vista). Si esto no lo convence de que la polarización lineal es una superposición de polarizaciones circulares opuestas, nada le convencerá.

(b) Use cada uno un libro como guía para mover la mano, y mientras agita según polarización lineal a 45° con la horizontal, el otro lo hará a 90° con el primero. (El ángulo de 45° es para evitar que la gravedad provoque una asimetría grande.) Uno cuenta en voz alta "1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4..." (cuatro golpes para un ciclo, o tal vez para medio ciclo), con "uno" correspondiendo a un movimiento reproducible de la mano. El otro agite en fase, o desfasado 180° ó 90°. Según se ve, se requiere concentración para no distraerse.

(c) Con el extremo lejano fijo en algo (ahora su compañero puede irse), agite un paquete de ondas circularmente polarizado de una o dos vueltas. Verifique que conserva el momento angular después de la reflexión. Verifique que si el momento angular está a lo largo de la dirección de propagación, la forma es de tornillo levógiro, y que el sentido cambia después de la reflexión.

Experimento casero

8.15 Lámina de media onda de cinta de celofán adhesiva. Adhiera una capa de cinta de celofán en un portaobjetos para microscopio (el portaobjetos es para soporte mecánico). Pruebe si es una lámina de media onda mediante el Experimento casero 8.12. Estime $(n_i - n_r)\Delta z$.

Experimento casero

8.16 Polarización general con cinta de celofán adhesiva. Adhiera 16 capas de cinta de celofán del tipo Scotch en un portaobjetos de microscopio. Probablemente habrá burbujas y entonces será difícil ver a través. La siguiente es una técnica mejorada: Ponga un portaobjetos sobre una tabla. Ponga una "cuenta" de aceite (del tipo aceite mineral) en el centro del portaobjetos. Tome una cinta adhesiva del largo del portaobjetos pero con dos o tres pulgadas más en cada extremo. Adhiera la cinta sobre el portaobjetos, haciendo un buen con-

tacto óptico al distribuir el aceite. Mientras lo hace, adhiera la cinta a la mesa. Ponga una cuenta de aceite en la región central de la cinta. Agregue otra capa de cinta. (La cinta se adherirá a sí misma en los extremos donde no hay aceite.) Aceite, cinta, aceite, cinta... Sobre la 16.^a capa de cinta ponga otra cuenta de aceite y luego un portaobjetos de microscopio. Agregue más cinta para sostener el portaobjetos, pero no oscurezca la región clara. Ahora tiene ya un paquete con superficies externas de vidrios planos y 16 capas de cinta. Será razonablemente claro y fácil de ver a través.

Éste es el experimento: Adhiera un polaroide a una cara del paquete con el eje del polaroide a 45° con el eje de la cinta. Adhiera también la red de difracción. Sostenga este paquete como para mirar a su fuente blanca lineal. Con la otra mano, sostenga un polarizador lineal (polaroide) en el extremo de salida del paquete y paralelo al primer polaroide.

(a) ¡Observe varias bandas negras! Estas bandas negras tienen todas polarización lineal que son absorbidas por el polarizador lineal. Están separadas en fase relativa (de componentes de polarización lineal según los ejes rápido y lento de las cintas de celofán) por 2π . La región “brillante” entre dos bandas oscuras sucesivas tiene fase relativa que varía entre cero a 2 y, entonces, pasa por todas las posibles polarizaciones mostradas en la Fig. 8.3, Sección 8.2.

(b) Rote el polaroid “analizador” en 90° . ¡Las regiones negras se vuelven brillantes y las brillantes negras! ¿Por qué?

(c) Reemplace el polaroide por su polarizador circular usándolo como analizador, o sea, con el extremo de salida hacia la fuente.

(Cuando lo pone sobre una moneda, y ésta se pone azul oscuro, el extremo de entrada está hacia arriba.)

(d) Coloque los polarizadores lineal y circular, separando el campo visual entre ellos. Tienen que estar paralelos al primer polarizador (45° con el portaobjetos). Mueva el paquete de forma que vea a través, primeramente, del polarizador circular y, después, del lineal. Las bandas se mueven un cuarto de la distancia entre bandas negras (o sea, $\pi/2$ radianes en fase). Ahora, rote el polarizador lineal y repita. La dirección de desplazamiento de las bandas se invertirá. Mediante estos métodos, podrá convencerse de que la polarización varía desde (por ejemplo) lineal hacia arriba, derecha, a circular dextrógira a lineal hacia arriba, izquierda, a circular levógira a lineal hacia arriba, derecha, a medida que gira 2π . Haga un esquema de la polarización en función del color (longitud de onda), indicando la polarización lineal con flechas con dos cabezas y la circular por “flechas circulares”.

8.17 Filtro polaroide — Lyot de cinta adhesiva de celofán. (El experimento siguiente requiere cuatro piezas de polaroide.) Fabríquese un retardador de 16 capas de cinta de celofán como en el Experimento casero 8.16. Haga un retardador de 8 capas con la misma técnica, y también un retardador de 4 capas. Llamaremos a estos paquetes con los nombres RC16 (retardador de capas: 16), RC8 y RC4. Al polarizador lineal polaroide lo llamaremos P, y P(45°) significa que el eje de transmisión máxima de P forma un ángulo de 45° con el eje de la cinta. La red de difracción la llamaremos RD. Haga los siguientes experimentos:

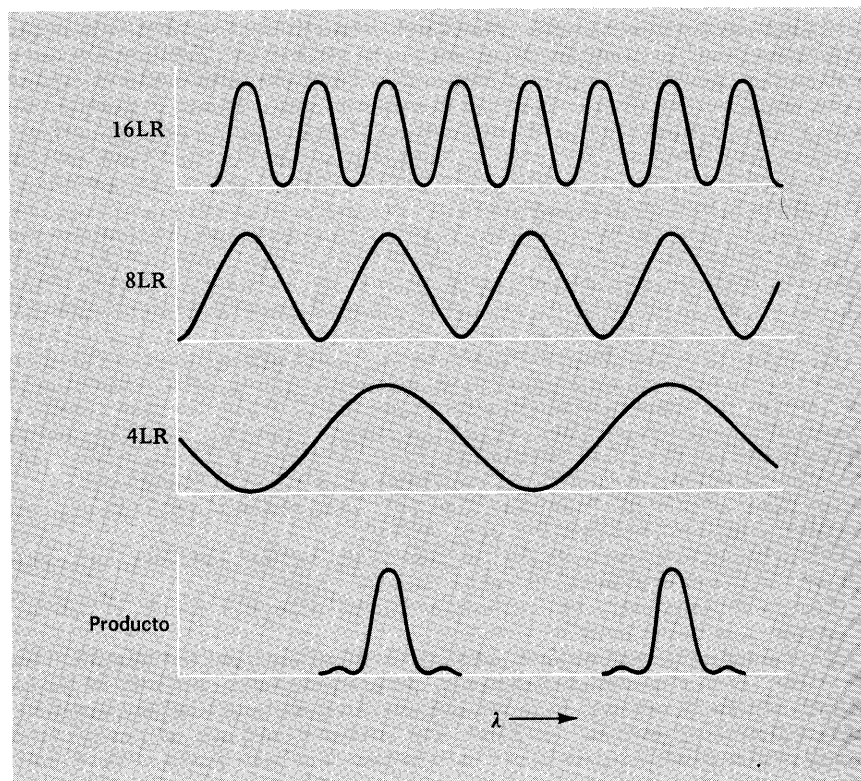
(a) Haga un sandwich que consista de RD:P(45°):RC16:P(45°). Mire su fuente lineal blanca. Esto es similar al Experimento casero 8.16. Repita el experimento usando el RC8 en lugar del RC16.

(b) Agregue el RC8 y otro P en el extremo de salida del RC16 de manera de tener RD:P(45°):RC16:(45°):RC8:P(45°). Mire la fuente lineal.

(c) Agregue ahora RC4:P(45°) a la salida del paquete de la parte (b) y vuelva a mirar. ¡Note que está borrando las “bandas laterales” mediante filtros sucesivos! Finalmente tendrá un filtro pasabanda. (Puede aclarar las cosas usando su filtro de gelatina si lo desea.) El ancho de banda está determinado por RC16. Si quiere hacer que el ancho de banda sea la mitad, necesita un RC32.

Experimento casero

Problema 8.17 Filtro Lyot. La curva 16LR da la intensidad transmitida para el filtro realizado por la combinación $P(45^\circ):16LR:P(45^\circ)$. Las curvas 8LR y SLR son las curvas correspondientes a filtros individuales que usan 8LR o 4LR en lugar de 16LR. Como se indica en la figura, cuando se emplea la combinación completa, la curva de transmisión es el producto de las tres curvas individuales.



(Pero aun usando aceite mineral cuidadosamente, mi paquete empieza a ser difícil para mirar a través de él. Esta clase de filtro fue inventado por B. F. Lyot en 1932. Los astrónomos usan un filtro de Lyot hecho con láminas retardadoras de cuarzo, en lugar de las láminas de cinta de celofán. Ellos usualmente logran un ancho de banda de 1 Å, centrado (por ejemplo) en la línea espectral $H\alpha$ de la serie de Balmer del hidrógeno, de longitud de onda 6563. Se usa para fotografiar el sol. La intensidad total transmitida por el filtro es el *producto* de las curvas de intensidad transmitida para los filtros RC16, RC8 y RC4. (No importa el orden. Se puede usar el filtro en los dos sentidos.) Esto se muestra en la figura.

Pregunta: Diga por qué la intensidad total transmitida se obtiene haciendo el producto entre las curvas de transmisión de los filtros individuales. ¿Por qué no (por ejemplo) sumar las tres amplitudes para los tres filtros (individuales), elevar luego al cuadrado y promediar temporalmente?

Experimento casero

8.18 Polarizador circular. (a) Ponga su polarizador circular sobre una hoja de papel de aluminio o sobre un espejo común o cuchillo brillante. Hágalo girar hasta que la hoja se vea “negra” (o azul oscuro.) Hágalo girar y mire. (Haga lo mismo con un polaroide.) Gírelo hasta la posición “negra” nuevamente. Ahora levante levemente el polarizador, tal que la luz pueda llegar al metal sin atravesar el polarizador. Mire la “sombra” o “imagen” del polarizador, mientras lo levanta lentamente y lo vuelve a poner. Explique lo que ve.

(b) Tome la hoja de aluminio y haga en ella un pliegue en forma de V. Use iluminación de modo que la mayor parte de la luz provenga de una direc-

ción definida (una lámpara o ventana). Ponga el polarizador circular sobre la hoja, de forma que una parte cubra el pliegue, y otra cubra la parte de hoja sin plegar. Note que el pliegue aparece brillante, mientras que el resto de la hoja está oscuro. Explíquelo. (*Sugerencia*: Cuando mira su mano derecha en un espejo, aparece como mano izquierda. ¿Cómo aparece en un “espejo doble”, hecho al juntar los dos espejos en ángulo recto?).

(c) Ahora tome la hoja y arrúguela desordenadamente. Ponga sobre ella el polarizador. Mire desde cerca. Explique el enunciado: “Está depolarizado en escala macroscópica, pero está totalmente polarizado en escala microscópica”. Explique el enunciado: “Es algo análogo a la depolarización de la luz en un tiempo largo y la completa polarización de la luz en un tiempo suficientemente corto.”

(d) Ponga el polarizador sobre una hoja de papel blanco común. ¿Puede distinguir así un polarizador circular de un polaroide? Explíquelo.

(e) Ponga nuevamente al polarizador circular sobre una superficie metálica lisa. Interponga su lámina de media onda entre el polarizador y el metal. Primero prediga qué va a ver, y luego haga el experimento. Repita usando su lámina de cuarto de onda. (*Nota*: Cada color es retardado de manera diferente, como ya lo ha visto. Los efectos pueden enfatizarse usando su filtro de gelatina verde. Esto no es realmente necesario si entiende qué “negro” es una descripción aproximada).

8.19 Momento angular de la luz. Suponga que luz polarizada circularmente y dextrógira (según la convención de momento angular) incide en una placa absorbente. Esta placa está suspendida por un hilo vertical. La luz está dirigida hacia arriba e incide sobre la parte inferior de la placa.

(a) Si un haz de luz circularmente polarizado tiene 1 vatio de luz visible de longitud de onda promedio 5500 Å y si esta luz es completamente absorbida por la placa, ¿cuál es la cupla sobre la placa? (Dé la respuesta en dinas-cm.) Recuerde que la cupla está dada por la velocidad de variación del momento angular, y que la placa absorbe el momento angular de la radiación.

(b) Suponga que en lugar de una placa absorbente, usa una superficie espejeante de plata, tal que la luz es reflejada hacia atrás, a 180° de su dirección original. ¿Cuánto vale ahora la cupla?

(c) Suponga que la placa es una lámina de media onda. La luz atraviesa la placa y no incide sobre ninguna otra cosa. ¿Cuánto vale la cupla? (Desprecie reflexiones en las superficies de la placa.)

(d) Suponga que la placa es una lámina de media onda, transparente, con la superficie superior plateada, de modo que la luz atraviese la lámina de media onda, se refleje en el espejo y vuelva a atravesar la placa. ¿Cuál es la cupla?

(e) La placa es una lámina de media onda, transparente. Se fija una lámina de cuarto de onda plateada sobre la placa de modo que refleje la luz haciéndola volver a atravesar la placa. ¿Cuánto vale la cupla?

(f) ¿Cómo se puede obtener la cupla máxima?

(g) Suponga que el hilo del cual está suspendida la placa, junto con ésta tienen un período de oscilación torsional de 10 min. ¿Cómo se puede diseñar un experimento para “aumentar el efecto de la cupla, de manera que se pueda hacer una medición razonable? (Sólo queremos la idea, y no los detalles de ingeniería.) Lea ahora cómo realizó el experimento R. A. Beth, *Physical Review* 50, 115 (1936).

8.20. Polarización por dispersión. (a) Ponga algunas gotas de leche en un frasco de vidrio con agua. Envíe un haz de “flash” a través del líquido. Observe la luz azulada que es dispersada por las “moléculas de leche”. Observe su polarización con el polarizador lineal. Hágalo para desviación a 90°, para desviaciones a ángulos pequeños (aproximadamente 0°) y para ángulos grandes (aproximadamente 180°). (*Nota*: ponga una cinta adhesiva u otra cosa sobre el polarizador lineal para marcar el eje de transmisión. Éste se encuentra mirando a la

Experimento casero

luz reflejada especularmente por un vidrio, piso de madera o plástico, o cualquier superficie pintada, a un ángulo de incidencia de casi 45° (es suficientemente aproximado al ángulo de Brewster).

(b) Polarice linealmente el haz del "flash" (colímelo con un pedazo de cartón, así el haz será más pequeño que el polaroide) y observe la luz dispersada en diferentes direcciones, en un plano perpendicular al haz (o gire el polaroide alrededor del haz).

(c) Estudie la Fig. 8.6 y su leyenda. Defina la fracción de polarizador por

$$P = \frac{I(\hat{x}) - I(\hat{y})}{I(\hat{x}) + I(\hat{y})},$$

donde $I(\hat{x})$ es la intensidad de la luz dispersada polarizada según \hat{x} , e $I(\hat{y})$ es la intensidad de la luz dispersada polarizada según \hat{y} que ve el observador. Muestre que la relación entre P y el ángulo de dispersión θ_{dis} de la figura 9.6 está dada por

$$P = \frac{1 - \cos^2 \theta_{\text{dis}}}{1 + \cos^2 \theta_{\text{dis}}}.$$

Observe que P vale cero para dispersión de 0 ó 180° y 1 para 90° .

(d) Agregue un poco de leche; el haz se vuelve blancuzco. Mire la dispersión a 90° , donde es máxima. Agregue más leche. Explique lo que sucede. Suponga que la luz solar dispersada por una nube blanca está polarizada. Intente la experiencia y observe.

Experimento casero

8.21 Polarización del arco iris. ¿Es polarizada? Se puede usar el rociado de una regadera en lugar de lluvia.

Experimento casero

8.22 Luz de la luna y luz de la tierra. Cuando la luna aparece semillena, la parte iluminada lo está por la luz del sol dispersada aproximadamente 90° con respecto al ojo. Sabemos que para dispersión de 90° el cielo azul está casi totalmente polarizado en forma lineal. ¿Supone así que la luz de luna semillena está polarizada? Haga la experiencia. Piense entonces cómo aparece la tierra cuando está semillena, mirándola desde la luna. ¿Está polarizada la luz de la tierra? Puede mirarse durante veinticuatro horas, mientras la tierra rota.)

Resp. A veces, depende de la hora y del tiempo. ¿Por qué?

8.23 Suponga que un haz de luz linealmente polarizada incide sobre una lámina de media onda que rota alrededor del eje del haz con velocidad angular ω_0 . Demuestre que el haz de salida está linealmente polarizado, con la dirección de polarización rotando a $2\omega_0$.

Experimento casero

8.24 Observe una lámpara de luz a través de un polaroide. ¿Está polarizada la luz? Ahora interponga un pedazo de celofán (o una lámina de cuarto de onda o de media onda) entre la lámpara y el polaroide. ¿Está polarizada la luz ahora? Tome la luz reflejada en una pieza plateada, tal como un cuchillo. ¿Está polarizada la luz reflejada?

Experimento casero

8.25 Medir el índice de refracción por medio del ángulo de Brewster. Se necesita una lámpara de luz (tal vez para conseguir una fuente razonablemente pequeña haya que cubrirla con un pedazo de cartón con un agujero), un pedazo de vidrio, una mesa, una caja de cartón o algo para poder ubicar la posición del ojo y un polaroide. Ponga el pedazo de vidrio sobre la mesa y mire la reflexión de la lámpara. (Verá dos reflexiones, una en la superficie de adelante y

otra en la posterior. Si lo desea, se puede eliminar la de la superficie posterior, rociando ésta con pintura negra.) Varíe los ángulos hasta que el polaroide revele que la luz reflejada está totalmente polarizada. Mida las distancias apropiadas y obtenga el índice de refracción mediante la fórmula del ángulo de Brewster $\tan \theta_B = n$. Con este tipo de instalación no se puede obtener mejor precisión que algunos grados, por lo cual no se puede distinguir entre el ángulo de Brewster correspondiente al vidrio y el correspondiente a una superficie lisa de agua.

Experimento casero

8.26 Relaciones de fase en la reflexión especular de la luz en vidrio. Intentamos verificar las relaciones mostradas en la Fig. 8.8. La instalación para el experimento es la del Experimento casero 8.25, excepto que entre el vidrio que está sobre la mesa y la lámpara, ponemos una pieza de polaroide con el eje de transmisión máxima formando un ángulo de 45° con la horizontal. (*Sugerencia:* Para hacer un montaje conveniente, ponga un poco de masilla que no se endurezca sobre un portaobjetos de microscopio y fije una esquina del polaroide a la masilla. El portaobjetos del microscopio puede ser la superficie de vidrio usada para reflejar la luz.)

Suponga que cuando su ojo está sobre el portaobjetos y mira a la lámpara a través del primer polaroide, la dirección de transmisión máxima del polaroide es “desde arriba a la derecha hacia abajo a la izquierda”. Siga analizando la polarización de la luz reflejada, mientras varía el ángulo de incidencia al cambiar la posición del portaobjetos o de la lámpara. Encontrará que, para incidencia casi normal, la polarización de la luz reflejada es “desde arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha”. A medida que mueve el portaobjetos aproximándose al ángulo de Brewster, la polarización es lineal, pero rota hacia la horizontal. Es horizontal para el ángulo de Brewster y continúa rotando en la misma dirección mientras se pasa el ángulo de Brewster hacia incidencia rasante, o sea, es “desde abajo a la izquierda a arriba a la derecha”. Al ir desde incidencia normal a incidencia rasante, la polarización rota 90° , como se señala en la Fig. 8.8. (Para incidencia normal, ambas componentes son reflejadas de la misma manera, tal como debe ser, ya que, por decirlo así, no saben cuál es cuál. Por lo tanto, la polarización es a 45° . Para incidencia rasante, ambas componentes están casi totalmente reflejadas, por esto son igualmente reflejadas y la polarización es a 45° .) Es interesante notar que la polarización es lineal durante toda la experiencia. Esto significa que no hay otros desfases que los de 0 y 180° introducidos entre aquellas componentes en el plano de incidencia y aquellas perpendiculares a él. Las ondas incidentes siempre experimentan una carga puramente resistiva al reflejarse. Esto es lo que se espera para reflexión en un medio transparente.

8.27 Conservación del momento angular. Reflexión a incidencia normal cambia la luz polarizada en forma circular dextrógira a levógira. (Cuando mira su mano derecha en un espejo, aparece como una mano izquierda.) ¿Qué pasa para incidencia rasante? ¿Es su sentido el mismo que antes de reflejarse, o se invierte? Prediga la respuesta usando la Fig. 8.8.

Experimento casero

(a) Ahora haga el experimento. (Use su lámina de cuarto de onda y fíjela un polarizador para construir un polarizador circular. Use su polarizador circular como analizador. Asegúrese de conocer el sentido del polarizador circular que construye, relativo al de su equipo.) ¿Cómo aparece su mano para incidencia rasante? ¿Qué significa el siguiente enunciado “filosófico”: ¿“Debe ser escéptico de usar mediciones de intensidad para hacer predicciones que envuelvan signos o sea, fases?” ¿Qué tiene que ver este enunciado con la forma en que aparecen sus manos en un espejo?

(b) Haga un experimento similar con polarización lineal. Con un polaroide, fabrique luz polarizada linealmente “hacia arriba a la derecha”. Mire su reflexión para incidencia rasante. La luz reflejada, ¿es “hacia arriba a la derecha”

o “hacia abajo a la derecha? Si mira la imagen de un lápiz alineado según “arriba a la derecha”, cómo aparece esta imagen, ¿“hacia arriba a la derecha” o “hacia abajo a la izquierda”? ¿Cuál es la importancia del enunciado “filosófico” anterior?

Experimento casero

8.28 Cambios de fase en reflexión metálica. La instalación necesaria es como la del Experimento casero 8.26. Pero, en lugar de un vidrio, use una pieza de metal brillante y liso, por ejemplo la hoja de acero inoxidable de un cuchillo, o un objeto de cromo o plateado. (No use un espejo común, o sea, un vidrio con la superficie posterior espejeada; no funcionará.) Necesitará dos polaroides y una lámina de cuarto de onda. Primero verifique que la luz polarizada linealmente en forma \parallel (paralela) o \perp (perpendicular) (o sea, respectivamente, paralela o perpendicular al plano de incidencia) mantiene su polarización luego de reflejarse. (Es análogo al efecto de una lámina retardadora en luz linealmente polarizada de manera paralela o perpendicular al eje óptico; no afecta a la polarización). Ahora polarice linealmente luz que incide a 45° con el plano de incidencia. Fije el ángulo de incidencia de forma que si la lámpara está a 1 pie sobre la mesa, el cuchillo esté aproximadamente a 3 pies de la lámpara. Analice la luz reflejada, usando el polaroide y la lámina de cuarto de onda (o usando su polarizador circular como analizador, con o sin una lámina de media onda). Hallará que la polarización es elíptica. Al variar el ángulo de incidencia, puede encontrar un punto donde la polarización de la luz reflejada es casi totalmente circular. Si ahora gira el polaroide polarizador en cinco o seis grados de los 45° , girando el eje de transmisión máxima hacia la vertical, de manera a aumentar levemente la componente \parallel , puede obtener que la luz reflejada esté circularmente polarizada, de manera total. (Este pequeño giro es necesario para compensar que la componente \parallel no es reflejada completamente como la componente \perp).

Rotar la dirección del eje de transmisión máxima del polarizador desde “arriba a la derecha” a “arriba a la izquierda”, invierte el sentido de la luz reflejada.

Esta es una explicación cualitativa del fenómeno. El metal es un medio reactivo. Ambas componentes de polarización de la luz incidente son casi totalmente reflejadas. Hay un desfase correspondiente al tiempo requerido para que los campos penetren en el medio reactivo aproximadamente una distancia de atenuación exponencial (en promedio) y luego vuelvan atrás y salgan. Las componentes de polarización \parallel y \perp no tienen el mismo desfase por lo siguiente. La componente \perp es paralela a la superficie; los electrones son libres de moverse paralelamente a la superficie y se mueven de manera de cancelar la radiación incidente. El retardo y el desfase son debidos a la inercia de los electrones. La componente \parallel tiene cierto desfase debido a este retardo. Consideremos la componente \parallel . Para incidencia casi normal, la componente \parallel es casi paralela a la superficie y se comporta como la componente \perp . El desfase es entonces el mismo que para la componente \perp . Ambas componentes reciben un signo menos en la reflexión, además del desfase por penetración. Entonces la polarización incidente “desde arriba a la derecha” (vista mirando desde el reflector metálico a la lámpara) se transforma en “hacia arriba a la izquierda”, luego de la reflexión. Supongamos ahora que no estamos en incidencia casi normal. Entonces la componente \parallel del campo eléctrico no es paralela a la superficie. Podemos descomponerla en una componente paralela y otra perpendicular a la superficie. La componente paralela a la superficie se comporta en la manera usual y sufre un retardo como antes. Pero la componente perpendicular a la superficie se comporta de manera totalmente distinta; las cargas no se pueden mover perpendicularmente a la superficie. La superficie adquiere carga superficial, y las cargas quedan rápidamente en reposo. El retardo debido a la inercia de los electrones que se mueven paralelamente a la superficie no está presente en el movimiento perpendicular a la superficie, porque el movimiento es muy pe-

queño. Entonces esta parte de la componente \parallel a la superficie se refleja con retardo despreciable.

Para completar esta explicación, debemos poder calcular la diferencia de fase de cada componente y ver cómo depende del ángulo de incidencia, lo cual es difícil.

8.29 Actividad óptica. Suponga que entra luz linealmente polarizada a través de una longitud L de jarabe de maíz Karo y encuentra que para $L = 5$ cm, la luz roja rota 45° . Ahora refleje la luz que atravesó el jarabe en un espejo y hágala atravesar nuevamente el jarabe, de forma que la longitud total es 10 cm. (Si hace el experimento, haga que el ángulo de reflexión no sea 180° ; mire a la "lámpara de imagen" a través del "jarabe real" y el "jarabe imagen". Como control, puede mirar a través del "jarabe imagen" moviendo la cabeza.) *Pregunta:* Luego de dos recorridos, ¿está la polarización lineal a 0 o a 90 grados de la dirección original?

8.30 Encontrar el eje rápido de su lámina de media onda. Dado que su polarizador circular hace luz levógira (con la convención óptica del destornillador —o luz dextrógira con la convención del momento angular). Encuentre el eje rápido de su lámina de cuarto de onda (Una vez que lo halle, ponga una cinta o algo sobre él.)

Experimento casero

8.31 Constantes elásticas efectivas para las moléculas del papel Saran. Estire un pedazo de papel Saran y póngalo detrás de un polaroide a 45° con el eje de transmisión máxima del polaroide. No lo estire demasiado —no queremos tener un desfase efectivo de más de $\pi/2$. Determine el sentido de la luz polarizada elípticamente. Puede hacerlo con su polarizador circular y su lámina de cuarto de onda. Una vez que conoce el sentido, sabe si el eje de estiramiento es el eje lento o rápido. Suponga que el estiramiento ha alineado las moléculas con su dimensión más larga según la dirección de estiramiento. Puede así figurarse si el índice de refracción es mayor o menor según esta dirección de la molécula. Mayor índice de refracción significa mayor constante dieléctrica, que implica mayor polarizabilidad molecular, lo que supone constante elástica efectiva más débil (siempre que la frecuencia de la luz sea menor que la frecuencia natural de vibración de los electrones en la molécula. Éste es el caso para luz visible en vidrio. Podemos suponer que también lo será en este caso). Entonces si (por ejemplo) el eje de estiramiento es el eje lento, significa que la constante efectiva de resorte para vibración a lo largo de la molécula es menor que para la vibración perpendicular a ella. ¿Cuál es el resultado experimental?

Experimento casero

8.32 Feldespato de Islandia (cristal de calcita). Consiga un cristal de feldespato de Islandia grande (de aproximadamente una pulgada de ancho). (En un comercio de minerales.) Haga un punto negro con un lápiz en un papel, ponga el cristal sobre el papel, y mire el punto a través del cristal; verá dos puntos. Ahora mire esos dos puntos con un polarizador lineal. ¿Están 100 % polarizados! Rote el cristal alrededor de un eje vertical mientras mira su vector \mathbf{E} a lo largo del eje óptico. Es el que se mueve. Ahora use sus dos ojos y su percepción de profundidad para decidir cuál de los dos puntos tiene más cerca. Convénzase con una placa de vidrio, o con un esquema (o con una "placa" de agua, tal como un acuario), que las cosas parecen más próximas cuando se las ve a través de un material con índice n mayor que 1. ¿Es el punto extraordinario o el ordinario el que está más próximo y que entonces tiene índice mayor? Su resultado experimental, ¿está de acuerdo con los índices en la Tabla 8.4? Usando un lápiz como marcador y mirando con incidencia normal, muestre que el punto ordinario no tiene desplazamiento lateral. Por esto el rayo que entra normal a la superficie, continúa normal a la superficie y sale

Experimento casero

normal a la superficie es el rayo ordinario. ¡El rayo extraordinario no viaja normalmente a la superficie! Muestre mediante un argumento de reversibilidad temporal que un rayo extraordinario que parte del punto real e incide normal a la superficie tiene que dejar la superficie de salida con incidencia normal, aunque se propague oblicuamente en el cristal. (Las superficies de arriba y de abajo son paralelas para cualquier orientación del cristal sobre el papel.) ¿Se tuerce el rayo extraordinario intentando ponerse más paralelo al eje óptico, o trata de ponerse más perpendicular? (Piense en los índices de refracción.) La explicación física de la deflexión del rayo extraordinario es la siguiente: Descomponga E del rayo incidente extraordinario en una componente según el eje óptico y otra perpendicular. Los índices para E son distintos según esas dos direcciones, por lo cual la polarizabilidad es distinta. Por consiguiente, la amplitud de oscilación de los electrones es distinta, y ellos no pueden irradiar en igual forma (o una componente del movimiento no irradia lo mismo que la otra). Cuando se superponen los campos de radiación debido a las dos componentes del movimiento de electrones, dan una onda que se propaga en una dirección “oblicua”. Todo lo que tiene que hacer ahora es encontrar cómo se inclina el rayo. ¿Está su resultado de acuerdo con lo observado?

8.33 Navegación por los vikingos. En latitudes altas (digamos encima del Círculo Ártico), la brújula no es de confiar. El sol es de uso difícil para la navegación; puede estar debajo del horizonte aun al mediodía. Los aviadores usan a veces un compás de crepúsculo que localiza la posición del sol por debajo del horizonte mediante la variación de la polarización del cielo con la dirección. Contiene una especie de polaroide. Algunos cristales naturales tienen propiedades similares al polaroide—una de estas sustancias es la turmalina; otra es la cordierita. Cuando se mira luz polarizada linealmente a través de un cristal de cordierita, el cristal es claro (con un tinte amarillento) si la polarización es según el eje de transmisión máxima, y el cristal es azul oscuro cuando la polarización es a 90° con el eje. Estas sustancias se llaman “dicroicas”.

Los navegantes vikingos del siglo noveno guiaban sus barcos sin usar brújula ni polaroide. Por la noche se guiaban por las estrellas. Por el día mediante el sol, cuando las nubes no lo tapaban. Según antiguas leyendas escandinavas, los navegantes vikingos siempre localizaban el sol, aun cuando estuviera detrás de las nubes, usando “piedras del sol” mágicas. Durante mucho tiempo fue un misterio qué eran esas “piedras del sol”. El misterio fue probablemente resuelto por un arqueólogo danés, que sabía mucho acerca de los vikingos, y un niño de diez años, que sabía lo referente al compás de crepúsculo (su padre era jefe de navegación de una línea aérea escandinava). El arqueólogo Theórkild Ramskou escribió en un periódico de arqueología, “...pero parece que existe una posibilidad de que fuese un instrumento que en tiempo nublado podía mostrar donde estaba el sol”. El chico leyó esto; a él le sonaba como un compás de crepúsculo. El padre del muchacho, Jorgen Jensen, comunicó esta observación a Ramskou, y éste y el joyero de la corte real de Dinamarca, recogieron y probaron varios cristales dicroicos encontrados en Escandinavia. La mejor “piedra del sol” resultó ser la cordierita. Ramskou encontró que podía localizar el sol con una precisión de $\pm 2\frac{1}{2}^\circ$ y seguirlo hasta que estuviese 7° debajo del horizonte.

Aquí está la pregunta: De acuerdo con el relato de la revista *Time* de 14 de julio 1967, pág. 48, las antiguas leyendas escandinavas decían que el sol podía ser siempre localizado por las “piedras del sol” mágicas, independientemente del tiempo. ¿Lo cree así? Explíquelo.

8.34 “Operador de proyección” de polarización. Si pone un polaroide lineal con eje de transmisión máxima según \hat{x} en un haz de luz que tiene una mezcla de todas clases de polarización, el polaroide absorbe toda la luz que no tiene polarización lineal según \hat{x} . Tiene una “salida” en la parte posterior del polarizador que consiste en luz linealmente polarizada según \hat{x} . Llamaremos a este

polaroide un “operador de proyección”. “Proyecta” la Polarización según \hat{x} sin pérdida (despreciando pequeñas reflexiones) y la entrega en el extremo de salida. Observe que este “operador de proyección” \hat{x} puede usarse en ambos sentidos, o sea, cualquier cara del polaroide se puede poner como entrada. Considere un polarizador circular que consiste en un polarizador lineal (extremo de entrada) adherido a una lámina de cuarto de onda con su eje óptico a 45° con el eje de transmisión máxima del polaroide. Este polarizador obtiene (por ejemplo) luz dextrógira. Pero absorbe la mitad de cualquier luz incidente dextrógira. Si se usa en el otro sentido, deja pasar luz incidente dextrógira y absorbe la luz levógira. Pero cuando pasa luz dextrógira que incide sobre la lámina de cuarto de onda, ésta sale al polarizador como luz polarizada linealmente. Esto no es lo que estamos llamando un operador de proyección de polarización. Este es el problema: Inventar operadores de proyección de polarización circulares, uno para luz dextrógira y otro para luz levógira. El operador de proyección dextrógiro debe transmitir luz incidente dextrógira sin pérdidas (despreciando pequeñas reflexiones) y debe entregarla como luz dextrógira. Debe absorber la luz levógira. *Pregunta:* ¿Es reversible su operador de proyección de polarización circular? ¿Puede usar cualquier cara como extremo de entrada?

8.35 Eliminación de reflejos. Suponga que quiere hacer atravesar un vidrio de ventana con el haz de su linterna, para iluminar algo del lado de fuera de la ventana. ¿Cómo puede librarse de la molesta luz reflejada especularmente en la ventana? Suponga ahora que está tratando de mirar algo a través de la lluvia, de noche, usando un haz de linterna. ¿Servirá la triquiñuela anterior para librarlo de la luz reflejada en las gotas de lluvia? Suponga que en lugar de luz visible usa microondas de 10 cm emitidas y recibidas por el mismo sistema de antenas, o sea, radar. ¿Cómo podrá ajustar las relaciones de fase en las dos antenas orientadas según x e y para eliminar el reflejo en las gotas de lluvia?

8.36 Colores en plásticos claros. Busque un pedazo de plástico claro con un acabado brillante en ambos lados —por ejemplo, una cubeta de plástico u otro recipiente. Mire la reflexión especular del cielo a un ángulo de 45° de incidencia. ¿Ve los colores? (Ponga un trapo negro o papel debajo, para reducir el fondo.) Para aumentar el efecto, coloque un polaroide frente a su ojo. Explique el origen de los colores.

Experimento casero

Experimento casero

Capítulo 9

Interferencia y difracción

9.1. Introducción 481

9.2 Interferencia entre dos fuentes puntuales coherentes 482

Fuentes coherentes	482	Onda progresiva « promedio »	490
Interferencia constructiva y destructiva	483	Flujo de fotones	491
Diagrama de interferencia	484	Diagrama de interferencia de dos ranuras	491
Campo cercano y campo lejano	484	Fuentes que oscilan en fase	492
« Frontera » entre lo cercano y lo lejano	485	Fuentes que oscilan fuera de fase	492
Uso de una lente convergente para obtener el diagrama de interferencia de campo lejano	486	Diagrama de interferencia alrededor de $\theta = 0^\circ$	493
Diagrama de interferencia de campo lejano	487	Conservación de la energía	494
Máximo principal	488	Uno más uno igual a cuatro	495
Fase relativa debida a diferencia de camino	490	Uno más uno igual a cero	495

9.3 Interferencia entre dos fuentes independientes 496

Fuentes independientes y tiempo de coherencia	496
« Incoherencia » e interferencia	496
Experiencia de Brown y Twiss	497

9.4 ¿Cuán extensa puede ser una fuente «puntual»? 500

Fuente puntual clásica	500
Fuente extensa sencilla	500
Condición de coherencia	502

9.5 Ancho angular de un «haz» de ondas progresivas 503

Ancho angular de un haz limitado por la difracción	503
Un haz es un máximo de interferencia	505

Ancho angular de un haz	506
-------------------------	-----

Aplicación: Haz laser en función de haz de linterna 507

9.6 La difracción y el principio de Huygens 508

Diferencia entre interferencia y difracción	508
Cómo trabaja una pantalla opaca	509
Pantallas opacas brillantes y negras	510
Efecto de un agujero en una pantalla opaca	510
Principio de Huygens	512
Cálculo de la difracción del tipo ranura simple, utilizando la construcción de Huygens	513
Configuración de difracción para ranura simple	516
Anchura angular de un haz de difracción limitada	518
Resolución angular del ojo humano	518
Criterio de Rayleigh	519
Nomenclatura: Difracción de Fraunhofer y de Fresnel	519

Análisis de Fourier del espacio transversal dependiente de una fuente coherente	520
Resultados importantes del análisis de Fourier	522
Configuración de difracción por dos ranuras anchas	522
Configuración de difracción para varias ranuras paralelas e idénticamente anchas	524
Configuración de interferencia de ranuras múltiples	525
Máximo principal, máximo central, fuente de luz blanca	525
Anchura angular de un máximo principal	527
Red de difracción de transmisión	528
Difracción por un obstáculo opaco	529
¿Cuánto se esparce una sombra?	530

9.7 Óptica geométrica 531

Reflexión especular 531
Reflexión no especular 532
Imagen de una fuente puntual en un espejo — fuente virtual y real 533
Refracción — ley de Snell-Principio de Fermat 534
Espejo elipsoidal 536
Espejo cóncavo parabólico 537
Espejo esférico cóncavo 538
Aberración esférica 539
Desviación de un rayo de luz a incidencia casi normal sobre un prisma delgado de vidrio 539
Dispersión de color por un prisma 540
Enfoque de rayos de luz paraxiales por una lente delgada 540
Condiciones necesarias para enfoque 541
Fórmula del constructor de lentes 542
Plano focal 542
Imagen puntual real de un objeto puntual 542

Problemas y experimentos caseros 552

Fórmula para lentes delgadas 543
Aumento lateral 543
Lente convergente 543
Imagen virtual 544
Lente divergente 544
Poder de una lente en dioptrías 545
Lente de aumento simple 546
Aumento producido por un pequeño orificio 547
¿Se ven realmente invertidos los objetos? 547
Ejercitando las pupilas 547
Telescopio 548
Microscopio 548
Lente cilíndrica o esférica gruesa 549
Desviación por una superficie esférica 549
Microscopio de Leeuwenhoek 551
Reflector inversor Scotchlite 551

Capítulo 9 Interferencia y difracción

9.1 Introducción

Hasta aquí, la mayoría de nuestros estudios fueron esencialmente unidimensionales, en el sentido que había un solo camino por el cual una onda emitida en un lugar podía ir a otro lugar. Ahora consideremos casos donde hay diferentes caminos posibles desde un emisor a un detector. Esto nos lleva a los llamados *fenómenos de interferencia o difracción*, que resultan de la superposición constructiva y destructiva de ondas que tienen distintas fases dependiendo del camino que han tomado.

En la Sección 9.2 consideramos la superposición en un detector, de las ondas emitidas por dos fuentes puntuales que tienen igual frecuencia, y una relación constante entre sus fases. Por ejemplo, ondas de agua emitidas por dos tornillos que mueven la superficie de un recipiente con agua, o la luz emitida a través de dos rendijas que están iluminadas por una fuente puntual o lineal. (Exp. cas. 9.18) u ondas de sonido emitidas por dos altoparlantes conectados al mismo audio-oscilador.

En la Sección 9.3, consideramos la interferencia entre dos fuentes “independientes”, o sea, fuentes cuyas fases no están obligadas a mantener una relación definida. Encontramos que la imagen de interferencia permanece constante sólo durante intervalos de tiempo del orden de $(\Delta\nu)^{-1}$, donde $\Delta\nu$ es el ancho de banda de frecuencia de las fuentes. De cualquier modo, mediante una medición suficientemente rápida, uno puede determinar la imagen de interferencia.

En la Sec. 9.4 encontramos qué tamaño máximo puede tener una fuente para comportarse como si fuese puntual cuando la fuente consiste de partes que irradian independientemente y cuando el detector hace un promedio sobre tiempos suficientemente largos [es decir, largos comparados con $(\Delta\nu)^{-1}$]. El resultado puede verificarse mediante un experimento casero (Exp. cas. 9.20). Otro experimento casero (el 9.21) demuestra la coherencia de un espejo de Lloyd.

En la Sección 9.5 damos una deducción no rigurosa del resultado que un haz de ancho espacial D tiene una divergencia angular (“apertura”) del orden de $\Delta\theta \approx \lambda/D$ alrededor de la dirección principal de propagación. Este hecho está matemáticamente relacionado (por la teoría del análisis de Fourier) al hecho de que una pulsación de duración Δt tiene un ancho de banda de frecuencia del orden $(\Delta t)^{-1}$.

En la Sec. 9.6 usamos la construcción de Huygens para encontrar la imagen de difracción correspondiente a ranuras simples y múltiples. Insistimos especialmente en los fenómenos ópticos y electromagnéticos.

Hay varios experimentos caseros con redes de difracción y varias imágenes de difracción. Para estos experimentos aconsejamos al estudiante conseguir una “lámpara de proyector” —una bombilla luminosa, con cubierta de vidrio no opaco y filamento único, recto, de 3 pulgadas de largo. En la mayoría de estos experimentos usan una de éstas como fuente lineal.

En la Sección 9.7 estudiamos la óptica llamada “geométrica”. Primero deducimos la ley de reflexión especular y la ley de refracción de Snell a partir de las propiedades ondulatorias de la luz. Después consideremos varios espejos, prismas y lentes delgadas.

9.2 *Interferencia entre dos fuentes puntuales coherentes*

Fuentes coherentes. La situación más simple de interferencia es la de dos fuentes puntuales idénticas situadas en distintos lugares y cada una de ellas emitiendo ondas armónicas progresivas de la misma frecuencia en un medio homogéneo. Si cada fuente tiene una frecuencia perfectamente definida (en lugar de una frecuencia dominante y un ancho de banda de frecuencia finito), entonces la fase relativa de las dos fuentes (la diferencia entre sus constantes de fase) no cambia con el tiempo y se dice que las dos fuentes son relativamente coherentes o, simplemente, coherentes. (Aun si tienen frecuencias distintas, son “coherentes” si cada una de ellas es monocromática, ya que su relación de fases está siempre bien definida.) Si cada fuente tiene la misma frecuencia dominante y ancho de banda finito $\Delta\nu$, si las fuentes son “independientes”, entonces la fase relativa de las dos fuentes sólo permanece constante durante lapsos del orden de $(\Delta\nu)^{-1}$. Por otro lado, dos fuentes pueden ser “forzadas” a estar en fase entre sí si son alimentadas por una fuente común. En este caso, aunque la constante de fase de cada fuente varíe de manera no controlada a través de un intervalo 2π en el tiempo $(\Delta\nu)^{-1}$, donde $\Delta\nu$ es el ancho de banda de la fuente común que los alimenta, la fase relativa permanece constante. Entonces se dice que las fuentes son coherentes aunque no sean monocromáticas.

Como ejemplo de dos fuentes coherentes de ondas, vamos a considerar dos barras que tocan la superficie de una masa de agua. Si a las barras se las alimenta con oscilaciones verticales idénticas, producen ondas de tensión superficial en el agua. La fase relativa de las barras es constante porque ellas son alimentadas mediante una fuente común. Como otro ejemplo de dos fuentes coherentes, consideremos dos antenas de radio alimentadas a diferencia de fase constante, por el mismo oscilador. Aunque el oscilador no sea perfectamente monocromático, la fase relativa de la corriente de las dos antenas permanece constante. Como ejemplo de dos fuentes coherentes de luz visible, consideremos dos pequeños agujeros o rendijas paralelas en una pantalla opaca que es iluminada de un lado por una fuente “puntual” de luz. En los bordes de las rendijas se inducen corrientes por el campo eléctrico de

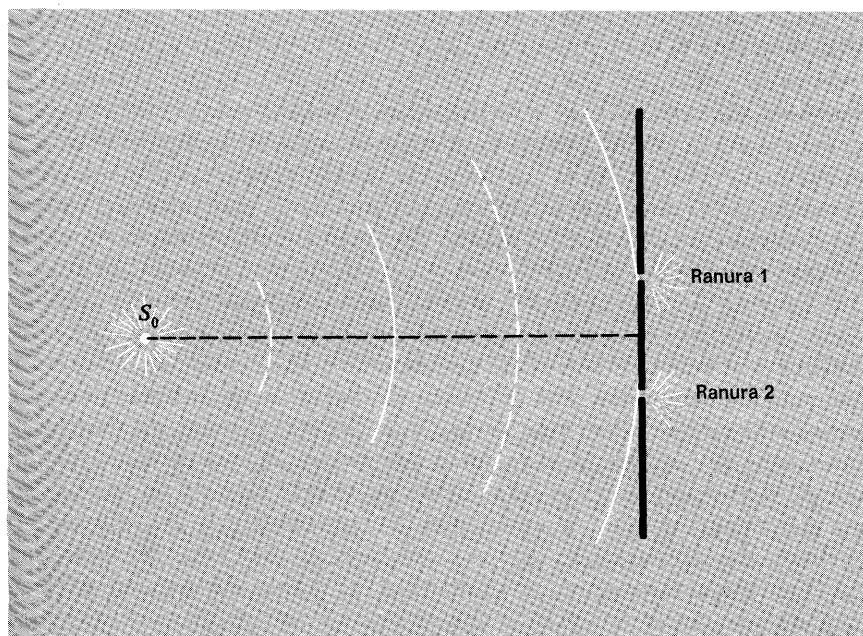


Fig. 9.1 Dos fuentes luminosas coherente. Las ondas incidentes emitidas por la fuente puntual S_0 excitan corrientes en los bordes de las ranuras 1 y 2. La constante de fase de S_0 puede desplazarse o variar repentinamente, pero la fase relativa de las corrientes en las ranuras permanece constante.

la radiación electromagnética (luz) emitida por la fuente puntual. Se dice que las dos rendijas son fuentes de luz coherentes. Véase Fig. 9.1.

En todos estos ejemplos necesitamos un “detector” que responda a las ondas. En el caso de ondas de tensión superficial en el agua, podemos usar un pedazo de corcho que flota en la superficie y cuyo desplazamiento vertical se puede medir. En el caso de ondas de audio, podemos usar un detector consistente en una antena receptora, un circuito resonante sintonizado y un osciloscopio. En el caso de la luz visible podemos usar nuestros ojos, o una emulsión fotográfica, o bien un fotomultiplicador cuya corriente de salida podamos medir. En cualquier caso el detector percibirá una onda total que es la superposición lineal de dos contribuciones, una proveniente de cada fuente.

Interferencia constructiva y destructiva. En algunas posiciones del detector la llegada de una cresta de onda (o un valle) proveniente de una fuente siempre está acompañada por la llegada simultánea de una cresta (o valle) proveniente de la otra fuente. Tal posición es denominada región de *interferencia constructiva* o *máximo de interferencia*. En otras posiciones, la llegada de una cresta proveniente de la otra, y si tenemos una región de *interferencia destructiva* o *un mínimo de interferencia*. Como, por hipótesis las dos fuentes mantienen una relación de fase constante, una región de interferencia constructiva a un tiempo dado será siempre una región de interferencia constructiva, y, de la misma

forma, una región de interferencia destructiva a un tiempo dado seguirá siéndolo durante todo el tiempo.

Diagrama de interferencia. El diagrama formado por las distintas regiones de máximos y mínimos de interferencia se denomina *diagrama de interferencia*. Aun cuando se trate de ondas progresivas, el diagrama de interferencia es estacionario en el sentido que acabamos de mencionar. Nótese que aun si el oscilador que excita ambas antenas es desconectado y luego vuelto a conectar con una nueva constante de fase, la fase relativa de las corrientes de la antena permanece invariable. En forma semejante, si la fuente puntual que excita ambas ranuras es desconectada y vuelta a conectar, las corrientes de ranura mantienen una fase relativa constante. Por lo tanto, el diagrama de interferencia permanece invariable. Por otra parte, si la fuente puntual es desplazada de manera que cambia la distancia a una ranura en una cantidad distinta que el cambio que sufre la otra distancia, la fase relativa de las corrientes inducidas cambiará y cambiarán las posiciones de los máximos y mínimos de interferencia, esto es, cambiará el diagrama de interferencia. En forma semejante, si insertamos un cable de retardo entre el oscilador de radiofrecuencia y una de las antenas de manera que varíe la fase relativa de las corrientes de antena, también variará el diagrama de interferencia correspondiente.

Campo cercano y campo lejano. En la mayor parte de los casos que consideremos, el detector estará a una distancia grande de las fuentes en comparación con la distancia que separa a éstas. Se dice en este caso que el detector está en el campo lejano de las fuentes. Usualmente consideramos el campo lejano porque nos permite hacer aproximaciones geométricas simplificadoras. En lo que concierne al efecto de la distancia sobre la amplitud de onda, podemos decir en este caso que las dos fuentes idénticas están esencialmente a la misma distancia del detector. Cada fuente contribuirá con una onda progresiva que tiene prácticamente la misma amplitud que la aportada por la otra fuente. (Siempre que las fuentes sean idénticas.)

Para una posición dada del detector (a menudo llamada punto campo P), la dependencia temporal de la función de ondas total está por lo tanto dada por la superposición de dos oscilaciones armónicas que tienen la misma frecuencia y amplitud pero que tienen (generalmente) constantes de fase distintas. Las dos constantes de fase (en un punto campo dado) dependen de las constantes de onda entre cada fuente y el punto. Si la distancia del punto campo P a una fuente es igual a la distancia a la otra fuente, o si estas distancias difieren en un número entero de longitudes de onda, y si las fuentes oscilan en fase, entonces P está en un máximo de interferencia y la amplitud de su oscilación armónica es el doble de la amplitud que tendría si cualquiera de las fuentes

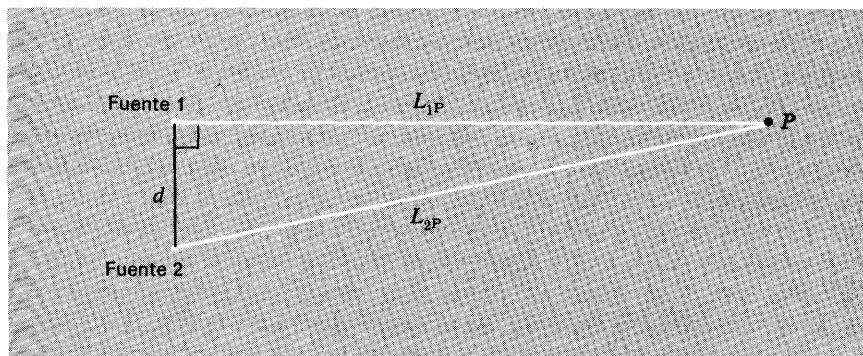


Fig. 9.2 Campo lejano. El detector ubicado en P está en el campo lejano de las dos fuentes siempre que L_{2P} exceda a L_{1P} en menos de una longitud de onda para la configuración mostrada.

estuviera actuando sola. (Si las fuentes oscilan en un desfase de 180° , P está en un nodo de interferencia y la amplitud de P es nula.) Si la distancia desde el punto P a una fuente excede a la otra distancia en medio λ (más cualquier número entero de longitudes de onda) y si las fuentes oscilan en fase, entonces P está en un nodo de interferencia y la amplitud es nula. La aproximación consiste en considerar iguales las amplitudes de las contribuciones individuales provenientes de ambas fuentes a pesar de que están en general a distancias levemente diferentes del punto campo y que las amplitudes disminuyen con la distancia. Así la amplitud en un mínimo de interferencia no es por lo común *exactamente* nula.

Una segunda simplificación importante que puede ser usada en la región de campo lejano es la aproximación de que la dirección desde la fuente 1 al punto campo P es paralela a la dirección desde la fuente 2 hasta P . Utilizaremos esta aproximación cuando calculemos más adelante el diagrama de interferencia de dos fuentes puntuales. Damos ahora un criterio aproximado que ayuda a decidir en un caso dado si está justificado usar la aproximación de campo lejano. Consideramos un punto P tal que la dirección P fuente 1, es perpendicular al segmento que une las fuentes (Fig. 9.2). La aproximación de campo lejano está justificada siempre que podamos considerar paralelas las direcciones P -fuente 2 y P -fuente 1. En este caso podemos suponer que la fase relativa de las dos contribuciones ondulatorias en P es esencialmente igual a la fase relativa existente entre las dos fuentes. Esta aproximación deja de valer por completo si la distancia L_{2P} desde la fuente 2 a P excede a la distancia L_{1P} en una semilongitud de onda (o más), ya que entonces ambas contribuciones ondulatorias en P difieren en fase en 180° (o más) cuando ambas fuentes están en fase.

“Frontera” entre lo cercano y lo lejano. Permítasenos definir crudamente una “distancia frontera” L_0 entre fuentes y punto campo, de forma que cuando L_{1P} y L_{2P} son muy grandes comparadas con L_0 , la

aproximación de campo lejano es una buena aproximación. Así L_0 es una frontera aproximada entre las regiones de campo lejano y de campo cercano. La elección natural para la distancia frontera L_0 es una distancia L_{1P} para la cual L_{2P} excede L_{1P} exactamente en una semilongitud de onda. Obtenemos una expresión aproximada para esta frontera aproximada de la siguiente forma: De acuerdo con la figura 9.2 tenemos (exactamente)

$$L_{2P}^2 = L_{1P}^2 + d^2,$$

esto es,

$$L_{2P}^2 - L_{1P}^2 = (L_{2P} - L_{1P})(L_{2P} + L_{1P}) = d^2.$$

Pero, para el caso que nos interesa, L_{2P} y L_{1P} son casi iguales y ambas prácticamente iguales a L_0 , ya que L_{2P} excede a L_{1P} en $\lambda/2$:

$$d^2 = (L_{2P} - L_{1P})(L_{2P} + L_{1P}) \approx (\frac{1}{2}\lambda)(L_0 + L_0).$$

Así, como criterio general, podemos decir que las aproximaciones de campo lejano están justificadas para puntos campo P mucho más alejados de las fuentes que una distancia L_0 que satisface la relación

$$\boxed{L_0\lambda \approx d^2.} \quad (1)$$

Uso de una lente convergente para obtener el diagrama de interferencia de campo lejano. El lector estudiará en forma experimental el diagrama de interferencia de dos ranuras con luz visible. (Véase Exp. 9.18.) Ambas fuentes coherentes son producidas como en la Fig. 9.1. Medio mm es una separación típica entre ranuras para que pueda considerársele en el campo lejano de la ranura. Usando la ecuación (1) con $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ y $d = \frac{1}{2} \text{ mm}$, obtenemos

$$L_0 \approx \frac{d^2}{\lambda} = \frac{(0,5 \times 10^{-1} \text{ cm})^2}{5,0 \times 10^{-5} \text{ cm}} = 50 \text{ cm}.$$

Vemos que deberíamos alejarnos unos $10 L_0 \approx 5 \text{ m}$ de la ranura para estar en el campo lejano con la doble ranura frente a nuestro detector de la siguiente forma: el detector es nuestro ojo, que consiste esencialmente de una superficie fotosensitiva (la retina) y de una lente. (Estudiaremos las lentes en la Sec. 9.7.) La lente tiene una distancia focal variable al variar la tensión en los músculos de acomodación del ojo. Cuando miramos un objeto distante estos músculos están relajados (en ojo normal); la lente tiene entonces una forma tal que los rayos de una fuente puntual distante que inciden sobre distintas partes de la superficie de la lente son enfocados en la retina. (Si la potencia refractiva de la lente es demasiado fuerte o demasiado débil, los rayos

no se enfocarán sobre la retina y el objeto distante aparecerá confuso.) Como la fuente es distante estos rayos son casi paralelos. Pero esta misma (con los músculos de acomodación relajados) enfocará *cualquiera* rayos paralelos sobre la retina, provengan éstos o no de una “fuente puntual distante”. En la Fig. 9.3 se muestra la acción de enfoque de la lente. Aunque la distancia real de la fuente 1 a P (Fig. 9.3) es menor que la distancia entre la fuente 2 y P , resulta (como mostraremos en la Sec. 9.7) que *el número de longitudes de onda es el mismo*. Esto es posible debido a la que la trayectoria S_1 a P tiene mayor camino a través de la lente, donde la longitud de onda es menor que en el aire. El punto P está “efectivamente” infinitamente alejado en el sentido de que los rayos paralelos mostrados abandonando las fuentes 1 y 2 alcanzan el punto de detección P luego de atravesar el mismo número de longitudes de onda. Así, el punto P está en un máximo de interferencia (suponiendo que las fuentes 1 y 2 oscilan en fase), de la misma forma que lo estaría si toda la región tuviera índice de refracción constante y P estuviera infinitamente alejado hacia la derecha.

Supondremos desde ahora en adelante que P está en el campo lejano de las fuentes 1 y 2, ya sea porque P esté muy alejado de las fuentes o porque estamos usando una lente y P está “efectivamente” muy alejado de las fuentes.

Diagrama de interferencia de campo lejano. En la Fig. 9.4 mostramos dos fuentes puntuales que emiten ondas electromagnéticas que son de-

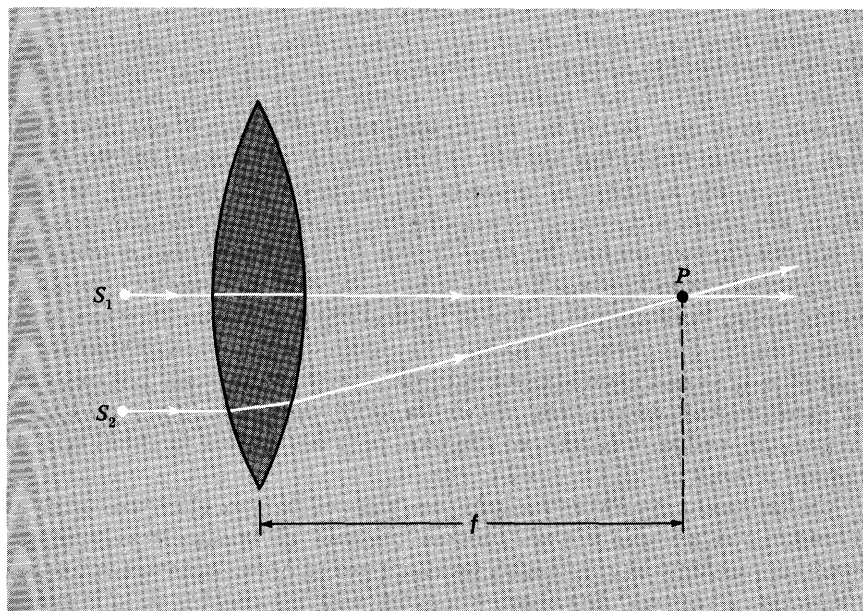


Fig. 9.3 Lente convergente. Los rayos paralelos provenientes de las fuentes 1 y 2 son enfocados en el punto P siempre que ambas fuentes oscilen con la misma constante de fase. Se denomina distancia focal f a la distancia desde el centro de la lente hasta el punto focal P (para una lente cuyo espesor sea pequeño en comparación con f).

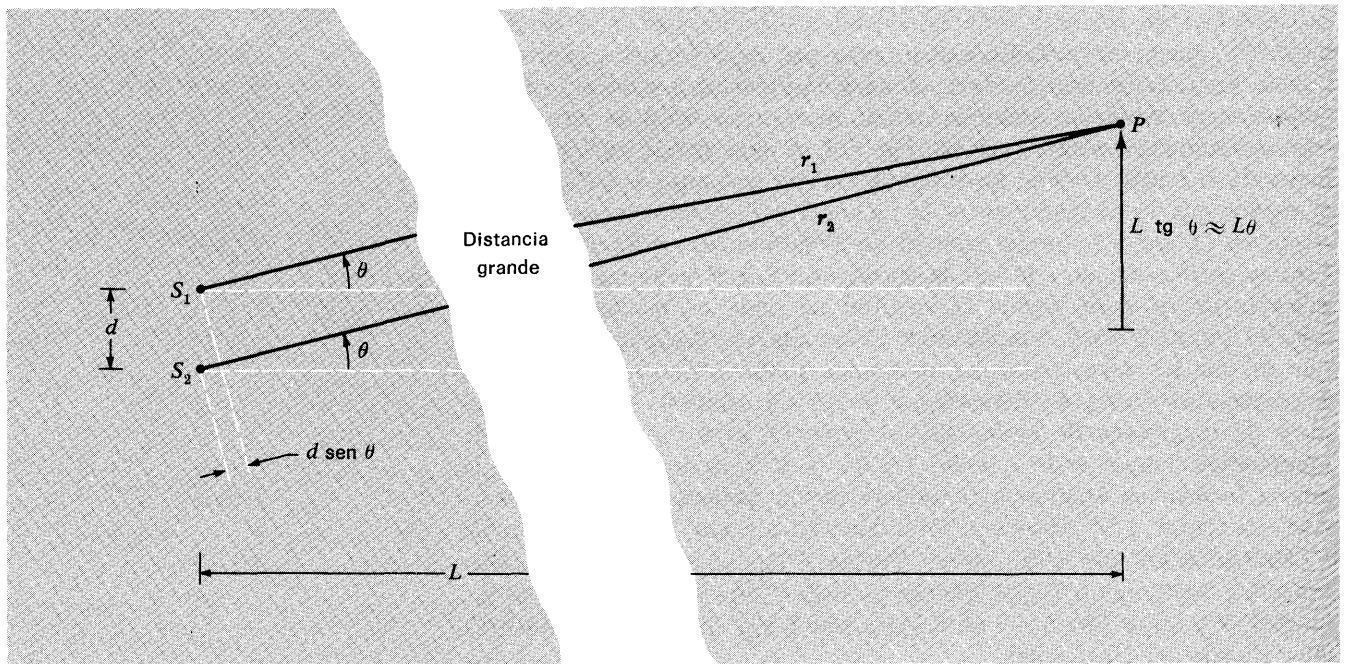


Fig. 9.4 Dos fuentes puntuales emitiendo ondas que son detectadas en un punto campo distante P .

tectadas en un punto campo P distante. Examinaremos solamente el diagrama de interferencia en el plano que contiene a las dos fuentes y al punto campo P , nuestros resultados también se aplicarán al caso de dos fuentes “lineales” (ranuras en el caso de la luz) o a dos antenas de radio, o a ondas de superficie en el agua.

Máximo principal. Cuando las distancias r_1 y r_2 de las fuentes 1 y 2 al punto campo P son grandes en comparación con la separación d , los dos rayos que parten de las fuentes hacia el punto P son casi paralelos, estando inclinados ambos prácticamente al mismo ángulo θ con respecto al eje z , como se muestra en la figura. En este caso, la diferencia de caminos $r_2 - r_1$ es esencialmente igual a $d \sin \theta$. Por lo tanto, si las dos fuentes oscilan en fase, P está en una región de interferencia constructiva cuando $d \sin \theta = 0, \pm \lambda, \pm 2\lambda$, etc. El máximo de interferencia que corresponde a $\theta = 0$ se denomina *máximo principal* o *de orden cero*. El primer máximo de cada lado, correspondiente a $d \sin \theta = \pm \lambda$, se denomina *máximo de primer orden*, etc. Las regiones de interferencia destructiva, donde la onda total es siempre nula, se denominan nodos. Ocurren en ángulos para los cuales la diferencia de camino $d \sin \theta$ es $1/2\lambda, \pm 3/2\lambda$, etc.

Deduciremos ahora una expresión para el campo eléctrico total en la suposición de que ambas fuentes realizan el mismo “movimiento” armónico, excepto por el hecho de que pueden tener constantes de fase diferentes. Usaremos una imagen mental para las fuentes de dos cargas

puntuales oscilantes. Consideramos una única componente de polarización que podrá ser una u otra de las dos direcciones independientes transversales a la línea que une las fuentes con P . No necesitamos especificar la dirección, ya que los resultados obtenidos valen independientemente para cualquiera de ellas (o cualquier otra polarización); por ejemplo, polarización circular dextrógira o levógira. Sin embargo, y para concretar, consideramos la componente polarizada linealmente paralela a \hat{y} , siendo \hat{y} perpendicular al plano de la Fig. 9.4. Convenido esto, los movimientos de las cargas puntuales 1 y 2 tienen componentes y

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ y_2(t) &= y_0 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (2)$$

El punto campo P está ubicado por el ángulo θ dado por la Fig. 9.4 y a una distancia r , que tomamos como el promedio de r_1 y r_2 (es decir, colocamos el origen de coordenadas a mitad de camino entre las dos fuentes). El campo de radiación $E_1(t)$ en el punto campo P debido al primer movimiento retardado $y_1(t'_1)$ está dado por

$$\begin{aligned} E_1(t) &= -\frac{q\ddot{y}_1(t'_1)}{r_1 c^2} \\ &= \frac{\omega^2 q y_0 \cos(\omega t'_1 + \varphi_1)}{r_1 c^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

El campo de radiación $E_2(t)$ debido a $y_2(t'_2)$ está dado por una expresión análoga. En la aproximación de campo lejano consideramos que r_1 y r_2 son prácticamente iguales a la distancia promedio r :

$$r \equiv \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} E_1(t) &= A(r) \cos(\omega t'_1 + \varphi_1), \\ E_2(t) &= A(r) \cos(\omega t'_2 + \varphi_2), \end{aligned} \quad (5)$$

$$A(r) \equiv \frac{\omega^2 q y_0}{r c^2}. \quad (6)$$

Los tiempos de emisión t'_1 y t'_2 de la radiación detectada a un tiempo posterior t están dados por

$$\begin{aligned} \omega t'_1 &= \omega \left(t - \frac{r_1}{c} \right) = \omega t - k r_1 \\ \omega t'_2 &= \omega \left(t - \frac{r_2}{c} \right) = \omega t - k r_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Fase relativa debida a diferencia de camino. Debido al hecho de que la diferencia de caminos $r_2 - r_1$ depende del ángulo θ , la fase relativa de las dos ondas en P depende de θ . Es justamente esta variación de fase relativa con el ángulo la que da lugar al diagrama de interferencia. Esta *fase relativa debida a diferencia de camino* es importante, razón por que le daremos un nombre, $\Delta\varphi$:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \omega t'_1 - \omega t'_2 \\ &= k(r_2 - r_1) \\ &= k(d \sin \theta) \\ &= 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda},\end{aligned}\tag{8}$$

donde $d \sin \theta$ es la diferencia de caminos, tal como se indica en la Fig. 9.4. Las distintas expresiones en la ecuación (8) son matemáticamente equivalentes, pero corresponden a distintas imágenes mentales que deberían ser aprendidas independientemente. En la primera línea pensamos en distintos tiempos de emisión; en la última pensamos basándonos en que la diferencia de fase es 2π veces el número de longitudes de onda de diferencia de camino; en la segunda y en la tercera línea nos concentramos en el número de radianes de fase por unidad de distancia (el número de ondas k) por la diferencia de camino. Además de $\Delta\varphi$, tal como está dado por la ecuación (8), debemos tener presente la diferencia de fase $\varphi_1 - \varphi_2$ de las oscilaciones de ambas fuentes.

El campo total E en el punto P es la superposición de E_1 y E_2 :

$$\begin{aligned}E(r, \theta, t) &= E_1 + E_2 \\ &= A(r) \cos(\omega t'_1 + \varphi_1) + A(r) \cos(\omega t'_2 + \varphi_2) \\ &= A(r) \cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1) + A(r) \cos(\omega t + \varphi_2 - kr_2).\end{aligned}\tag{9}$$

Onda progresiva “promedio”. En vez de expresar E como superposición de dos ondas esféricas progresivas provenientes de las fuentes 1 y 2, podemos expresarlo como una única onda esférica progresiva “promedio” con una amplitud que está modulada como una función de la dirección de propagación θ y con una constante de fase que es el promedio de las constantes de fase φ_1 y φ_2 de las dos fuentes. Para mostrar esto usamos las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}\cos a + \cos b &= \cos \left[\frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b) \right] + \cos \left[\frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b) \right] \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b),\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}a &= \omega t + \varphi_1 - kr_1, \\ b &= \omega t + \varphi_2 - kr_2.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a + b) &= \omega t + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - k \cdot \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \\ &= \omega t + \varphi_{av} - kr,\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a - b) &= \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{2}k(r_1 - r_2) \\ &= \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi.\end{aligned}\quad (11)$$

Entonces, la ecuación (9) se transforma en

$$\begin{aligned}E(r, \theta, t) &= \{2A(r) \cos [\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi]\} \cos (\omega t + \varphi_{pro} - kr) \\ &= A(r, \theta) \cos (\omega t + \varphi_{pro} - kr),\end{aligned}\quad (12)$$

con la amplitud $A(r, \theta)$ dado por

$$\begin{aligned}A(r, \theta) &= 2A(r) \cos [\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi], \\ \Delta\varphi &= k(r_2 - r_1) = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}\end{aligned}\quad (13)$$

Flujo de fotones. El flujo de fotones en el punto campo P es proporcional al flujo de energía promediado temporalmente $\langle S \rangle$. Si sólo tenemos la componente polarizada según \hat{y} que hemos estado considerando, el flujo de energía está dado por

$$\langle S \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2 \rangle, \quad (14)$$

con

$$\mathbf{E} = \hat{y}E(r, \theta, t). \quad (15)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{E}^2 \rangle &= \langle [A(r, \theta) \cos (\omega t + \varphi_{av} - kr)]^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2}A^2(r, \theta),\end{aligned}\quad (16)$$

con

$$A^2(r, \theta) = \{2A(r) \cos [\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi]\}^2. \quad (17)$$

Diagrama de interferencia de dos ranuras. Mantengamos ahora r fijo y consideremos la variación del flujo de fotones con el ángulo θ . De acuerdo con las ecuaciones (14) hasta (17), tenemos [llamando $I(\theta)$ al flujo de fotones]

$$I(\theta) = I_{\max} \cos^2 [\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi]. \quad (18)$$

De acuerdo con la ecuación (18), la intensidad varía como el coseno cuadrado de la mitad de la fase relativa, donde la fase relativa es, en

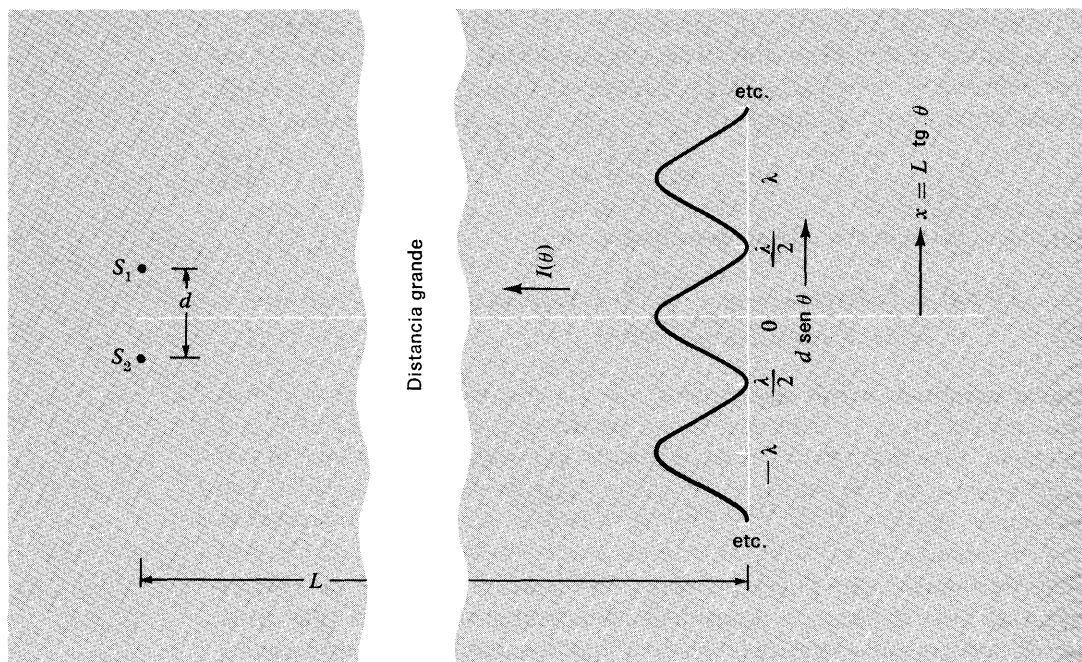


Fig. 9.5 Intensidad correspondiente al efecto de dos fuentes que oscilan en fase. La separación d es grande en comparación con λ .

parte, la correspondiente a las fuentes oscilantes y, en parte, la debida a la dependencia de la diferencia de caminos con respecto al ángulo

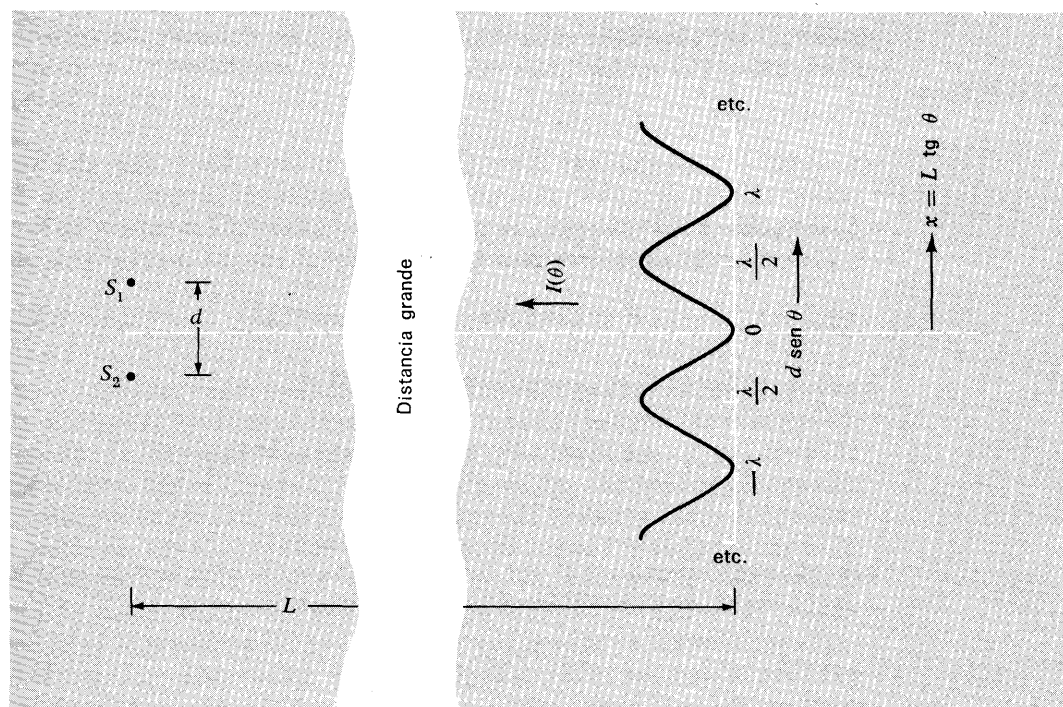
Fuentes que oscilan en fase. Si φ_1 y φ_2 son iguales, el diagrama de la dependencia angular de dos ranuras (o dos fuentes luminosas) es

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_{\text{máx}} \cos^2 \frac{1}{2} \Delta\varphi \\ &= I_{\text{máx}} \cos^2 \left[\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

En la figura 9.5 mostramos gráficamente esta distribución angular en la región alrededor de $\theta = 0$ en la hipótesis de que las fuentes están separadas por un número grande de longitud de ondas ($d \gg \lambda$), de manera que $I(\theta)$ varía en un gran número de máximos y mínimos mientras θ permanece aún muy pequeño. Esto permite hacer un diagrama en el cual aparecen varios máximos y mínimos en la misma región pequeña (alrededor de $\theta = 0$).

Fuentes que oscilan fuera de fase. Si φ_1 y φ_2 difieren en $\pm \pi$, entonces la mitad de la diferencia de fase es $\pm \frac{1}{2}\pi$, y la ecuación (18) da

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_{\text{máx}} \sin^2 \frac{1}{2} \Delta\varphi \\ &= I_{\text{máx}} \sin^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}. \end{aligned} \quad (20)$$



En la Fig. 9.6 se esquematiza la ecuación (20) alrededor de $\theta = 0$ para el caso en que d es igual a un número grande de longitudes de onda, de manera que aparecen varios máximos de $I(\theta)$ cerca de $\theta = 0$.

Fig. 9.6 Intensidad correspondiente a la superposición de los efectos debidos a dos fuentes que oscilan en un desfase de 180° .

Diagrama de interferencia alrededor de $\theta = 0^\circ$. Cuando se observa una fuente luminosa monocromática con una doble ranura, generalmente no se puede decir dónde aparece exactamente $\theta = 0$. Así las Figs. 9.5 y 9.6 contienen más información que la que puede ser obtenida corrientemente (por lo menos en las experiencias hogareñas). La información importante es el intervalo angular entre máximos sucesivos o el intervalo espacial correspondiente sobre una pantalla detectora (que puede ser, por ejemplo, nuestra retina). Los máximos sucesivos de las Figs. 9.5 y 9.6 corresponden a un aumento en la diferencia de camino óptico de una longitud de onda, esto es, a un aumento de $d \sin \theta$ en la cantidad λ . Para θ próximo a 0° , podemos usar la aproximación $\sin \theta \approx \theta$ válida para ángulos pequeños. Entonces, el *intervalo angular entre máximos sucesivos* es λ/d radianes. Llamemos a este intervalo angular θ_0 :

$$\theta_0 \approx \frac{\lambda}{d}. \quad (21)$$

y llamemos x_0 a la separación espacial correspondiente entre máximos sucesivos. De acuerdo con la Fig. 9.5 ó 9.6, para θ cercano a cero, x_0 es la distancia L multiplicada por θ_0 :

$$x_0 \approx L\theta_0 \approx \frac{L\lambda}{d}. \quad (22)$$

Conservación de la energía. Si se anula la fuente 2, el campo eléctrico en P está dado solamente por la fuente 1:

$$E = E_1 = A(r) \cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1). \quad (23)$$

El flujo de fotones es entonces proporcional a

$$\begin{aligned} \langle E_1^2 \rangle &= A^2(r) \langle \cos^2(\omega t + \varphi_1 - kr_1) \rangle \\ &= \frac{1}{2} A^2(r), \end{aligned} \quad (24)$$

que es independiente de θ . En forma semejante, si sólo se hace actuar a la fuente 2, el flujo fotónico es proporcional a

$$\langle E_2^2 \rangle = \frac{1}{2} A^2(r). \quad (25)$$

Cuando ambas fuentes emiten simultáneamente, el flujo, fotónico es proporcional (con la misma constante de proporcionalidad de arriba) a

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} A^2(r, \theta) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{ 2A(r) \cos[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi] \}^2 \\ &= A^2(r) \cdot 2 \cos^2[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi]. \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (24) y (25), escribimos esto en la forma

$$\langle E^2 \rangle = [\langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle] 2 \cos^2[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi], \quad (26)$$

con

$$\Delta\varphi = 2\pi d \sin\theta/\lambda. \quad (27)$$

Así, el flujo de energía que corresponde a ambas fuentes actuando simultáneamente es el producto del factor de la modulación angular $2 \cos^2[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi]$ por la suma de los flujos que serían producidos por cada fuente actuando sola. Si hay muchos máximos y mínimos entre $\theta = 0^\circ$ y 360° , el factor de modulación angular valdrá cero tan a menudo como vale 2,0 y tendrá un valor promedio unitario. Para producir muchos máximos y muchos mínimos ambas fuentes deben estar apartadas una distancia de muchas longitudes de onda. Vemos así que

la energía total emitida (en el plano de las figuras que hemos mostrado) es justamente la suma de las energías que las fuentes hubieran suministrado individualmente, siempre que las dos fuentes estén apartadas muchas longitudes de onda. Esto parece razonable.

Uno más uno igual a cuatro. Consideremos sin embargo el caso en que las dos fuentes están muy juntas. Sea d la distancia, mucho menor que una longitud de onda, que las separa. Las ecuaciones (26) y (27) dan para el caso en que las fuentes están en fase.

$$\langle E^2 \rangle \approx 2[\langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle]. \quad (28)$$

Así, en vez de tener una cantidad de energía que es la suma de las que suministra individualmente las dos fuentes, tenemos dos veces esa cantidad. Lo que puede parecer extraño. ¿No viola esto el principio de conservación de la energía? La respuesta es, no. La implicación es que cada fuente emite el doble de energía cuando ambas están superpuestas (y oscilando en fase). ¿Cómo puede suceder esto? Hemos prescrito el movimiento de cada fuente mediante las ecuaciones (2), independientemente de la separación d . ¡La energía emitida es doble, *no* porque cambie el movimiento de cada fuente, sino porque la *impedancia* experimentada por cada fuente se ha duplicado! ¿Por qué sucede así? Por ejemplo, si tomamos el caso de las dos antenas de radio, esto se debe a que la fuerza resistiva de arrastre ejercida sobre los electrones de una antena por el campo irradiado proviene no solamente del campo emitido por dicha antena, sino también del campo que emite la otra antena. Como por hipótesis las corrientes están en fase, y como las antenas están muy próximas, la fuerza neta de arrastre ejercida sobre los electrones de una antena es el doble de la correspondiente al caso en que no estuviera presente la otra antena. Por lo tanto, la fuente de poder debe trabajar el doble para mantener la velocidad prescrita, y así logramos el doble del trabajo realizado por la fuente de poder. Como esto vale para cada antena, hemos dado cuenta del factor dos en el aumento de emisión total de energía.

Uno más uno igual a cero. Si las fuentes oscilan 180° fuera de fase y si superponemos una antena casi sobre la otra, la amplitud de onda total es casi nula. En el límite de la superposición de las antenas, la salida es nula de acuerdo con la ecuación (20). La fuente de poder no trabaja y no se irradia energía. El campo de una antena mueve los electrones de la otra antena ayudando al oscilador. En el límite en que la separación de antenas es nula, los electrones de las dos antenas se excitan mutuamente sin ayuda del oscilador. Tenemos entonces un sistema “cerrado” con la energía viajando de una antena a la otra. Las antenas son entonces parte del circuito resonante del oscilador, y

la fuente de poder necesita solamente cubrir las pérdidas debidas a la resistencia de las antenas. La resistencia de radiación —la impedancia característica— se ha anulado.

9.3 *Interferencia entre dos fuentes independientes*

Fuentes independientes y tiempo de coherencia. Supongamos que cada una de las fuentes tiene una frecuencia angular dominante ω_0 y un ancho de banda $\Delta\omega$. Supongamos además que las fuentes son independientes. Esto significa que no están excitadas por una fuente excitatriz común a ambas. No existe entonces nada que las mantenga exactamente en fase. En el caso de las dos antenas de radio esto significaría que cada antena es excitada por una fuente de poder y oscilador separados. En el caso de fuentes de luz visible, significa que tenemos dos fuentes independientes con átomos distintos contribuyendo a cada una. Podemos tener, por ejemplo, una lámpara de vapor de mercurio consistente en una descarga gaseosa en un tubo de vidrio, rodeado por una camisa opaca atravesada por dos pequeños agujeros o ranuras. Cada orificio es iluminado por distintos átomos del gas. Alternativamente podemos tener dos orificios o ranuras en N en un trozo de material opaco situado frente a una bombilla luminosa común (para tener una banda de frecuencias razonablemente pequeña podemos incluir un filtro rojo de gelatina sobre las ranuras).

Supondremos que el ancho de banda en frecuencia $\Delta\nu$ es pequeño en comparación con la frecuencia dominante ν_0 . Hay entonces muchas oscilaciones de frecuencias ν_0 durante un intervalo de tiempo $(\Delta\nu)^{-1}$. El intervalo de tiempo $(\Delta\nu)^{-1}$ es el tiempo de coherencia t_{coh} : es el intervalo de tiempo necesario para que puedan desfazarse aproximadamente en 2π las componentes de frecuencia que están en los extremos de la banda de frecuencia. Así, si definimos t_{coh} por

$$\Delta\omega t_{\text{coh}} \approx 2\pi, \quad (29)$$

vemos que t_{coh} es $2\pi/\Delta\omega$, es decir, t_{coh} es $(\Delta\nu)^{-1}$. Para intervalos de tiempo menores que $(\Delta\nu)^{-1}$ podemos suponer que la fase relativa de las dos fuentes permanece esencialmente constante. (Puede haber muchas oscilaciones en tal intervalo de tiempo ya que suponemos que $\nu_0 (\Delta\nu)^{-1}$ es grande.)

“Incoherencia” e interferencia. Vamos a considerar solamente la situación en la que la separación d entre las dos fuentes es grande en comparación con la longitud de onda λ . El diagrama de interferencia será entonces parecido de la Fig. 9.5 en los momentos en los que la fase relativa sea cero. Y será semejante al de la Fig. 9.6 en aquellos momentos en que la fase relativa sea 180° . Para fases relativas entre 0 y 180° el diagrama de interferencia estará entre los mostrados en las Figs. 9.5 y 9.6.

Si el detector es del tipo de los que requieren un tiempo largo para detectar la intensidad en una posición dada, tal como el ojo (que tiene un tiempo de resolución de alrededor de $1/20$ seg), entonces el gráfico de la intensidad promediada temporalmente en función de θ no mostrará dependencia de θ , porque durante un tiempo grande en comparación con $(\Delta\nu)^{-1}$, el diagrama de interferencia habrá tomado todos los aspectos entre los extremos dados por las Figs. 9.5 y 9.6, y todo valor de $d \sin \theta$ habrá experimentado la misma intensidad promediada temporalmente. Decimos entonces que las dos fuentes puntuales son "incoherentes". El promedio temporal del flujo de energía (el flujo fotónico) es entonces justamente la suma de los flujos que obtendríamos de cualquiera de las fuentes por sí misma. El diagrama de interferencia ha resultado "lavado" debido a que durante el proceso de medición los promedios han sido tomados durante tiempos largos. Si se examina la ecuación (26), Sección 9.2, puede verse que este hecho se expresa algebraicamente a través de $\langle E^2 \rangle \approx \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle$, que no depende de θ , siempre que la fase relativa $\varphi_1 - \varphi_2$ tome todos los valores posibles con lapsos groseramente iguales gastados en cada pequeño intervalo de fase relativa entre 0 y 2π . Esto proviene de que para $\Delta\varphi$ fijo y para $\varphi_1 - \varphi_2$ distribuida uniformemente en otro y 2π .

$$\langle \cos^2 [\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \tfrac{1}{2} \Delta\varphi] \rangle = \tfrac{1}{2}. \quad (30)$$

Es claro que no existen fuentes "intrínsecamente" incoherentes. La "incoherencia" es meramente el resultado de un proceso de medición que arroja información y que es accesible en el diagrama de interferencia si se domina la técnica de poder observar durante tiempos comparables o menores que $(\Delta\nu)^{-1}$. Para la luz visible los tiempos de coherencia son del orden de 10^{-9} a 10^{-8} seg (para una fuente consistente de átomos irradiando en forma independiente en un tubo de descarga gaseosa), y vemos que se necesita algo de ingenio experimental para medir al diagrama de interferencia antes de que cambie. Sin embargo, esto ha sido logrado en una experiencia muy hermosa debida a R. Brown y a R. Twiss.*

Experiencia de Brown y Twiss. El método por el cual Brown y Twiss "leen" efectivamente el diagrama de interferencia en un tiempo menor que 10^{-8} seg es el siguiente: Se utilizan dos fotomultiplicadores colocados en distintos valores de x (definido como en las Figs. 9.5 y 9.6) y con una separación variable $x_1 - x_2$. La corriente de salida de uno de los dos fotomultiplicadores, I_1 , es multiplicada por la corriente de salida del otro, I_2 , en un circuito rápido que puede seguir las fluctua-

* R. Hanbury Brown y R. O. Twiss, "The Question of Correlation between Photons in Coherent Light Rays", *Nature* **178** 1447 (1956). Para un experimento más reciente empleando lasers, véase R. Pfleegar y L. Mandel, "Interference of Independent Photon Beams", *Phys. Rev.* **159**, 1084 (1967).

ciones de corriente que ocurren en tiempos del orden de 10^{-8} seg (en otras pabras, el ancho de banda del circuito rápido es del orden de 100 Mc/seg). El producto $I_1 I_2$ es determinado “instantáneamente”; esto es, en un intervalo de tiempo del orden de 10^{-8} seg, pero a continuación se toma el promedio de este producto, $\langle I_1 I_2 \rangle$, sobre un intervalo de tiempo largo (de muchos minutos). Se vería la separación $x_1 - x_2$ entre los dos fotomultiplicadores, y se toma el promedio temporal del producto de corriente para cada separación. Finalmente se traza el gráfico del producto de corrientes promediado temporalmente en función de $x_1 - x_2$. Ahora bien, la corriente instantánea en cada fotomultiplicador es proporcional al flujo de energía luminosa, es decir, a $I(\theta)$ en cada fotomultiplicador. Consideremos primero el caso de separación $x_1 - x_2$ nula, de manera que ambos fotomultiplicadores están sujetos al mismo flujo luminoso instantáneo. Realicemos un promedio muy aproximado del producto de las dos corrientes. Déjesenos suponer para esto que $I(\theta)$ sólo toma los cuatro valores indicados por a , b , c y d en la Fig. 9.7. Llamemos a las corrientes correspondientes con los nombres a , b , c , d y démosles unidades en las que tengamos $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$ y $d = \frac{1}{2}$. Para una cuarta parte de los “instantes” (de una duración alrededor de 10^{-8} seg), FM 1 (fotomultiplicador 1) tiene una corriente I_1 que corresponde aproximadamente a a , ya que FM 2 está en el mismo lugar que FM 1. Una cuarta parte del tiempo, cada fotomultiplicador tiene una corriente correspondiente a b , otra cuarta parte correspondiente a c , y otra cuarta parte una corriente que corresponde a d , a medida que el diagrama de la interferencia se desplaza. Así el promedio temporal del producto de las dos corrientes para $x_2 = x_1$ está dado (en nuestra aproximación) por

$$\begin{aligned} \langle I_1 I_2 \rangle_{\text{pr}} &= \frac{1}{4}(aa + bb + cc + dd) \\ &= \frac{1}{4}(0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}. \end{aligned} \quad (31)$$

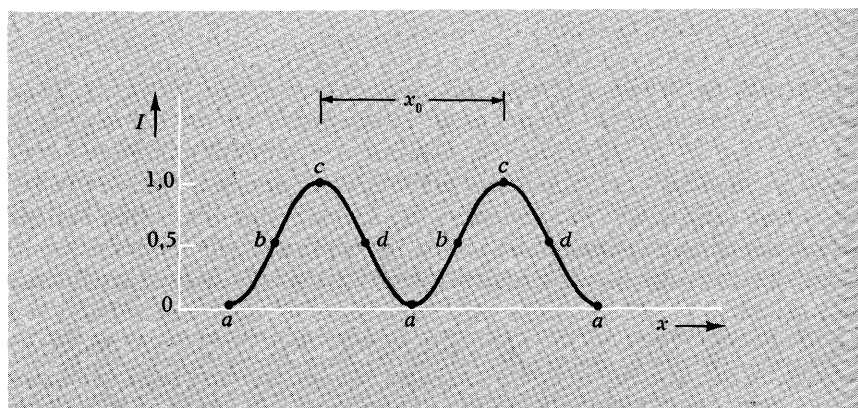


Fig. 9.7 Intensidad en función de x para un “instante” dado de duración menor que $(\Delta\nu)^{-1}$.

Encontramos ahora el promedio de $I_1 I_2$ cuando la separación $x_2 - x_1$ es la que hay entre un máximo de interferencia “instantáneo” y el próximo mínimo, esto es, cuando la separación es la mitad de x_0 donde x_0 (tal como se muestra en la Figura 9.7) es la separación entre máximos sucesivos del diagrama de interferencia instantáneo de dos rendijas [que está dado por la ec. (22) Sec. 9.2]. Si $x_2 - x_1 = \frac{1}{2} x_0$, entonces, en el instante en que FM 1 es recorrido por una corriente a , FM 2 tiene, de acuerdo a la Fig. 9.7, una corriente c . Cuando FM 1 tiene b , FM 2 tiene d , etc. De esta forma tenemos para el promedio temporal tomado sobre las cuatro corrientes representativas a, b, c, d para FM 1

$$\begin{aligned} \langle I_1 I_2 \rangle_{pr} &= \frac{1}{4}(ac + bd + ca + db) \\ &= \frac{1}{4}(0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned} \quad (32)$$

Vemos que $\langle I_1 I_2 \rangle_{pr}$ es tres veces mayor cuando $x_2 - x_1$ es cero, cuando es la mitad de la separación entre máximos sucesivos del diagrama instantáneo. Vemos así que un gráfico de $\langle I_1 I_2 \rangle_{pr}$ en función de $x_2 - x_1$ determinará la fase relativa $\Delta\phi = 2\pi d \sin \theta / \lambda$.

La clave de la técnica de Brown y Twiss es que el producto $I_1 I_2$ cada corriente es promediada sólo sobre tiempos del orden de 10^{-8} seg, y durante este tiempo las corrientes son esencialmente constantes. El promedio $\langle I_1 I_2 \rangle$ sobre un intervalo temporal de minutos es justamente lo que se conseguirá promediando sobre varias docenas de tiempos de coherencia, por ejemplo, sobre 10^{-6} seg. (Brown y Twiss trabajan con tiempos mucho mayores para promediar a cero el ruido de los fotomultiplicadores y por otras razones experimentales.) Por otra parte el producto $\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle$ es independiente de $x_1 - x_2$ porque cada fotomultiplicador ha mostrado todo el diagrama de interferencia durante el tiempo en que se promedia. Lo esencial es encontrar qué separaciones $x_1 - x_2$ corresponden a la situación en que I_1 es grande siendo grande I_2 , y la situación en que I_1 es pequeño cuando I_2 es pequeña (como cuando $x_1 - x_2$ es cero), y qué separaciones corresponden a I_1 pequeño cuando I_2 es grande y viceversa.

Hablando en lenguaje de fotones encontramos que la probabilidad de detectar un fotón en el fotomultiplicador 2 es mayor que el promedio cuando el fotomultiplicador 1 ha detectado “recientemente” (dentro de un intervalo de 10^{-8} seg) un fotón, siempre que $x_1 = x_2$; y es más pequeña que el promedio si se tiene $x_1 - x_2 = \frac{1}{2} x_0$. Expresándolo en forma muy cruda y “semiclásicamente” si tenemos (por ejemplo) una onda que corresponda en intensidad a alrededor de 100 fotones, que interfiera con otra onda a la que también corresponden alrededor de 100 fotones entonces si los trenes de ondas se sobreponen especialmente su superposición puede dar una intensidad total que corresponda a 400 fotones (interferencia completamente constructiva) o a intensidad

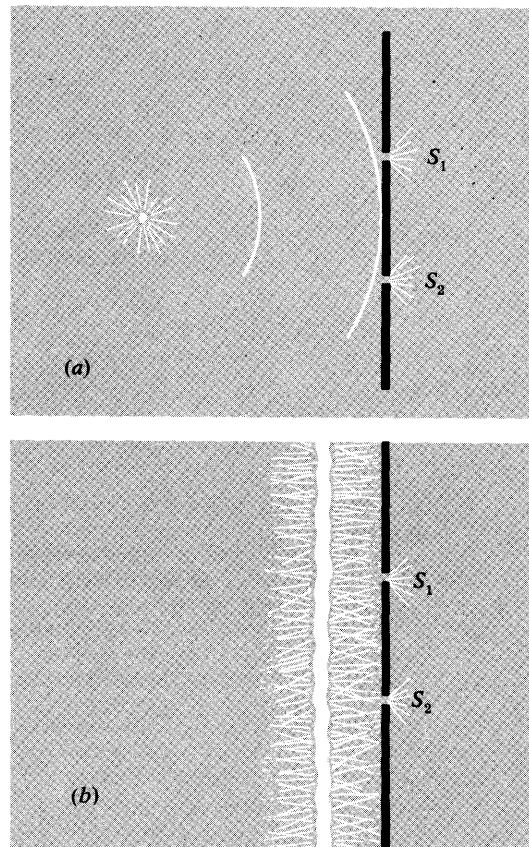


Fig. 9.8 (a) Las fuentes 1 y 2 son excitadas por una fuente puntual y mantienen una relación de fase constante. Hay coherencia. (b) Las fuentes 1 y 2 son excitadas por diferentes haces de radiaciones atómicas. Para la medida de tiempos grandes comparados con $(\Delta\nu)^{-1}$, hay incoherencia.

nula (interferencia completamente destructiva). Esta situación es experimentalmente distinguible (mediante la técnica de Brown y Twiss) de una situación en la que los trenes de ondas nunca se superponen y en la que por tanto siempre se tienen aproximadamente $100 + 100 \approx 200$ fotones. De lo que acabamos de expresar se desprende obviamente que conviene a la experiencia disponer de una intensa fuente de luz (para aumentar la probabilidad de una sobreposición entre los trenes de onda de dos fotones) y que el ancho de banda de los fotones constituyentes sea estrecho [debido a que la longitud del tren de onda es esencialmente multiplicado por el tiempo medio de decaimiento τ (esto es $c/\Delta\nu$), y un tren de ondas largo significa una probabilidad mayor de sobreposición].

9.4 ¿Cuán extensa puede ser una fuente “puntual”?

En la Fig. 9.1 mostrábamos cómo se pueden obtener dos fuentes luminosas coherentes (dos fuentes cuya fase relativa permanece constante) por irradiación de dos rendijas realizadas en una pantalla opaca con radiación proveniente de una fuente luminosa puntual. Por otra parte, si la fuente es demasiado ancha de manera que una rendija sea iluminada principalmente por un haz de átomos y la otra por otro haz independiente, entonces las dos rendijas son completamente incoherentes, esto es que sus fases no están correlacionadas [para tiempos de medición grandes en comparación con $(\Delta\nu)^{-1}$. Estas dos situaciones extremas se ilustran en la Fig. 9.8].

Fuente puntual clásica. Lo más cercano a una fuente puntual que podemos obtener es un único átomo. De acuerdo con la descripción clásica, este átomo emite ondas electromagnéticas en todas las direcciones y excita las corrientes de rendija de la Fig. 9.8a con la misma fase. (La teoría cuántica da efectivamente el mismo resultado.) Una fuente luminosa práctica contendrá una enorme cantidad de átomos radiantes. Si éstos estuvieran situados exactamente en la misma posición tendríamos una fuente puntual (y que sería más parecida a una fuente puntual clásica que un único átomo real). Pero en cualquier fuente práctica los átomos están confinados en una región de dimensión finita. Pero, ¿Cuán extensa puede ser una fuente luminosa para no dejar de ser “efectivamente” una fuente puntual (significando esto que las corrientes de rendija mantienen una relación de fase constante)?

Fuente extensa sencilla. Consideremos una fuente muy simple que no es una fuente puntual. Consiste en tres fuentes puntuales independientes a , b y c , cada una con la misma frecuencia dominante, el mismo ancho de banda y la misma intensidad promedio y dispuestas como se muestra en la Figura 9.9. Supongamos que comenzamos con sólo la fuente puntual a actuando. Entonces las rendijas 1 y 2 son excitadas

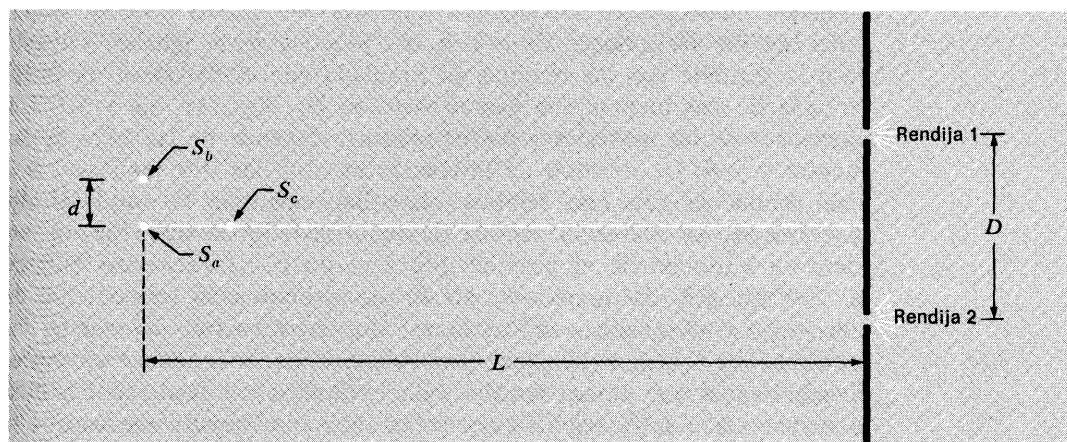


Fig. 9.9 Coherencia. Las rendijas 1 y 2 son excitadas por las tres fuentes independientes a , b y c . ¿Deben las tres fuentes unirse en un punto simple para que las rendijas 1 y 2 sean coherentes?

manteniéndose una fase relativa constante (que es nula en nuestra figura) y la luz que ellas emiten es coherente en cualquier intervalo de tiempo. Hagamos ahora que también actúen las fuentes a y c . A pesar de que la fuente c tiene la misma frecuencia y ancho de banda que la fuente a , ambas no están correlacionadas en fase. Así c y a no mantienen una fase relativa constante en intervalos de tiempo en comparación con $(\Delta\nu)^{-1}$. Sin embargo, la fase relativa de las corrientes en las rendijas 1 y 2 permanece nula durante todo el tiempo, debido a que la fuente c excita corrientes de rendija con fase relativa nula de la misma forma en que lo hace la fuente “ a ”. Las corrientes de rendija pueden ser consideradas como una superposición de las corrientes, inducidas por ambas fuentes, y si cada contribución da fase relativa nula entre las corrientes, lo mismo sucederá con la superposición. Concluimos así que podemos extender la fuente puntual a lo largo de la recta que conecta a y c sin arruinar la coherencia de las rendijas 1 y 2.

Consideremos ahora la situación en la que a y b están encendidas (pero c está apagada). Las fuentes a y b son fuentes independientes que tienen la misma frecuencia dominante y el mismo ancho de banda y la misma intensidad promedio. Durante cualquier intervalo de tiempo corto en comparación con $(\Delta\nu)^{-1}$, la amplitud y la constante de fase de cada fuente permanece constante. Supongamos que para un instante dado [un instante significa un intervalo temporal corto en comparación con el tiempo de coherencia $(\Delta\nu)^{-1}$ pero suficientemente largo como para contener lo menos una rápida oscilación completa, de manera que podamos decir cuáles son las fases y las amplitudes] sucede que la amplitud de b es muy pequeña en comparación a la de a . Entonces, y con buena aproximación ambas rendijas son irradiadas solamente por a , y las corrientes de rendija tienen por esto fase relativa nula. Esperemos ahora un tiempo suficientemente largo en comparación al tiempo de coherencia de las fuentes a y b y examinemos la

situación nuevamente. Supongamos que esta vez sucede que las amplitudes de las oscilaciones de a y b son prácticamente iguales. En este caso la pantalla con las rendijas es irradiada con el diagrama de interferencia de dos fuentes que hemos visto en las Figs. 9.5, 9.6 y 9.7. Las posiciones de los máximos y de los mínimos depende de las fases de las fuentes a y b . La cuestión de interés es si o no las dos ranuras 1 y 2 será conducida con fase relativa cero. Sabemos que la amplitud del diagrama de interferencia cambia de signo cuando pasamos de un mínimo de interferencia al próximo [de acuerdo con la ecuación (13) de la Sección 9.2, la amplitud $A(r, \theta)$ es proporcional al coseno de $\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \pi d \sin \theta / \lambda$, cambiando así de signo cuando $d \sin \theta$ se incrementa en λ , tal como ocurre entre máximos de interferencia sucesivos]. Vemos que ambas rendijas son excitadas con fase relativa nula la mayor parte del tiempo sólo si están separadas mucho menos que la separación x_0 entre máximos de interferencia sucesivos del diagrama de interferencia de dos fuentes. (Aún cuando las rendijas están muy próximas puede suceder que un cero del diagrama de dos fuentes que las irradia caiga entre las dos rendijas, caso éste en el que son excitadas con una diferencia de fase de 180° . Sin embargo esto sucede durante una fracción de tiempo cada vez más pequeña a medida que las rendijas están más próximas.) Necesitamos así

$$D \ll x_0, \quad (33)$$

donde x_0 es la separación espacial entre máximos sucesivos y está dada, de acuerdo con la ecuación (22), Sección 9.2, por

$$x_0 = L \frac{\lambda}{d}. \quad (34)$$

Condición de coherencia. La “fuente extensa” que consiste en las fuentes puntuales a , b y c actúa, por tanto, como una fuente puntual efectiva siempre que satisfaga la *condición de coherencia*

$$D \ll \frac{L\lambda}{d}, \quad (35)$$

esto es,

$$d \ll \frac{L\lambda}{D}, \quad (36)$$

es decir,

$$L \gg \frac{dD}{\lambda}, \quad (37)$$

donde una u otra de estas formas puede ser la más apropiada, dependiendo esto de los parámetros que sean experimentalmente variables. [El lector puede verificar la ecuación (37) mediante un sencillo experi-

mento (véase el Experimento casero 9.20) en el que L es la variable.] La manera más fácil de recordar la condición de coherencia es expresarla en la forma

$$dD \ll L\lambda, \quad (38)$$

que dice que el producto de los dos anchos transversales d y D debe ser pequeño en comparación con el producto de las dos extensiones longitudinales L y λ .

Si la fuente consiste en un gran número de puntos entre a y b , de tal manera que la fuente tiene un ancho d , la ecuación (38) es aplicable a toda la fuente si se verifica para los puntos extremos a y b (esto es, fuentes puntuales cuya extensión es menor que d son coherentes si son coherentes aquellas que están separadas en d). En forma semejante, cuando consideremos varias o muchas rendijas en una pantalla en vez de solamente dos, la condición de coherencia, ecuación (38), podrá ser aplicada al arreglo completo de rendijas tomando como D la separación entre las rendijas más alejadas.

9.5 Ancho angular de un “haz” de ondas progresivas

Un “haz” de ondas progresivas es un diagrama de ondas que viajan en una dirección dada y que tiene un ancho lateral finito. Tanto el haz de luz visible de una linterna, como un haz de microondas de un equipo de radar pueden ser realizados colocando una pequeña fuente de radiación electromagnética en el foco de un reflector parabólico. La pequeña fuente excita los electrones de la superficie metálica del reflector exactamente con las relaciones de fase propias de manera que la radiación reflejada desde todos los puntos de la superficie interfiere en forma constructiva a lo largo de la dirección del haz. Otra forma de conseguir un haz de luz es reflejar la luz proveniente de una fuente pequeña o distante (por ejemplo, el sol) en un pequeño espejo plano. Alternativamente podemos utilizar un orificio en una pantalla opaca en vez de un espejo. Si la fuente está suficientemente alejada y es suficientemente pequeña, la radiación que incide sobre el espejo (o sobre el orificio) puede ser aproximadamente por una onda plana —esto es, una onda plana en la que toda la radiación viaje exactamente en la misma dirección. El espejo refleja entonces “parte de la onda plana”. En forma semejante, en el caso de la pequeña fuente en el foco de un espejo parabólico, si la fuente es suficientemente pequeña y el espejo es un paraboloide perfecto, el haz es (en cierta aproximación) como un “segmento de una onda plana”, consistente en radiación que viaja toda en la misma dirección. Todas estas consideraciones son válidas igualmente para las ondas sonoras y ondas en fluidos.

Ancho angular de un haz limitado por la difracción. Ahora se nos plantea una cuestión interesante y muy importante: ¿Puede proyec-

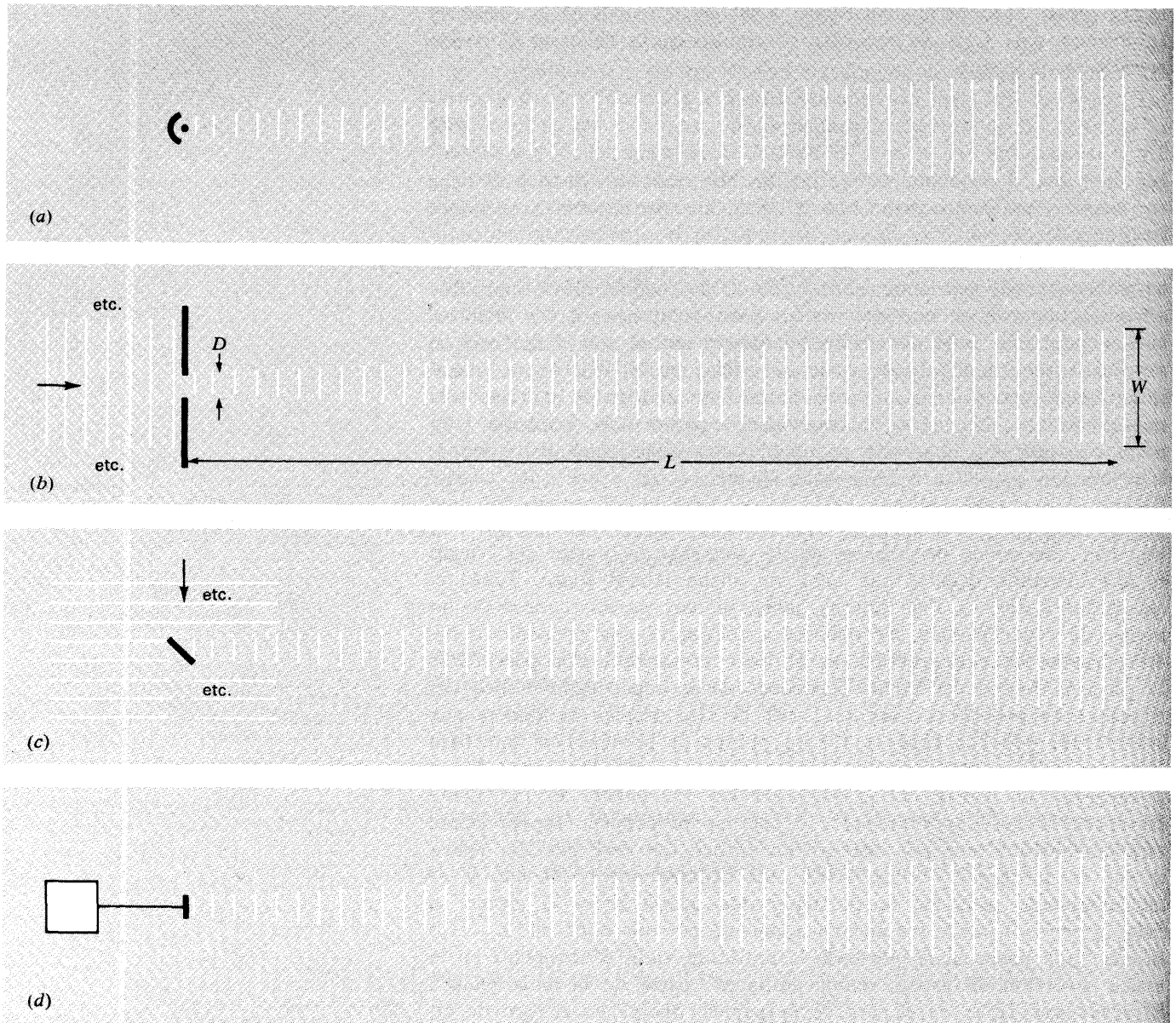


Fig. 9.10 Difracción. El haz de ancho D tiene una anchura angular $\approx \lambda/D$ y se propaga a un ancho $W \approx L\lambda/D$ al desplazarse la distancia L . (a) Haz producido por una fuente puntual y un espejo parabólico. (b) Haz producido por una onda plana que incide en

una abertura hecha en una pantalla opaca. (c) Haz producido por una onda plana que incide en un espejo plano. (d) Haz emitido por un radiador plano con todas las partes que oscilan en fase.

tarse cuidadosamente, un haz de ondas que sea justamente como un “segmento de la sección transversal” de una onda plana, de manera que todas las ondas se desplacen exactamente en la misma dirección y se obtenga un haz perfectamente paralelo que continuará siempre con el mismo ancho? *No*. Por pequeña que sea la fuente puntual situada en el foco de una parábola perfecta, la radiación contenida en el haz no será perfectamente paralela. Si la dirección “dominante” es paralela al eje z y el ancho espacial del haz (para un valor dado de z , por ejemplo, en el reflector) es D , entonces habrá una distribución angular de direcciones de propagación con un “ancho correspondiente a semiintensidad máxima” de alrededor de λ/D (más adelante mostraremos esto). En forma semejante, si tenemos una onda perfectamente plana proveniente de una fuente puntual distante que incide sobre un orificio de ancho D (o un espejo de ancho D) el ancho angular del haz transmitido se aproxima a λ/D . El ancho angular sólo puede ser nulo si D es infinito (o si λ es cero). Se dice que el ancho angular del haz está *limitado por la difracción*. En la Fig. 9.10 mostramos algunos ejemplos de haces. Debe notarse que si el ancho original del haz es D y se intenta por todos los medios hacer que el haz sea lo más paralelo posible, el ancho W cuando el haz ha atravesado una distancia grande L es aproximadamente el ancho original D más L veces el ancho angular completo λ/D . Para L suficientemente grande, podemos ignorar el ancho original D . Tenemos así que

$$\text{Ancho angular completo: } \boxed{\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D}}, \quad (39)$$

$$\text{Ancho del haz: } W \approx L \frac{\lambda}{D}. \quad (40)$$

Cualquiera de las cuatro ilustraciones de la Fig. 9.10 puede tomarse como representativa de una situación con ondas en fluidos, ondas sonoras y ondas electromagnéticas (luz visible de longitud de onda 5×10^{-5} cm, por ejemplo, o microondas de longitud de onda 10 cm en otro ejemplo).

Un haz es un máximo de interferencia. Daremos aquí una deducción aproximada de la ecuación (39). (En la Sección 9.6 daremos una deducción exacta.) El resultado es independiente de la clase de ondas y es independiente de la forma de producción de las mismas. Tomemos la fuente más simple que es probablemente el radiador plano que se muestra en la Fig. 9.10d. Para ondas sonoras, ésta puede realizarse mediante un pistón que oscila *en el aire libre*. En el caso de las ondas electromagnéticas puede realizarse a través de una hoja de carga de extensión finita, por ejemplo una antena plana. En cualquiera de los dos casos, *el radiador entero* es coherente. Esto es que todas las “partes que se

mueven” se mueven en fase unas con las otras. [Si éste no es el caso la dispersión angular será mayor que la dada por la ecuación (39). En el límite de un radiador incoherente directamente no existe haz.] En la dirección dominante del haz, un punto campo suficientemente alejado del radiador está prácticamente a la misma distancia de todas las partes del radiador. Por lo tanto, las ondas provenientes de todas las partes del radiador se suman con la misma fase relativa y tenemos un máximo de interferencia constructiva. *Es esto lo que define la dirección dominante del haz.* (Si se varía la fase relativa sobre la superficie del radiador se puede conducir el haz en una dirección que no sea la normal a la superficie. Esto es exactamente lo que ocurre en la figura 9-10c, en la que distintas partes del espejo situado a 45° de la normal son excitados con distintas fases por la onda incidente, de manera tal que la región de máxima interferencia constructiva —la dirección del haz reflejado— no es normal al espejo sino que, por el contrario, satisface la ley de “reflexión especular”).

Ancho angular de un haz. En un punto campo distante que no está justo en la dirección del haz no se tiene interferencia completamente constructiva. Para ver dónde está el primer cero del diagrama de interferencia dividimos el radiador en dos mitades, una superior y una inferior. Entonces aproximamos el radiador por dos fuentes coherentes puntuales (o lineales), una en la mitad de la parte superior y otra en la mitad de la parte inferior. La separación lateral entre estas fuentes es $\frac{1}{2}D$. Su primer cero de interferencia (el primer cero hacia cualquiera de los lados del máximo principal situado en la dirección del haz) ocurre cuando $(\frac{1}{2}D) \sin \theta$ es $\frac{1}{2}\lambda$. Para ángulos pequeños tomamos $\sin \theta \approx \theta$, y así obtenemos

$$\text{Semiancho angular para el primer cero} = \frac{\lambda}{D} \quad (41)$$

Esto se muestra en la Fig. 9.11.

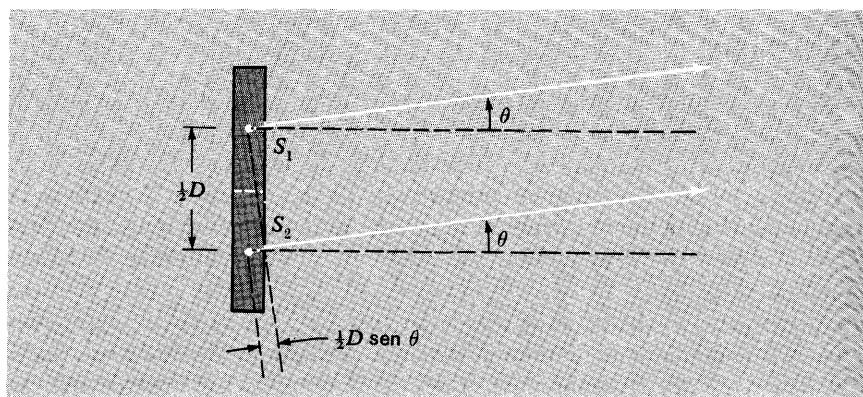


Fig. 9.11 Radiador plano. La fuente 1 representa las contribuciones desde la mitad superior y la fuente 2 las de la mitad inferior.

Veamos dónde aparece el próximo máximo. Si S_1 y S_2 fueran realmente fuentes puntuales (o lineales) el próximo máximo aparecería cuando el camino desde la fuente 2 al punto campo excediera a la distancia entre la fuente 1 y el punto campo en una longitud de onda. Aunque la mitad superior y la mitad inferior *están* en fase, las contribuciones individuales son nulas. Esto puede explicarse de la siguiente manera: si dividimos cada mitad en otras dos mitades, de manera que el radiador resulta dividido en cuatro cuartos, entonces la contribución del primer cuarto está desfasada 180° fuera de fase con la del cuarto cuarto y se cancelan. Así, el primer máximo secundario aparece, no cuando tenemos las dos mitades con contribuciones que difieren en fase en 2π (ya que tenemos los cuatro cuartos con contribuciones que difieren en fase entre cuartos sucesivos en π), sino más bien cuando tenemos tres tercios del radiador con tercios adyacentes que difieren en fase en π de uno al otro. Dos de los tercios se cancelan entre sí, pero queda el *tercer* tercio. Así la amplitud del primer máximo secundario es más pequeña que la del máximo principal por lo menos en un factor $1/3$ (en realidad, es aún más pequeña debido a las diferencias de fase dentro de la contribución del tercio que se ha considerado). Vemos que el máximo secundario tiene una amplitud pequeña en comparación con el máximo central que da la dirección del “haz”. Cuando estudiemos el diagrama exacto encontraremos que el semiancho angular hasta el primer cero es igual al ancho angular completo tomado en *aproximadamente* la mitad de la intensidad máxima, que es como hemos definido el ancho angular del haz en la ecuación (39). Hemos deducido así, aproximadamente, la ecuación (39). (El resultado exacto está dado en la Fig. 9.14 Sec. 9.6.)

Aplicación: Haz laser en función de haz de linterna

Supongamos que tenemos un haz laser limitado por efecto de la difracción cuyo diámetro es $D = 2$ mm, con una longitud de onda de 6000 \AA . ¿Cuánto aumenta el diámetro del haz a una distancia de 50 pies? La dispersión angular del haz es

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D} \approx \frac{6 \times 10^{-5} \text{ cm}}{0,2} \approx 3 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

La dispersión angular multiplicada por la distancia $L = 50$ pies ≈ 1500 cm da una dispersión espacial $W \approx (1500)(3 \times 10^{-4}) \approx 0,5 \text{ cm} = 5 \text{ mm}$. (Esto puede mostrarse fácilmente en el aula con un laser.) Si tenemos una “luz lineal” tipo destello cuyo diámetro de haz sea de 2 mm, formado por un filamento “puntual” en el foco de una lente, ¿cuán pequeño tendría que ser el filamento para que el haz estuviera limitado por la difracción? Si el filamento no es puntual, las distintas

partes de él dan haces “independientes”. La dispersión angular debida al tamaño no nulo del filamento resulta ser aproximadamente el ancho del filamento dividido por la distancia focal f :

$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta x}{f}.$$

Si queremos obtener un haz de linterna limitado por efecto de la difracción (más bien que limitado por el tamaño del filamento) y que comienza teniendo un ancho de 2 mm, lo que deseamos es que el $\Delta\theta$ debido al filamento sea menor que el ancho de difracción, que es de alrededor de 3×10^{-4} , de acuerdo con nuestro cálculo de más arriba. En una linterna de bolsillo típica, el filamento está aproximadamente a 0,5 cm de la lente: esto es, $f \approx 0,5$ cm. Así, el filamento debe tener una dimensión transversal Δx dada por

$$\Delta x < f \Delta\theta \approx (0,5)(3 \times 10^{-4}) \approx 1,5 \times 10^{-4} \text{ cm}.$$

Un filamento tan pequeño es difícil de construir

9.6 *La difracción y el principio de Huygens*

Diferencia entre interferencia y difracción. En la Sección 9.5 discutimos el ancho angular de un haz limitado por la difracción. Dimos una cruda deducción del diagrama de difracción producido cuando una onda plana incide sobre una abertura realizada sobre una pantalla opaca (Fig. 10b) o sobre un espejo (Fig. 10c) o cuando es emitida por un radiador plano (Fig. 10d). En secciones anteriores discutimos el diagrama de interferencia producido por dos fuentes puntuales o lineales. Pero, ¿cuál es la diferencia entre un diagrama de interferencia y un diagrama de difracción? Ninguna, en realidad. Por razones históricas el diagrama de amplitud o intensidad producido por la superposición de contribuciones proveniente de un número finito de fuentes discretas coherentes es usualmente llamado diagrama de *interferencia*. El diagrama de amplitudes o intensidades producido por la superposición de contribuciones provenientes de una distribución “continua” de fuentes coherentes se denomina usualmente diagrama de *difracción*. Hablamos así del diagrama de interferencia debido a dos rendijas estrechas, o del diagrama de difracción debido a una rendija ancha, o del diagrama combinado de interferencia y difracción debido a dos rendijas anchas.

En la Sección 9.5 supusimos que el haz limitado por efectos de difracción producidos cuando una onda plana incide sobre una abertura en una pantalla (Fig. 10b) es equivalente al producido por un radiador plano que tenga el mismo tamaño que la abertura, con todas las partes del radiador oscilando en fase y con la misma amplitud (Fig. 10d). En la presente sección trataremos de justificar la supuesta equivalencia. Encontraremos que la equivalencia no es exacta, pero sí

que es una aproximación útil que simplifica grandemente los cálculos de diagrama de difracción. La aproximación vale si el ancho de la abertura es grande en comparación con la longitud de onda. En este caso, la aproximación es muy buena para calcular la radiación emitida en direcciones que no se aparten demasiado de la dirección del haz y sirve así para calcular la intensidad y la amplitud a distancia suficientemente grandes de la abertura o radiador equivalente. La aproximación no sirve si se desea conocer los campos dentro de la abertura misma. La técnica de cálculo que hace uso de esta equivalencia supuesta se denomina *construcción de Huygens*. La utilizaremos para calcular el diagrama de difracción producido cuando una onda plana (debida, por ejemplo a una lejana fuente puntual) incide sobre un orificio realizado sobre una pantalla opaca.

Cómo trabaja una pantalla opaca. Toda radiación electromagnética tiene su origen último en partículas cargadas que oscilan. El campo eléctrico (y magnético) total en cualquier punto dado es una superposición de las ondas producidas por todas las fuentes, esto es, por todas las cargas oscilantes. En el presente problema, una de las fuentes es la distante fuente puntual que produce la onda plana que incide sobre la pantalla. Designaremos esta fuente con la letra *S*. Detrás de la pantalla opaca la amplitud de onda total es cero (por hipótesis — es esto lo que queremos dar a entender diciendo que la pantalla es opaca). Esta onda total es una superposición de la onda proveniente de *S* y de las ondas emitidas por los electrones oscilantes que están dentro del material de la pantalla. Esto es, la pantalla no engulle la onda incidente que proviene de *S*. Los electrones son empujados por la radiación incidente (y también por la radiación emitida por los otros electrones de la pantalla), y la superposición de *todas* las ondas, esto es, la que proviene de *S* y las provenientes de todos los electrones, da cero más allá de la pantalla. Si esto parece extraño recordemos cómo sucede el hecho de que el campo electrostático es nulo dentro de un buen conductor metálico. El conductor no se come el campo externo que lo excita. Este campo está aún dentro del conductor, pero las cargas se mueven en el conductor (antes de que se alcance el equilibrio estático) y se inmovilizan sobre las superficies hasta que finalmente la *superposición* de los campos provenientes de las cargas superficiales y el campo incidente dan un campo total nulo dentro del conductor. Todos los campos electromagnéticos provienen de partículas cargadas, y tal campo “nulo”, como el que existe del otro lado de la pantalla opaca, es el resultado de una superposición.

Si uno se ha formado la imagen mental de que las líneas de fuerza eléctrica de una partícula cargada son una especie de corriente en perdigones enviadas a la velocidad de la luz desde la carga puntual, se encuentran dificultades. Los pequeños perdigones no obedecen el

principio de superposición. No pasan uno a través del otro sin perturbación. Dos perdigones no pueden superponerse para dar cero perdigones. Con esta imagen mental deberíamos pensar que el efecto de un conductor metálico sobre un campo electrostático es un efecto de “frenado de perdigones”, como una especie de armadura. Es ésta también la forma en que incorrectamente podríamos pensar que una pantalla opaca a la luz incidente es una armadura que contiene la luz y la absorbe, convirtiéndola en calor (si la pantalla es negra) o haciendo rebotar los perdigones (si la pantalla es una hoja metálica brillante). Ésta es una mala imagen. Si el lector posee esta imagen mental, seguramente que no es el primero, pero es una imagen errónea: deshágase de ella.

Pantallas opacas brillantes y negras. Hay dos extremos en las variedades de pantalla opaca. A un extremo se puede tener una pantalla opaca brillante (como una hoja delgada de aluminio). Los electrones en el metal son impulsados por el campo magnético local; consecuentemente emiten ondas electromagnéticas. En la dirección hacia adelante (la dirección de la radiación incidente) resulta que la superposición de la onda incidente y aquella proveniente de los electrones, da cero. En la dirección hacia atrás, da una onda reflejada. Lejos de cualquier resonancia, el movimiento de un electrón dado es enteramente debido a la amplitud elástica, y siendo así la velocidad está 90 grados fuera de fase con el campo eléctrico total; por lo tanto no se efectúa trabajo sobre el electrón durante cualquier ciclo completo. (El electrón “reorienta” la energía de radiación sin absorber permanentemente ninguna energía.) En otro extremo se puede tener una pantalla opaca negra (como una cartulina negra o una placa microscópica pintada con una capa de “aguadag” — hollín suspendido en agua). Otra vez los electrones son impulsados en dirección delantera por la radiación incidente. También soportan un obstáculo resistivo desde el medio y están siempre a velocidad terminal. Su radiación en la dirección delantera está 180 grados fuera de fase con la radiación incidente y se superpone con ella para dar cero (después de suficiente grosor de pantalla). La velocidad de un electrón dado está siempre en fase con la fuerza eléctrica total, y consecuentemente, el trabajo neto es efectuado sobre el electrón. El trabajo sobre el electrón es transferido al medio, el cual se calienta. No hay onda neta reflejada — las contribuciones desde diferentes capas de la pantalla se superponen para dar cero en la dirección trasera.

Efecto de un agujero en una pantalla opaca. Procedemos a cortar un pequeño “orificio” (o hendidura) en nuestra pantalla opaca. Primero marquemos el material que debe ser removido. Esto se llamará hendidura núm. 1; el material removido lo designaremos como tapón (*plug*) 1.

El material de la pantalla por encima y por debajo del tapón 1 es designado a (encima) y b (debajo). El campo total detrás de la pantalla, que es cero, es la superposición de los campos emitidos por la fuente S y por el material desde a , b y tapón 1. De esta manera, *antes de remover el material de la hendidura 1*, se tiene

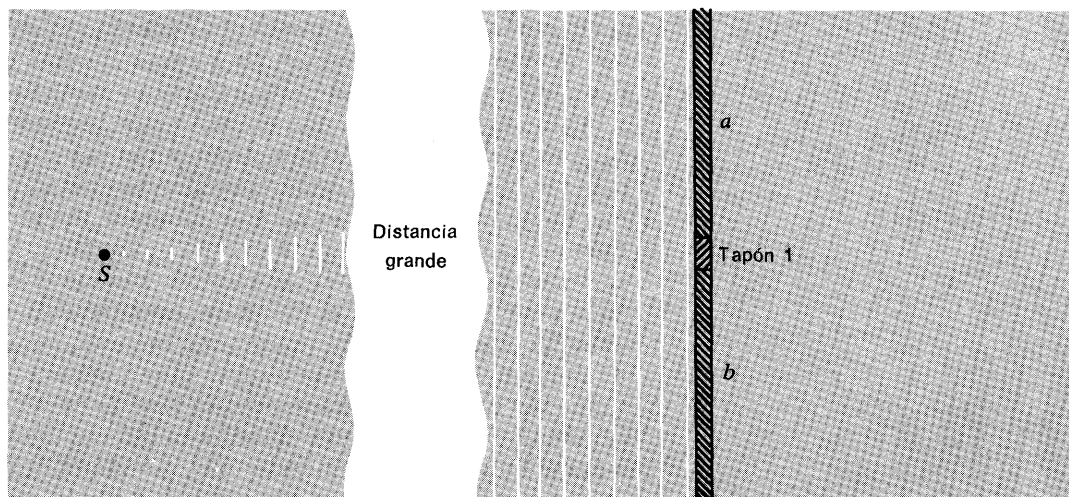
$$E = 0 = E_S + E_a + E_b + E_1. \quad (42)$$

Esta situación se muestra en la Fig. 9.12.

Ahora removamos el material que taponaba la hendidura 1. *Supóngase* que el movimiento de los electrones en las regiones a y b no cambia por la eliminación del tapón. (Esto es aproximado, porque los electrones en las regiones a y b son impulsados por un campo total que incluye el radiado por los electrones que estaban en el tapón. Esos electrones en a y b dentro de algunas longitudes de ondas del borde de la hendidura estarán muy afectados por la eliminación del tapón, porque la radiación de un electrón dado decae al incrementarse la distancia del electrón, así que los más próximos son los más importantes.) Con este supuesto, el campo total detrás de la pantalla no es más que la superposición dada por la ecuación (42), la cual suma cero. En cambio, ésta es la superposición menos la contribución desde el tapón 1:

$$\begin{aligned} E &= E_S + E_a + E_b \\ &= (E_S + E_a + E_b + E_1) - E_1 \\ &\approx 0 - E_1 \\ &\approx -E_1. \end{aligned} \quad (43)$$

Fig. 9.12 Ondas planas provenientes de una fuente puntual distante S inciden sobre una pantalla opaca. Superposición de campos debidos a cargas en S , a , b y tapón 1 da cero detrás de la pantalla.



Vemos que el campo remanente, el cual es una superposición de la contribución de la fuente S y el material sobrante de la pantalla, a y b) es justamente el mismo (excepto por el signo menos) que el que estaba siendo emitido por el tapón cuando se hallaba en su lugar. Así podemos encontrar el campo de detrás de la pantalla imaginando que sustituimos la fuente y la pantalla con hendidura por el sistema simplista del tapón solo, sin ninguna fuente S y ninguna pantalla remanente, de manera que los electrones oscilen en todo el tapón con la misma fase y amplitud, como lo hacen realmente cuando el tapón está en su sitio. Esto nos da un medio fácil para calcular los tipos de interferencia debido a ranuras en una pantalla opaca. Es fácil porque no intentamos la variación de amplitud constante de fase de los electrones oscilantes en el tapón como funciones de posición a lo largo de la dirección del haz. (La pantalla tiene un espesor finito.) Si sabíamos que podíamos decir algo acerca de la radiación “reflejada” desde el tapón, por ejemplo, podríamos distinguir entre una pantalla opaca negra y una brillante, en cambio suponemos que el campo E_1 producido por el tapón es una capa infinitesimal fina de cargas oscilantes, todas en fase y con la misma amplitud.

Principio de Huygens. Este recurso de cálculo se llama *principio de Huygens*. Puede ser usado para cualquier número de ranuras y también para una simple ranura ancha. Su base se encuentra en las ecuaciones (42) y (43). Notemos que el “tapón radiante” mentalmente sustituido da el tipo de interferencia correcto sólo detrás de la pantalla. Un tapón radiante *real*, por ejemplo una antena, irradia en toda dirección. Una pantalla opaca *real* con una perforación en ella tiene mucha o poca radiación (reflejada) según sea brillante u opaca. El principio de Huygens no puede ser usado para calcular el campo a la izquierda de la pantalla (tomando la radiación incidente como llegando desde la izquierda, igual que en la figura), porque no tenemos en cuenta la variación de fase y amplitud que ocurre entre las caras frontal y posterior del tapón. Esa variación depende de si la pantalla es brillante u opaca.

Otra observación es que al escribir la ecuación (43) supusimos que E_a y E_b eran lo mismo con el tapón en el lugar o sin él. Esto es cierto sólo aproximadamente, como mencionamos antes. Si se tiene, por ejemplo, una simple ranura ancha y se utiliza la estructura de Huygens para calcular los campos a la derecha de la pantalla y en la ranura misma, se encuentra la siguiente: si estamos suficientemente lejos de la pantalla y suficientemente cerca de la reacción delantera, y si la pantalla tiene un ancho de varias longitudes de onda, entonces la construcción de Huygens da una aproximación muy buena a la respuesta correcta (como se determina experimentalmente). Si se está en la vecindad de la ranura misma, entonces la construcción de Huygens da una aproximación muy pobre. Si se está “en” la ranura, las cargas móviles más importantes en los restos de material de la pantalla son aquellas que

están más próximas al borde de la ranura, porque ellas están más próximas. Pero éstas son justamente las más afectadas por la iluminación del tapón. El tipo de campo puede ser muy complicado en la ranura y especialmente cerca de los bordes, donde dominan las cargas oscilantes más próximas. Se podría preguntar, ¿por qué no resolver el problema exactamente? Esto es muy difícil, pues se deben utilizar las ecuaciones de Maxwell en todas las regiones vacías y en el material, especificando precisamente las propiedades de este último. No hay métodos generales de encontrar soluciones, y muy pocos problemas han sido resueltos exactamente.

Cálculo de la difracción del tipo ranura simple utilizando la construcción de Huygens. Deseamos calcular el tipo de difracción producido cuando una onda plana (emitida por una fuente puntual distante) incide sobre una ranura. Usando la construcción de Huygens, mentalmente reemplazamos la onda plana incidente (o fuente puntual distante) y material de la pantalla por una plancha de material radiante, el tapón o *plug* de Huygens. Desde que tenemos una distribución continua de las cargas oscilantes a través de la plancha, deberíamos llevar a cabo una integración (superposición) sobre las contribuciones provenientes de elementos infinitesimales de la plancha. En lugar de una integración sobre una distribución continua, podemos considerar una suma discreta sobre contribuciones desde N "antenas" idénticamente espaciadas. En el límite que N tienda a infinito tendremos una distribución continua de fuentes radiantes. (La ventaja de usar N fuentes separadas más que una distribución continua es que así obtenemos al mismo tiempo la solución para el tipo de radiación producido por N antenas o N ranuras estrechas, para arbitrarios N desde $N = 2$ hasta infinito.)

Sea D el ancho total de la ranura simple. Entonces D es el ancho de la región que contiene nuestra formación lineal de N "antenas de Huygens". Sea d la separación entre antenas adyacentes. Entonces se tiene $D = (N - 1)d$. Supongamos la onda plana incidente en la dirección $+z$ y las N ranuras a lo largo de x , como se muestra en Fig. 9.13.

A un campo distante en P , cada antena da una contribución que tiene la misma amplitud $A(r)$ (porque P está suficientemente lejos, así que en la dependencia de amplitud con la distancia podemos suponer que la distancia es aproximadamente la misma para todas las antenas). Todas las antenas oscilan en fase (por hipótesis). El campo eléctrico E en el punto P es por lo tanto dado por la superposición

$$E = A(r) \cos(kr_1 - \omega t) + A(r) \cos(kr_2 - \omega t) + \dots + A(r) \cos(kr_N - \omega t). \quad (44)$$

Deseamos expresar esta superposición de N salientes ondas viajeras por una simple onda viajera saliente propagándose desde una posición promedio de la formación y teniendo una amplitud que esté modulada como

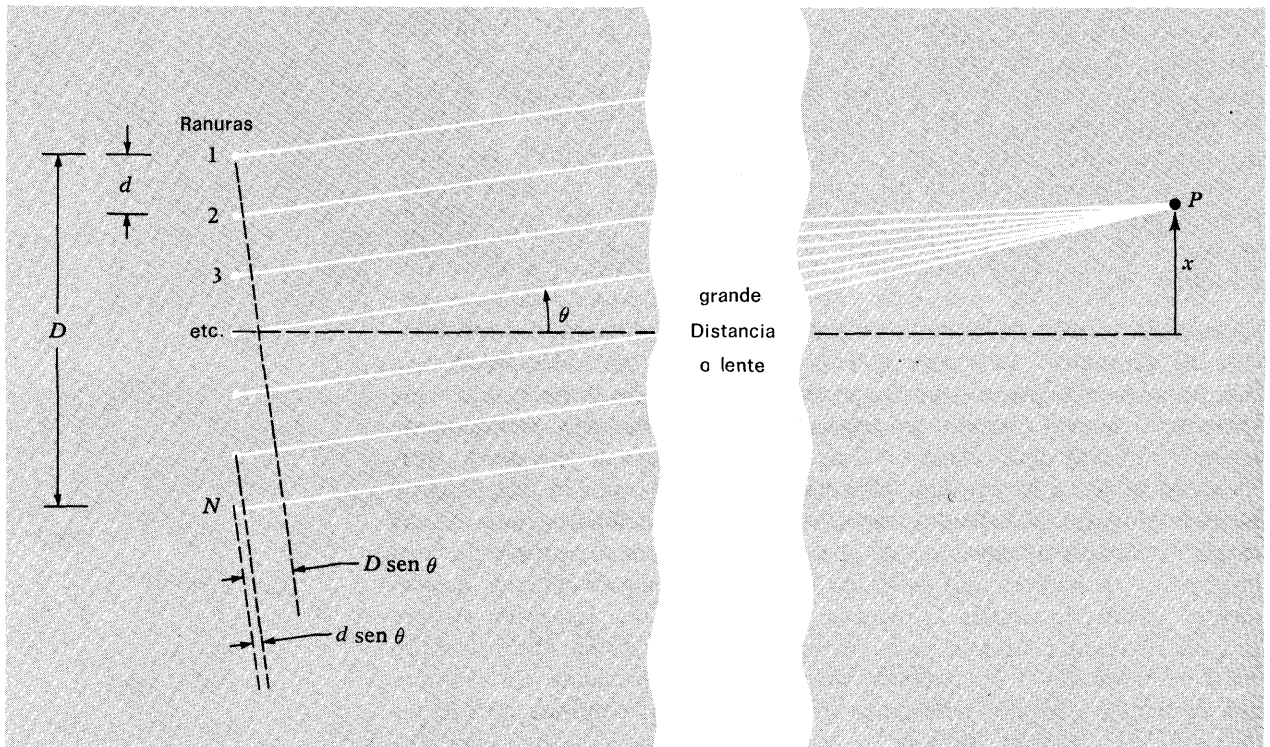


Fig. 9.13 N antenas, o N ranuras estrechas con cargas todas oscilando en fase.

función del ángulo de emisión. (Esto es lo que hicimos cuando consideramos el tipo de interferencia de fuentes puntuales en la Sección 9.2. Para $N = 2$ nuestra deducción debe reproducir esos resultados.) Podemos simplificar el álgebra usando números complejos. El campo E es la parte real de la cantidad compleja E_c , donde

$$E_c = A(r)e^{-i\omega t}(e^{ikr_1} + e^{ikr_2} + \dots + e^{ikr_N}). \quad (45)$$

Pero de acuerdo con la Fig. 9.13,

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + d \sin \theta, \\ r_3 &= r_1 + 2d \sin \theta, \\ &\dots \dots \dots \\ r_N &= r_1 + (N - 1) d \sin \theta. \end{aligned} \quad (46)$$

de esta manera, la ecuación (45) se transforma en

$$\begin{aligned} E_c &= A(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1}(1 + e^{ik(r_2-r_1)} + e^{ik(r_3-r_1)} + \dots) \\ &= A(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1}S, \end{aligned} \quad (47)$$

donde

$$\begin{aligned} S &\equiv 1 + e^{ik(r_2-r_1)} + e^{ik(r_3-r_1)} + \dots \\ &= 1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1}, \end{aligned} \quad (48)$$

con

$$a \equiv e^{ik(r_2-r_1)} = e^{ik(d \text{ sen } \theta)} = e^{i \Delta \varphi}, \quad (49)$$

donde

$$\Delta \varphi = kd \text{ sen } \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{ sen } \theta \quad (50)$$

es la fase relativa de las ondas (en P) proveniente de antenas vecinas. Las series geométricas S dadas por la ecuación (48) satisfacen la relación

$$\begin{aligned} aS - S &= a^N - 1, \\ S &= \frac{a^N - 1}{a - 1} \\ &= \frac{e^{iN \Delta \varphi} - 1}{e^{i \Delta \varphi} - 1} \\ &= \frac{e^{i(1/2)N \Delta \varphi}}{e^{i(1/2) \Delta \varphi}} \frac{[e^{i(1/2)N \Delta \varphi} - e^{-i(1/2)N \Delta \varphi}]}{[e^{i(1/2) \Delta \varphi} - e^{-i(1/2) \Delta \varphi}]} \\ &= e^{i(1/2)(N-1) \Delta \varphi} \frac{\text{sen } \frac{1}{2}N \Delta \varphi}{\text{sen } \frac{1}{2} \Delta \varphi}. \end{aligned} \quad (51)$$

Entonces, la ecuación (47) queda

$$\begin{aligned} E_c &= A(r) e^{-i\omega t} e^{ik[r_1 + (1/2)(N-1) d \text{ sen } \theta]} \frac{\text{sen } \frac{1}{2}N \Delta \varphi}{\text{sen } \frac{1}{2} \Delta \varphi} \\ &= A(r) e^{-i\omega t} e^{ikr} \frac{\text{sen } \frac{1}{2}N \Delta \varphi}{\text{sen } \frac{1}{2} \Delta \varphi}, \end{aligned} \quad (52)$$

donde la cantidad

$$\begin{aligned} r &\equiv r_1 + \frac{1}{2}(N-1) d \text{ sen } \theta \\ &= r_1 + \frac{1}{2}D \text{ sen } \theta \end{aligned} \quad (53)$$

da la distancia desde P al centro de la formación. Tomando la parte real de la ecuación (52), obtenemos para el campo en P

$$\begin{aligned} E(r, \theta, t) &= \left[\frac{A(r) \text{sen } \frac{1}{2}N \Delta \varphi}{\text{sen } \frac{1}{2} \Delta \varphi} \right] \cos(kr - \omega t). \\ &\equiv A(r, \theta) \cos(kr - \omega t). \end{aligned} \quad (54)$$

Comprobemos que esa ecuación (54) da el mismo resultado para $N = 2$ como nuestros resultados anteriores, ecuaciones (12) y (13), Sección 9.2, usando la identidad $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ con $x = \frac{1}{2} \Delta\varphi$:

$$\begin{aligned} E(r, \theta, t) &= A(r) \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta\varphi \cos \frac{1}{2} \Delta\varphi}{\sin \frac{1}{2} \Delta\varphi} \cos(kr - \omega t) \\ &= [2A \cos \frac{1}{2} \Delta\varphi] \cos(kr - \omega t), \end{aligned}$$

la cual coincide con los resultados anteriores.

Configuración de difracción para ranura simple. Tenemos N a infinito. Mantengamos D constante. El espaciamento d tiende a cero. La fase relativa desviada $\Delta\varphi$ entre las ondas debidas a antenas adyacentes tiende a cero. La fase total desviada en Φ entre las contribuciones de la primera y la enésima antena en P es exactamente $(N - 1)\Delta\varphi$. Esto es aproximadamente $N \Delta\varphi$ para N grande.

$$\Phi = (N - 1) \Delta\varphi = kD \sin \theta. \quad (55)$$

$$\Phi \approx N \Delta\varphi, \quad N \gg 1. \quad (56)$$

De esta forma la amplitud modulada en la ecuación (54) queda

$$A(r, \theta) = A(r) \frac{\sin \frac{1}{2} N \Delta\varphi}{\sin \frac{1}{2} \Delta\varphi} \approx A(r) \frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\sin [\frac{1}{2} (\Phi/N)]}. \quad (57)$$

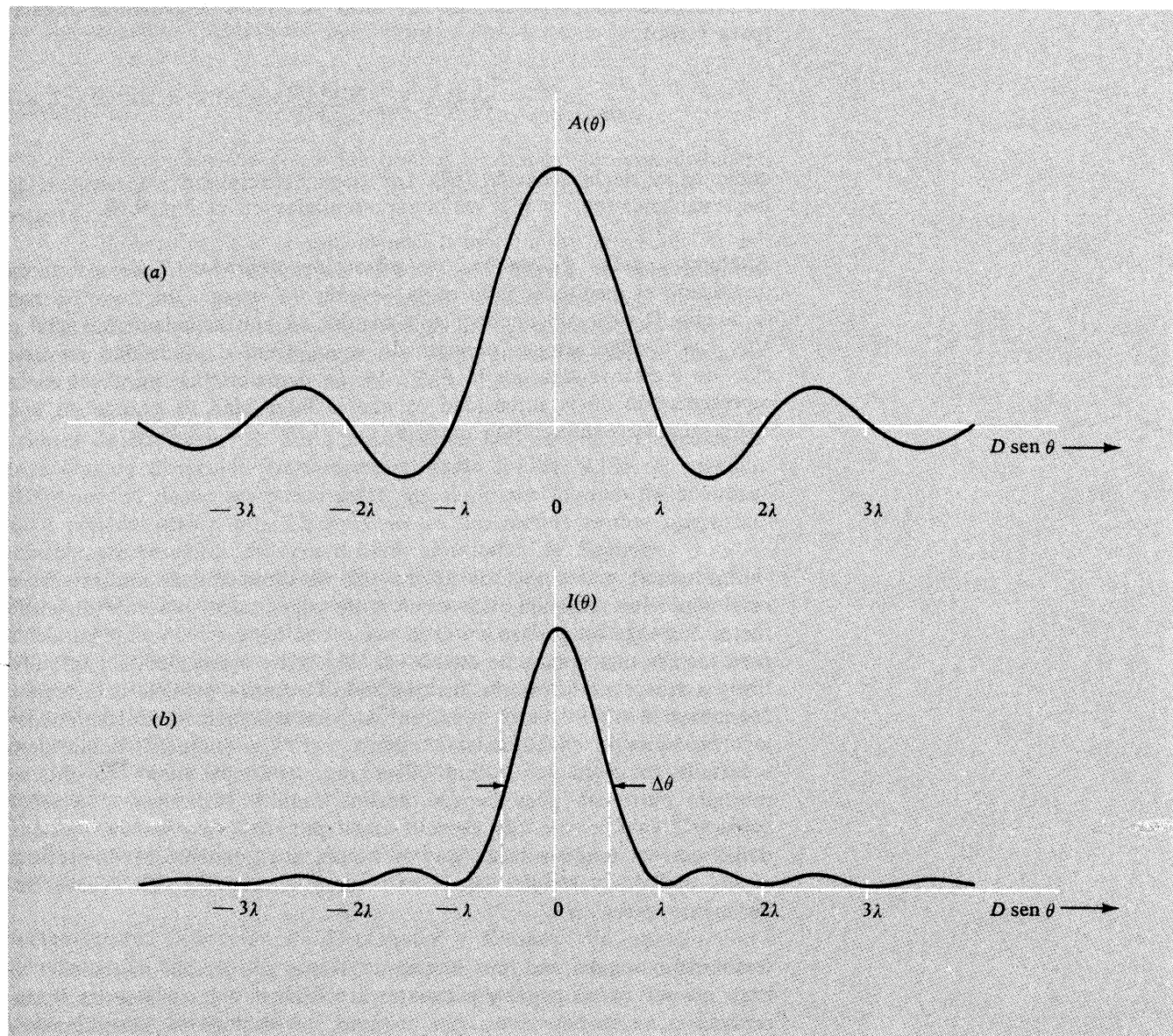
En el límite en que N es suficientemente grande, podemos despreciar todo excepto el primer término de la serie de Taylor por $\sin [\frac{1}{2} (\Phi/N)]$ en la ecuación (57):

$$\sin \frac{1}{2} \frac{\Phi}{N} \approx \frac{1}{2} \frac{\Phi}{N}, \quad (58)$$

$$A(r, \theta) = NA(r) \frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\frac{1}{2} \Phi}. \quad (59)$$

Podemos aún simplificar más. Como N tiende a infinito, debemos hacer tender a cero a $A(r)$ de manera tal que $NA(r)$ sea constante, porque queremos la misma contribución para un elemento infinitesimal dado dx de la formación continua sin importar cuántas antenas contiene. (Recuérdese que estamos usando antenas en construcción de Huygens.) Podemos eliminar la referencia específica a N y $A(r)$ en la ecuación (59) observando que para θ tendiendo a cero, Φ tiende a cero, y la relación $\sin \frac{1}{2} \Phi / \frac{1}{2} \Phi$ tiende a la unidad

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \dots}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \dots \\ &= 1 \quad \text{para } x = 0. \end{aligned}$$



De esta manera, $A(r, \theta)$ iguala $NA(r)$ veces la unidad, según la ecuación (59). Finalmente tenemos

$$E(r, \theta, t) = A(r, 0) \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\frac{1}{2} \Phi} \right] \cos(kr - \omega t), \quad (60)$$

con

$$\Phi = 2\pi \frac{D \sin \theta}{\lambda}. \quad (61)$$

Fig. 9.14 Configuración de la difracción de ranura simple. (a) Amplitud. (b) Intensidad. La franja angular $\Delta\theta$ extendida desde $-\frac{1}{2}\lambda/D$ a $+\frac{1}{2}\lambda/D$ corresponde aproximadamente a (para ángulos pequeños) "amplia anchura a intensidad mitad". La intensidad está por debajo en un factor $(2/\pi)^2 = 0,41$ más que en 0,5.

El promedio tiempo de energía derivado tiene una dependencia angular (para r fijo)

$$I(r, \theta) = I_{\text{máx}} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Phi}{(\frac{1}{2} \Phi)^2}, \quad (62)$$

como se ve de la ecuación (60). Los tipos de amplitud e intensidad de las ecuaciones (60) y (62) están representados en la Fig. 9.14.

Anchura angular de un haz de difracción limitada. Tenemos ahora justificado el resultado dado en la Sección 9.5 de que un “rayo” o haz de ancho D tiene un ancho pleno angular $\Delta\theta$ aproximadamente igual a λ/D . Las configuraciones precisas de la amplitud e intensidad en función de θ están dadas por la Fig. 9.14. La característica principal de la representación de la intensidad es que la intensidad es grande en una franja angular comprendida entre $\theta = -\frac{1}{2}\lambda/D$ y $+\frac{1}{2}\lambda/D$:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{D}. \quad (63)$$

La manera más simple de ver un tipo de difracción de ranura simple es el siguiente: arranque dos trocitos de papel, cada uno con un borde recto. Sostenga un pedazo en cada mano con los bordes rectos paralelos para formar una ranura de ancho variable. Mire a una fuente puntual o lineal a través de la ranura, manteniendo la ranura paralela a la fuente. Mantenga la ranura cerca y frente al ojo con una mano sostenida por la otra. Varíe la anchura de la ranura “cero” a “infinito”, donde cero e infinito es cerca de 1 mm. Una ranura simple mejor se obtiene mirando entre las púas de un tenedor común. Mantenga el tenedor cerca y frente al ojo. El espacio entre púas es muy ancho, así que debe rotar el tenedor hasta que la ranura sea pequeña. Mediante una rápida medida (y simple) puede verificarse la ecuación (63). Véase Experimento casero 9.17.

Resolución angular del ojo humano. Tome una escala milimétrica o haga marcas en un papel y encuentre la distancia a las cuales las líneas o rayas se hacen borrosas y, por lo tanto, no resolutivas. Generalmente, encontrará que 1 mm puede ser simplemente resuelto a 2 metros e imposible a 4 metros. Por lo tanto, para el ojo humano el centro del campo de visión (por ejemplo, mirando directamente las líneas) encontramos una resolución angular límite $\Delta\theta \approx 1 \text{ mm}/2 \text{ m} = 1/2000$. Ahora mire en el espejo y mida el diámetro D de la pupila, utilizando una regla mantenida cerca del ojo. Generalmente, $D \approx 2 \text{ mm}$. La difracción límite de resolución angular para el ojo está dada por la medida angular de la imagen situada en la retina desde una onda plana incidente emitida

por una fuente puntual distante. El ancho pleno angular $\Delta\theta$ de la imagen de un punto distante es, por tanto

$$\Delta\theta \text{ (límite de difracción)} \approx \frac{\lambda}{D} \approx \frac{5,5 \times 10^{-5} \text{ cm}}{0,2 \text{ cm}} \approx \frac{1}{4000}.$$

Así el cerebro gusta de tener los puntos separados por una distancia angular de casi el doble del ancho de difracción antes de verlos como resueltos.

A fin de verificar que la coincidencia (simple) entre la resolución del ojo y el ancho de difracción no es accidental, repita los experimentos mencionados antes mirando a través del orificio que deja un alfiler en una hoja de papel (o una cinta opaca). El agujerito deberá tener un diámetro de 1 mm aproximadamente (suponiendo la pupila de unos 2 mm). ¿Empeora la resolución angular? ¿En un factor 2?

Criterio de Rayleigh. Si dos puntos tienen una separación angular de un ancho de difracción λ/D , entonces, según la Fig. 9.14b, el máximo de intensidad desde un punto caerá en el primer mínimo de la intensidad tipo del otro punto. En ese caso los dos puntos se dice que están *exactamente resueltos de acuerdo con el criterio de Rayleigh*.

La anchura real en la retina de la imagen de un punto distante está dado aproximadamente por la distancia focal de la retina del ojo tantas veces como el ancho angular de la imagen. La distancia focal f es el diámetro interior del ojo, cerca de 3 cm (cuando un objeto distante es visto). De esta manera, el ancho lateral de la imagen debido a un punto distante es (aproximadamente) $f(\lambda/D) = 3 \times 5 \times 10^{-5}/0,2 = 8$ micrones. De hecho, podemos admitir que el límite de difracción implica que los fotorreflectores en el centro de la retina (los llamados conos) están separados por no más de 8 micrones.

Un astronauta en órbita a una altura de cerca de 150 millas dijo en cierta ocasión que podía individualizar las casas de las ciudades mientras pasaban debajo de él. ¿Podemos dar crédito a esto?

Nomenclatura: Difracción de Fraunhofer y Fresnel. En nuestra consideración del tipo de difracción producido por una ranura o abertura simple, supusimos que teníamos una onda plana incidente (desde una fuente puntual distante de E). También supusimos que detectábamos la radiación emitida desde la ranura a un *ángulo* dado. Significa que considerábamos una superposición de ondas viajando paralelamente entre sí al punto de detección P , y que P está muy lejos de la ranura o que si usamos una lente (por ejemplo la lente del ojo) para enfocar las ondas en P (por ejemplo, sobre la retina). La difracción conservada bajo estas dos condiciones, onda plana incidente y onda difractada emitida en una dirección dada, se llama *difracción de Fraunhofer*. Si no se usan lentes, la fuente puntual S y la detectora P deben estar cada una en la zona ale-

jada de la ranura. Para determinar si S (por ejemplo) está en la zona alejada, imagine que pasamos un plano a través de la ranura, así el plano queda orientado perpendicularmente a la línea de visión desde S al centro de la ranura. Consideremos el cono sólido de todas las líneas rectas desde S que pasan a través de todas las partes del área de la ranura. Si estas líneas intersectan todas al plano “aproximadamente a la misma” distancia de S , entonces S está en la zona alejada de la ranura. “Prácticamente la misma” distancia significa mucho menor que una semilongitud de onda. En ese caso la radiación desde S será prácticamente idéntica a una onda plana. Un criterio análogo se mantiene para el punto de detección P .

No es difícil mostrar que para una ranura de ancho D un punto a distancia L está en la zona lejana con tal que

$$L\lambda \gg (\frac{1}{2}D \cos \theta)^2,$$

donde $\frac{1}{2}D \cos \theta$ es la proyección de la mitad del ancho de ranura, como proyección perpendicular a la línea de la ranura al punto. Si una u otra de estas dos condiciones no se satisface, es decir, si la fuente puntual S o de detección P no están en la zona lejana de la ranura, entonces tenemos la llamada *difracción de Fresnel* (para la cual no entraremos en detalle).

Análisis de Fourier del espacio transversal dependiente de una fuente coherente. Las formas de la ecuación (63) pueden ser puestas en una forma diferente muy interesante. Imaginemos una simple componente de frecuencia de la onda viajera. Podemos tomarla exactamente monocromática. Entonces el ancho de banda $\Delta\omega$ es cero. ¿Qué podemos decir sobre el vector de propagación? El cuadrado del vector de propagación, k^2 , es igual a ω^2/c^2 (para luz en el vacío). Por lo tanto, k^2 debe tener un valor perfectamente definido si ω^2 lo tiene. Pero esto no significa que cada componente de \mathbf{k} deba tener un valor definido. Ahora, k^2 , es la suma de los cuadrados de sus componentes:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (64)$$

donde k_x da el número en radianes de fase por unidad de distancia a lo largo de \hat{x} , k_y da radianes de fase por unidad de distancia a lo largo de \hat{y} , y k_z da radianes de fase por unidad de distancia a lo largo de \hat{z} . Si el haz fuese una onda plana real desplazándose a lo largo de $+z$ en lugar de un haz de difracción limitada, entonces k_x y k_y serían cero. Para una componente de Fourier del haz de difracción limitada que está fijando según un vector de propagación en el plano xz y con un ángulo pequeño θ respecto del eje z , tenemos $k_y = 0$; $k_x = k \sin \theta$; $k_z = k \cos \theta$.

Para ángulos pequeños θ , podemos aproximar $\sin \theta$ y $\cos \theta$ por 1. Entonces tenemos para la componente x

$$k_x \approx k\theta. \quad (65)$$

Pero ya hemos visto que el haz tiene una amplitud angular alrededor de la dirección dominante z dada por

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (66)$$

Así la amplitud en k_x está dada por [combinando las ecuaciones (65) y (66)]

$$\Delta k_x \approx k \Delta\theta \approx k \frac{\lambda}{D} = \frac{2\pi}{D},$$

o poniendo Δx para el ancho completo D del haz en la dirección x , tenemos

$$\boxed{\Delta k_x \Delta x \geq 2\pi.} \quad (67)$$

(La desigualdad nos recuerda que la difracción límite es solamente conseguida o lograda si las fuentes son coherentes y todas en fase.)

En forma más explícita. De acuerdo con nuestra construcción de Huygens, tenemos una placa radiante consistente en fuentes distribuidas uniformemente a lo largo de x desde (digamos) $x = -\frac{1}{2}D$ a $x = +\frac{1}{2}D$. Todas las fuentes tienen la misma energía y constante de fase. Una representación de una fuente de potencia $f(x)$ en función de x para $x = -\infty$ a $x = +\infty$ da cero excepto en la región de ancho D centrado al origen. Por lo tanto, en una "onda cuadrada" en x . Podríamos analizarlo en serie de Fourier en términos de una superposición de funciones sinusoidales dependiente del espacio $\sin k_x x$ y $\cos k_x x$ de la misma forma que analizamos en serie de Fourier un pulso cuadrado en función de $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$. Ahora en la ecuación (6.95), Sección 6.4 encontramos que la transformación de Fourier de una pulsación cuadrada en función del tiempo $f(t)$ con una altura $1/\Delta t$ y anchura Δt está dado por

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2}\omega \Delta t}{\frac{1}{2}\omega \Delta t}. \quad (68)$$

Por analogía, una pulsación cuadrada $f(x)$ en x de ancho D y altura $1/D$ debería transformarse en una Fourier

$$B(k_x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2} k_x D}{\frac{1}{2} k_x D}. \quad (69)$$

Pero

$$k_x D = k D \sin \theta = \Phi. \quad (70)$$

Por lo tanto,

$$B(k_x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\frac{1}{2} \Phi}. \quad (71)$$

Por comparación de las ecuaciones (71) y (60) vemos que la amplitud del campo detectado a un ángulo θ (dado por k_x) es (dejando de lado la constante de proporcionalidad) la transformación de Fourier de la fuente en la ranura (la onda cuadrada). En la ranura, la amplitud de oscilación es $f(x) \cos \omega t$ donde $f(x)$ es la fuente energética (aquí una constante sobre la abertura de la ranura). A una distancia r y dirección θ , la onda viajera es obtenida reemplazando $\cos \omega t$ por $\cos(\omega t - kr)$ y reemplazando $f(x)$ por su transformación de Fourier $B(k_x)$. La otra dimensión transversal del haz, y , satisface la relación como la ecuación (67), pero con x en lugar de y .

Resultados importantes del análisis de Fourier. Recordando resultados previos para el análisis de Fourier en función de la componente longitudinal del vector de onda, k_z , y para el análisis de Fourier en función de la frecuencia, podemos resumir todos los resultados de los análisis de Fourier en

$$\begin{aligned} \Delta k_x \Delta x &\geq 2\pi \\ \Delta k_y \Delta y &\geq 2\pi \\ \Delta k_z \Delta z &\geq 2\pi \\ \Delta \omega \Delta t &\geq 2\pi. \end{aligned} \quad (72)$$

El análisis de Fourier provee de una técnica poderosa para calcular tipos de difracción. Sin embargo, no proseguiremos aquí con ese tema (véase Prob. 9.59).

Configuración de difracción por dos ranuras anchas. Haga una doble ranura. (Un buen método es hacer una tira con papel de aluminio casero sobre un "slide" o marquito para fotografías microscópico para que quede lisamente estirado y tenso sobre el "slide". Con una hoja de afeitar efectuemos un corte en la laminilla guiándonos con el borde recto de otro marquito o "slide". La segunda ranura deberá estar tan cerca como sea posible sin destruir la primera — un espaciamento de 1/2 mm es fácil de lograr.) Mire hacia la fuente con y sin el filtro de gelatina roja manteniendo la ranura acerada frente a un ojo. Las escasamente espaciadas "franjas de interferencia" corresponden a la configuración de interferencia de ranura doble. Siendo así tienen una separación angular

λ/d radianes (usando la aproximación de ángulo pequeño $\sin \theta = \theta$). Sobre el mismo "slide" efectúe una ranura simple del mismo ancho que las anteriores (es decir, utilizando la misma hoja de afeitar y el mismo tipo de pasada o simplemente haciendo una de las dos ranuras originales más larga que la otra). Compare las configuraciones de ranura doble y simple. Observe que *la configuración de ranura doble es modulada por la de ranura simple*. (Véase Fig. 9.15.) De hecho resulta más bien difícil ver cualquiera de las configuraciones de ranura doble excepto dentro del máximo central de la modulación de ranura simple. (Si usa filtro rojo y tiene una buena doble ranura, puede salir bien.)

He aquí la razón de la apariencia de la configuración. Cada ranura entrega un campo magnético al detector (la retina) que tiene cierta amplitud y constante de fase. La constante de fase de la contribución debida a una ranura íntegra es la misma que aquella procedente de la contribución diferencial (la "antena") al centro de la ranura. Esto se debe a que la onda tiene el factor $\cos(kr - \omega t)$, donde r , es la distancia del centro de la ranura al detector. [Véase ecuaciones (60) y (53), Sec. 9.6.] La amplitud es proporcional al $\sin \frac{1}{2} \Phi / \frac{1}{2} \Phi$, donde Φ es la diferencia de fase de las contribuciones o aportes de los bordes opuestos de la ranura.

Cuando hay dos ranuras separadas por una distancia d , cada ranura da una contribución que, en lo que a fase se refiere, es la misma que aquella que se obtendría de una ranura estrecha situada en el centro de la ranura real. En lo que a amplitud se refiere, está el factor $\sin \frac{1}{2} \Phi / \frac{1}{2} \Phi$. De esta manera la configuración es justamente la de una

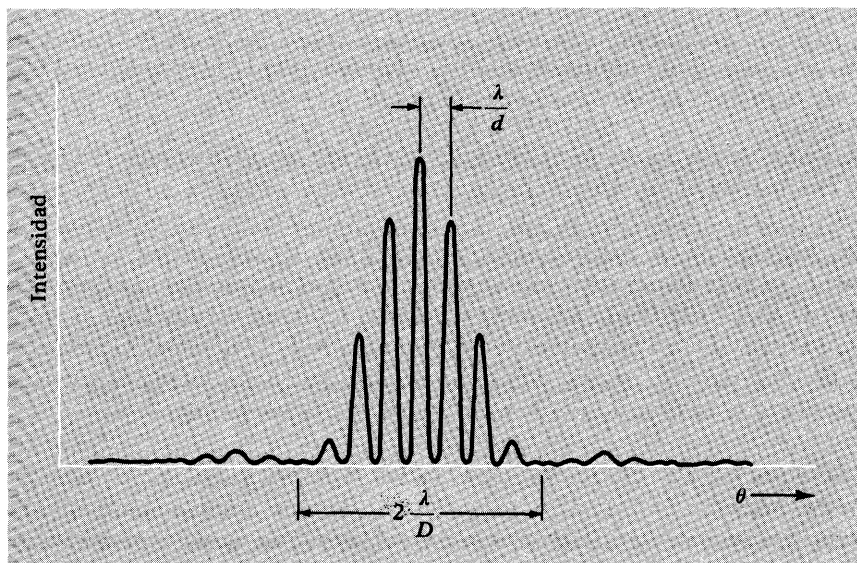


Fig. 9.15 Configuración de ranura doble. La separación entre ranuras d es cuatro veces el ancho D de cada ranura en este ejemplo. Las expresiones para la separación angular λ/d y para el ancho íntegro entre modulaciones cero, $2\lambda/D$ utilizan la aproximación de ángulo pequeño $\sin \theta = \theta$.

ranura doble hallada previamente, excepto la de amplitud constante $A(r)$ de cada ranura, que es ahora reemplazada por la constante $\sin \frac{1}{2} \Phi / \frac{1}{2} \Phi$. En otras palabras, la configuración de ranura doble que se obtendrá de dos ranuras infinitamente estrechas es *modulada* al ser multiplicada por $\sin \frac{1}{2} \Phi / \frac{1}{2} \Phi$. Combinando los resultados obtenidos para configuración de ranura doble [ec. (13), Sec. 9.2] con el factor de modulación, encontramos que si dos ranuras son excitadas con la misma fase, la configuración de radiación está dada por

$$E(\theta, t) = A(\theta) \cos(kr - \omega t), \quad (73)$$

$$A(\theta) = A(0) \cdot \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\frac{1}{2} \Phi} \right] \cos \frac{1}{2} \Delta \varphi, \quad (74)$$

$$\Phi = kD \sin \theta = 2\pi \frac{D \sin \theta}{\lambda}, \quad (75)$$

$$\Delta \varphi = kd \sin \theta = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}, \quad (76)$$

donde D es el ancho de ranura de cada ranura, d es la separación entre ranuras (de centro a centro), y r es la distancia desde el punto de observación P a un punto intermedio entre los centros de las dos ranuras. Si D tiende a cero, entonces el máximo central “cubre íntegro el campo visual”, y obtenemos el resultado de la Sección 9.2 para ranuras angostas.

La configuración de intensidad $I(\theta)$ es proporcional al promedio de tiempo del cuadrado del campo eléctrico, es decir, según las ecuaciones (73) y (74)

$$I(\theta) = I(0) \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\frac{1}{2} \Phi} \right]^2 \left(\cos^2 \frac{1}{2} \Delta \varphi \right). \quad (77)$$

El factor $\cos^2 \frac{1}{2} \Delta \varphi$ da la rapidez de variación angular característica de la configuración de ranura doble, con máxima separada en ángulo por λ/d . El factor $(\sin \frac{1}{2} \Phi / \frac{1}{2} \Phi)^2$ da la modulación de ranura simple, con ancho angular pleno aproximadamente a mitad de intensidad de λ/D , o ancho angular pleno entre ceros sobre uno u otro lazo del máximo central de $2\lambda/D$. Contando las franjas debidas a “doble ranura” en el máximo central de la “modulación de ranura simple”, se puede estimar el radio d/D para la ranura doble. La configuración de intensidad correspondiente a la ecuación (77) está representada en la Fig. 9.15.

Configuración de difracción para varias ranuras paralelas e idénticamente anchas. Del estudio para el caso de dos ranuras anchas, parecería aparentemente fácil obtener la configuración para varias ranuras idénticamente anchas suponiendo primero que las ranuras son estrechas

y luego multiplicar el resultado por el factor de amplitud para ranura simple $\frac{1}{2} \Phi / \frac{1}{2} \Phi$.

Configuración de interferencia de ranuras múltiples. Consideremos cómo la configuración de interferencia para las N antenas de la Fig. 9.13 dependen de N . (Podríamos haber considerado N ranuras angostas como N antenas.) La amplitud para N ranuras estrechas está dada por la ecuación (54), la cual reescribimos

$$E(r, \theta, t) = A(r, \theta) \cos(kr - \omega t), \quad (78)$$

$$A(r, \theta) = A(r) \frac{\sin \frac{1}{2} N \Delta\varphi}{\sin \frac{1}{2} \Delta\varphi}, \quad (79)$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}. \quad (80)$$

Máximo principal, máximo central, fuente de luz blanca. Los ángulos para los cuales el denominador (y numerador) de la ecuación (79) tiende a cero están dados por $\frac{1}{2} \Delta\varphi = 0; \pm\pi; \pm 2\pi$, etc. Éstos son los ángulos para los cuales la longitud de trayectoria incrementada $d \sin \theta$ es cero, $\pm\lambda$, etc., correspondiendo a interferencia completamente constructiva entre todas las N antenas. Éstas se llaman *máximo principal*:

$$d \sin \theta = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots, m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (81)$$

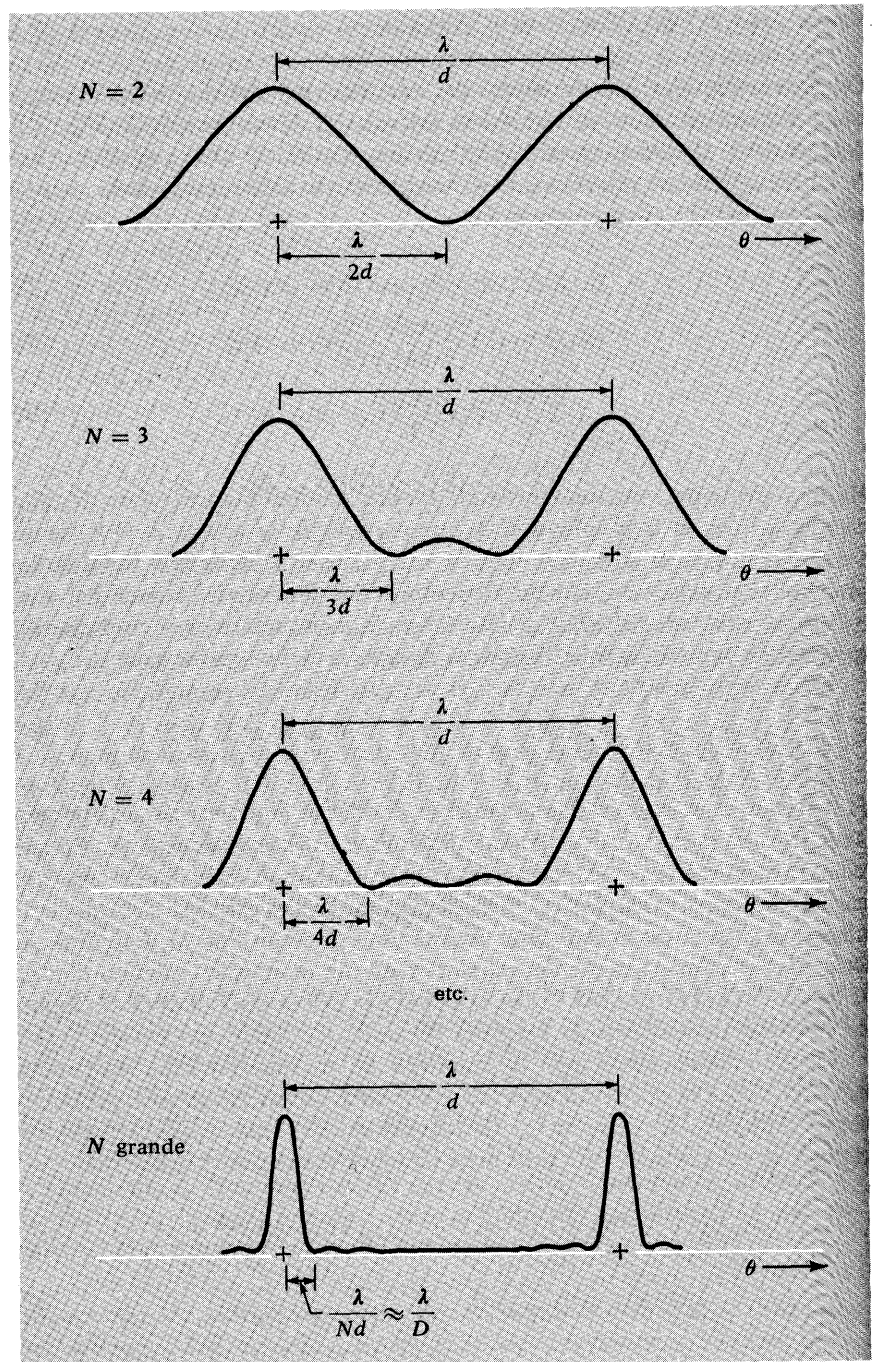
El máximo en $\theta = 0$ se llama *máximo central* o *máximo de orden cero*. Aquellos con $m = \pm 1$ se llaman *máximo de primer orden*, etc. El máximo central difiere de todos los otros máximos principales en una importante consideración, la cual es que todas las ranuras aportan contribuciones que están en fase *independientemente de la longitud de onda*. De esta forma, *para un manantial de luz blanca, el máximo central es blanco*. Para todo otro máximo principal excepto el central, el ángulo del máximo depende de la longitud de onda, es decir, del color.

En un máximo principal, la amplitud de la superposición es exactamente N veces la amplitud aportada por cada ranura. Esto es físicamente obvio. También se observa de la ecuación (79) que: para el máximo central, tomemos $\Delta\varphi = 0$. Entonces usamos (tomando $1/2 \Delta\varphi = x$)

$$\begin{aligned} \frac{\sin Nx}{\sin x} &= \frac{Nx - \frac{1}{6}(Nx)^3 + \dots}{x - \frac{1}{6}x^3 + \dots} = N \frac{[1 - \frac{1}{6}(Nx)^2 + \dots]}{[1 - \frac{1}{6}x^2 + \dots]} \\ &= N \quad \text{para } x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (82)$$

Para el máximo de primer orden con $m = +1$, podemos mostrar que el límite para x tendiendo de cero a π de $\sin Nx / \sin x$ es $\pm N$. Para ha-

Fig. 9.16 Configuración de interferencia por ranura múltiple. Se muestran dos máximos principales. Los ángulos se suponen pequeños, así $\sin \theta = \theta$. Para N grande, cada máximo principal tiene la forma de configuración de ranura simple mostrada en la Fig. 9.14b.



cerlo, desarrollamos en términos del ángulo pequeño ϵ por el cual x difiere de π en:

$$\begin{aligned} x &= \pi - \epsilon \\ \frac{\text{sen } Nx}{\text{sen } x} &= \frac{\text{sen}(N\pi - N\epsilon)}{\text{sen}(\pi - \epsilon)} = (-1)^{N+1} \frac{\text{sen } N\epsilon}{\text{sen } \epsilon}. \end{aligned} \quad (83)$$

Para ϵ tendiendo a cero obtenemos $(-1)^{N+1} N = \pm N$

Anchura angular de un máximo principal. A medida que N aumenta, los anchos angulares del máximo principal decrecen. El semiancho angular desde un máximo principal al primer cero sobre un lado u otro del máximo está dado por la ecuación (79). En un máximo principal, el numerador y denominador se hacen cero. Cuando el argumento $\frac{1}{2} N\Delta\phi$ de la función sinusoidal en el numerador de la ecuación (79) se incrementa en π , el numerador es nuevamente cero. (El denominador no es entonces cero.) De esta manera, *el incremento de fase $\Delta\phi$ aumenta en $2\pi/N$ pasando desde un máximo principal al primer cero adyacente de amplitud.* Eso significa la longitud de trayectoria incrementada $d \text{ sen } \theta$ aumenta en λ/N pasando desde un máximo principal al primer cero adyacente de amplitud. Ahora, la longitud de trayectoria incrementada entre dos máximos principales sucesivos es λ . De esta forma, vemos que *la amplitud cae de máximo a cero en un intervalo en $\text{sen } \theta$ que es N veces más angosto que el intervalo λ/d en $\text{sen } \theta$ entre máximos principales sucesivos.*

Para N grande o para N par (según sea grande o pequeño) es fácil ver por qué el primer cero (próximo a un máximo principal) tiene lugar cuando la longitud de trayectoria incrementada $d \text{ sen } \theta$ es λ/N . Supongamos que hay 6 antenas. El primer cero tiene lugar cuando las tres primeras pueden ser apareadas con las últimas tres en "pares cancelantes", con 1 cancelado o anulado por 4, 2 por 5 y 3 por 6. La anulación tiene lugar cuando las antenas 1 y 4 tienen una diferencia de trayectoria $\frac{1}{2} \lambda$ (y en forma similar para los otros pares). Entonces 1 y 2 tienen una diferencia de trayectoria $\lambda/6$, la cual es λ/N . Cuando N es impar este argumento no puede aplicarse pues las antenas no pueden aparearse. En este caso la manera más fácil de obtener este resultado "visual" más que algebraico es hacer un diagrama vectorial en el plano complejo de los aportes de amplitud. Entonces es fácil ver que las N amplitudes complejas se unen para formar un polígono cerrado, para dar amplitud cero cuando $\Delta\phi$ es $2\pi/N$. (Prob. 9.52.) En la Fig. 9.16 se muestra cómo la configuración de interferencia depende de N cuando la separación entre ranuras d se mantiene fija.

Se puede demostrar la angostura del máximo principal cuando N aumenta de 2 a 3 como sigue: con una hoja de afeitar haga 3 ranuras en una hoja de papel de aluminio fijada en un marquito. Haga dos ranuras

más largas que la tercera para poder pasar así la ranura doble a ranura triple mediante un leve corrimiento frente a un ojo. Luego de media docena de intentos puede lograr obtener tres ranuras apropiadas con una separación aproximada de $\frac{1}{2}$ mm. (Luego de cada intento, sostenga la hoja ranurada frente a una fuente luminosa. Una lente barata de $\times 2$ o $\times 3$ ayudará mucho.) Cuando mire a la fuente luminosa mediante dos ranuras, las franjas brillantes se verán algo más anchas que las regiones opacas que separan las franjas. Cuando mire a través de la ranura triple, las regiones brillantes se verán más angostas que las regiones opacas. Por supuesto, si las ranuras no están debidamente espaciadas obtendrá configuraciones de las que no hablaremos por ahora.

Red de difracción de transmisión. En lugar de N antenas o N ranuras en una pantalla opaca, podemos tener N estrías paralelas sobre un trozo de vidrio o plástico liso de ancho D . Si no hubiese estrías, la luz daría una configuración de difracción correspondiente a una sola ranura ancha de espesor D . Las estrías equivalen a “antenas”. Ellas dan una configuración de interferencia para N estrías, la cual es aquella que obtuvimos para N ranuras, con una excepción. En el máximo central (a 0°) obtenemos contribuciones no solamente desde las estrías, sino también desde todo material transparente entre las estrías. Por lo tanto, anticipamos un máximo central considerablemente más brillante que los otros máximos principales.

Una fuente lineal de luz monocromática vista a través de una red de difracción tiene en cada máximo principal un contorno de intensidad (hágase un gráfico de la intensidad en función del ángulo), como el de configuración de una sola ranura en la Fig. 9.14*b*.

La red de difracción en el aparato óptico tiene el mismo trazo —13 400 estrías por pulgada, lo cual da $d = 1,90 \times 10^{-4}$ cm, es decir, 1,9 micrones. Para luz verde con una longitud de onda aproximadamente 5500 Å, esto es, 0,55 micrones, ¿cuántos máximos principales espera encontrar? Según la ecuación (81) el máximo principal tiene lugar a valores de $\sin \theta$ de 0, λ/d , etc. Por supuesto, $\sin \theta$ no puede ser mayor que 1. Para nuestra red tenemos $d \approx 3,5 \lambda$ cuando $\lambda = 0,55 \mu$. Por lo tanto, si $\sin \theta = m\lambda/d$ podemos tener $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, pero no ± 4 . Mire hacia una lámparita encendida con su red. La bombilla “directamente al frente” es el máximo central. Todos los colores se superponen en $\theta = 0$. Las rayas de colores al costado son imágenes de la lámparita de varios colores correspondiendo los ángulos a $d \sin \theta = \lambda$ para primer orden, 2λ para segundo orden, etc. ¿Podemos ver los tres órdenes? (Si vemos cuatro, algo anda mal.) Si se desea ver los colores de una lámparita incandescente como son realmente, no hay que usar una de tamaño grande porque éste produce superposición de varias “lámparitas coloreadas”. Marque una ranura vertical angosta sobre la lámparita (y sostenga la red desparramando así los colores horizontalmente) o mejor, consiga

una lámpara de proyección en algún comercio. (Ésta posee una envoltura de vidrio claro y filamento recto de casi tres pulgadas.)

Se puede medir d en su red muy fácilmente, dado que la luz verde (por ejemplo) tiene una longitud de onda de 5500 Å. Mire una lamparita y mida el ángulo en radianes (o su seno o tangente) desde el máximo central al “verde”, usando la mano o el brazo o una regla mantenida a un brazo de distancia con la red próxima y frente a un ojo. Luego utilice la ecuación (81). ¿Se obtuvo $d \approx 3,5\lambda$? Para experimentos sobre las propiedades de la red, véase Experimentos caseros.

Difracción por un obstáculo opaco. En la Fig. 9.12 mostramos un punto origen S y una pantalla opaca consistente de partes a , b y l . El campo (cero) detrás de la pantalla era considerado como la superposición $E_s + E_a + E_b + E_l = 0$. Cuando el obstáculo o tapón l era eliminado, el campo $E_s + E_a + E_b$ era tomado como si fuera el mismo que antes de remover el obstáculo, es decir, igual a $-E_l$ (antes de ser removido el obstáculo). Esto daba el método de construcción de Huygens para hallar la configuración de difracción desde la pantalla con el tapón u obstáculo l eliminado, es decir, desde una pantalla con una abertura que tiene la forma del obstáculo. Ahora deseamos considerar qué sucede si dejamos el obstáculo en su lugar y eliminamos el resto de la pantalla. Esto dará la configuración de difracción de un obstáculo opaco.

Antes de remover cualquier cosa, tenemos $E_s + E_a + E_b + E_l = 0$. Removamos a y b y supongamos que los movimientos de los electrones en el tapón u obstáculo l (el obstáculo opaco) son invariables. (Esto es una aproximación, dado que estos electrones están influidos por los electrones en a y b , como así también por la radiación desde S .) El campo detrás del obstáculo es entonces $E_s + E_l$. En la región cercana posterior al obstáculo (“cerca” será definido luego), el campo deberá ser esencialmente lo que era cuando la pantalla completa estaba presente, porque las regiones a y b estaban entonces unidas más que alejadas (comparado con el obstáculo l) y aportaban contribuciones pequeñas comparadas con $E_s + E_l$. Por lo tanto, la región cercana posterior al obstáculo deberá tener campo eléctrico esencialmente cero. Ésta es la “sombra” del obstáculo. Está provocado por el hecho de que un punto cercano posterior a la pantalla (que es cero) es debido esencialmente a S y a las cargas vecinas, que en este caso son las del obstáculo l . Así, en la proximidad, detrás de la pantalla, el caso E_l se superpone con E_s para dar cero. Por lo tanto, el obstáculo l está emitiendo una “parte de una onda plana” en la misma dirección que la onda plana incidente desde la fuente distante S , con amplitud igual a aquella onda plana de S , y con una constante de fase 180 grados fuera de fase con la onda plana para anular y dar cero en la superposición $E_s + E_l$. Ésta es la forma en que se produce la sombra. El obstáculo opaco no “absorbe” la luz incidente; irradia un haz de luz de “am-

plitud negativa" (es decir, negativa respecto a la luz incidente) hacia adelante que interactúa con la onda incidente para dar cero en la proximidad por detrás del obstáculo.

¿Cuánto se esparce una sombra? El obstáculo no emite una onda plana verdadera de luz "de amplitud negativa" porque tiene un ancho finito (o diámetro) D . En su lugar, emite un haz, con la misma dirección que la onda plana E_s , pero con una difracción angular limitada esparcida en su dirección con un ancho angular pleno $\Delta\theta \approx \lambda/D$. Mientras tanto, este haz ha viajado una distancia L desde la pantalla (el obstáculo), se ha esparcido lateralmente en una magnitud W dada aproximadamente por $W \approx L\Delta\theta \approx L(\lambda/D)$. Según el haz se esparce, su amplitud disminuye. (Cada carga puntual en el obstáculo aporta una contribución que disminuye con el inverso de la distancia. También, consideremos el obstáculo por sí mismo; mientras su energía irradiada se dispersa sobre una gran superficie, su amplitud en cualquier punto tendrá que decrecer.) Solamente cuando la amplitud de su campo eléctrico es igual en magnitud (y de signo contrario) a la onda plana E_s puede anular E_s a cero. De esta forma, la sombra desaparece eventualmente a una distancia suficiente. En grandes rasgos podemos decir que la luz de amplitud negativa emitida por el obstáculo es sensiblemente debilitada cuando la dispersión de difracción ha duplicado su anchura. Eso nos da una "distancia límite" aproximada L_0 , a la cual $D \approx W_0$. Pero como $W_0 \approx L_0(\lambda/D)$, tenemos

$$L_0\lambda \approx D^2. \quad (84)$$

Así, para $L \ll L_0$, esperamos tener una buena sombra oscura detrás del obstáculo excepto cerca de los bordes (donde la suposición de que E_s es invariable cuando a y b son eliminados, pierde sentido). Para $L \gg L_0$, esperamos que será totalmente difícil detectar el efecto del obstáculo, pues la contribución de su campo eléctrico es entonces pequeña comparada con la onda plana E_s . A fin de detectarlo fácilmente, puede hacer uso de lentes. La onda plana E_s se concentrará en un pequeño punto del plano focal. El tamaño del punto está dado por $f\lambda/D_{\text{lente}}$, donde D_{lente} es el diámetro de la lente y f la distancia focal, la luz de amplitud negativa desde el obstáculo da una imagen de anchura $f\lambda/D$. Si D_{lente} es mucho mayor que el tamaño del obstáculo D , entonces el punto brillante debido a la onda plana oscurece sólo una pequeña región en el centro de la imagen.

Se pueden estudiar las configuraciones de difracción de obstáculos usando un flash como fuente luminosa y alfileres y cabellos por obstáculos. Uno de los resultados sorprendentes es el "punto o lugar brillante" que se ve en el centro de la sombra cuando se encuentra a distancias $L \gg L_0$. Véase experimento casero 9.34.

La ecuación (84) puede ser ensayada con otro tipo de ondas que las luminosas. Puede ensayarla colocando un obstáculo en la trayectoria de un haz de onda viajera en el agua de una pila. La "sombra" está bien definida para $L \ll L_0$ e indefinida para $L \gg L_0$. Véase Experimento casero 9.29.

9.7 Óptica geométrica

El nombre "óptica geométrica" se refiere al estudio de cómo los haces luminosos se comportan en instrumentos ópticos (los cuales consisten de varias superficies reflectantes y refractantes) en la aproximación de considerar solamente las direcciones principales sin tener en cuenta las dispersiones debidas a la difracción. (El nombre "óptica física" es a veces utilizado para explicar fenómenos en los cuales se toman en cuenta la naturaleza ondulatoria de la luz y que incluye, por tanto, interferencia y difracción.) Las leyes básicas de la óptica geométrica son *la ley de reflexión* y *la ley de refracción de Snell*. Por supuesto, ambas leyes se deben realmente a la naturaleza ondulatoria de la luz; cada una resulta de una interferencia constructiva particular.

Reflexión especular. Toda vez que una onda plana incide sobre una superficie lisa, tiene lugar una reflexión; esto es (a) existe un rayo reflejado que pertenece al plano de incidencia (plano que contiene el rayo incidente y a la normal a la superficie), y (b) el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia (ambos medidos respecto de la normal).

La reflexión sobre superficie plana se debe a interferencia constructiva. Los electrones en el material están influidos por la onda incidente. Ellos re-irradian. El rayo reflejado en superficie plana, es la dirección de un máximo de interferencia constructiva.

Podemos comprender esto fácilmente considerando nuestra conocida formación lineal de antenas. Permitamos que las corrientes de antena sean influidas por el campo eléctrico de una onda plana incidente según un plano no normal, como se muestra en Fig. 9.17.

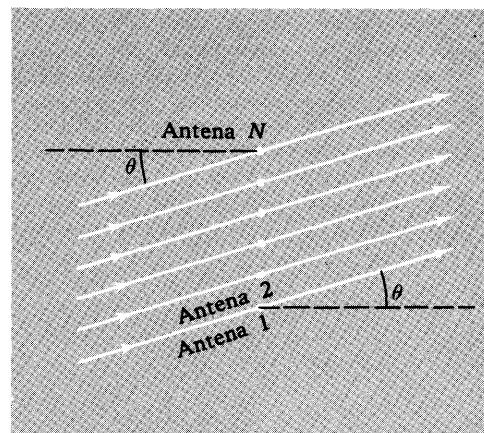


Fig. 9.17 Formación de antenas influidas por una onda plana a una distancia no normal. La línea de puntos es la normal al plano de las antenas. Las flechas indican la dirección de propagación. El ángulo de incidencia es θ .

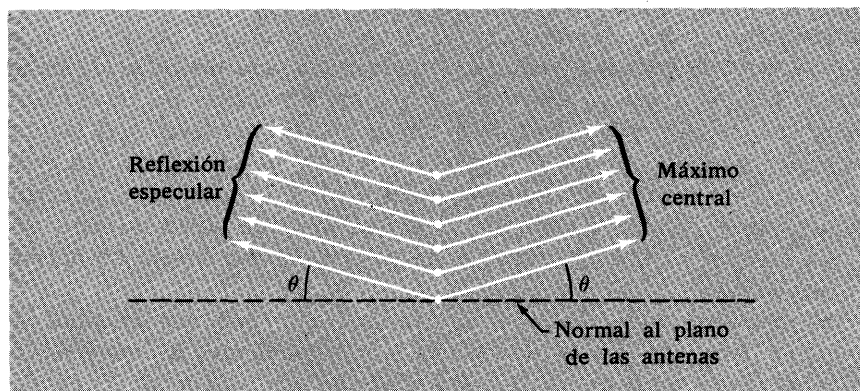


Fig. 9.18 Direcciones de máxima interferencia de antenas influidas con relaciones de fase de la Fig. 9.17.

Examinemos el campo de radiación distante debido a las corrientes de antena solamente. Primero consideremos el máximo central de interferencia. Es fácil ver que esto tiene lugar en la dirección de propagación del rayo incidente; la antena 1 es excitada antes que la 2 (en fase) y, por lo tanto, irradia antes que la 2 en igualdad de magnitud. A un punto lejano P la radiación procedente de las antenas 1 hasta N estarán exactamente en fase si la dirección de propagación de la irradiación de antena es la misma que la dirección de propagación incidente; un cierto pico de onda proveniente de la antena 1 tiene que viajar mayor distancia que un pico de antena N , pero partió antes exactamente en esa magnitud.

Es obvio de la simetría de la formación de antenas, que las excitadas como en la Fig. 9.17 no formarán sólo el máximo central de interferencia “a la derecha” (en la figura), sino también un máximo correspondiente “a la izquierda”. Esta “imagen” máxima es la radiación reflejada. Vemos en la Fig. 9.18 que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. La reflexión sobre cualquier superficie plana se debe a interferencia constructiva actuando de forma completamente análoga que para antenas escasamente espaciadas.

Reflexión no especular. El máximo central y la reflexión especular máxima no son los únicos máximos producidos por la formación de antenas mostrada en las Figs. 9.17 y 9.18. Además de estos máximos de orden “cero” para transmisión y reflexión, hay también máximo para aquellas direcciones para la cual la diferencia de trayectoria desde antenas adyacentes al detector es mayor (o menor) en un número entero de longitudes de onda, que la diferencia para un máximo de orden cero. La configuración de interferencia para ondas transmitidas (propagándose hacia la derecha en la Fig. 9.18) es simplemente la de una red de difracción de N rendijas, con luz incidente no normal. La configuración de interferencia para las ondas reflejadas es similar a la de ondas transmitidas, por supuesto, excepto las reflejadas de orden cero (reflexión especular), no es posible que sea tan brillante como en las transmitidas de orden cero (máximo central). Se puede verificar la existencia de la configuración de interferencia para luz reflejada desde una formación regular, utilizando la red de difracción de transmisión como una *red de reflexión*, es decir, sosteniendo el artefacto óptico antes utilizado, cerca de un ojo y mirando el reflejo de una fuente luminosa puntual. La reflexión de orden cero (especular) es fácilmente identificada, pues es “blanca”. Las reflexiones máximas de orden no cero son similares a la máxima de transmisión, para el mismo ángulo no normal de incidencia.

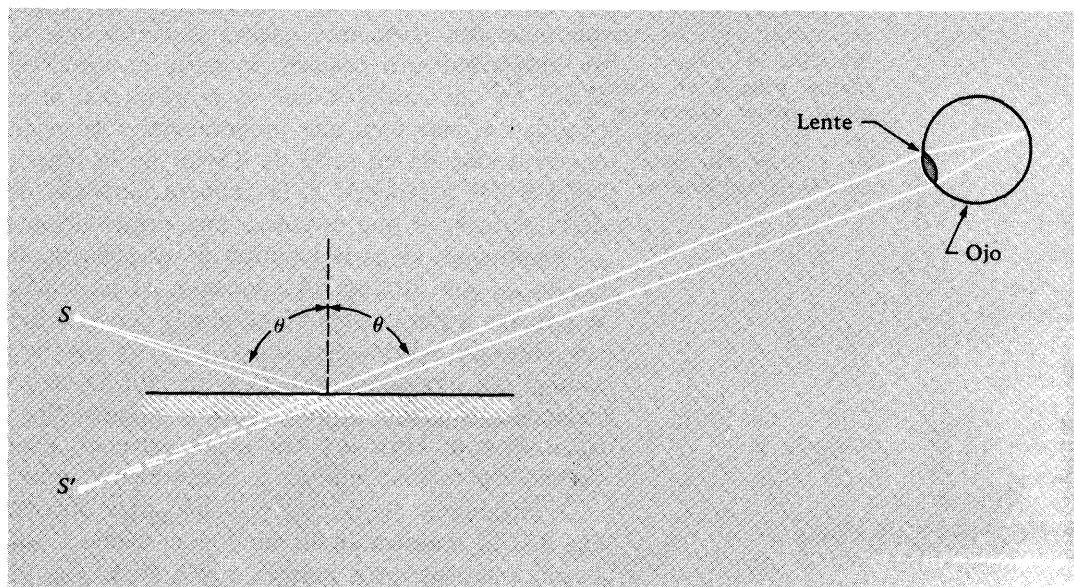
Si el espacio entre antenas vecinas es menor que una longitud de onda, entonces las únicas direcciones correspondientes a interferencia completamente constructiva son las máximas de orden cero, es de-

cir, las correspondientes al máximo central y a reflexión especular. Cuando estudiamos óptica geométrica e instrumentos ópticos, considerábamos generalmente luz visible incidente sobre superficies de vidrio o metálicas. Las “antenas” son átomos en la superficie y están espaciadas alrededor de 10^{-8} cm. Para luz visible de longitud de onda de 5×10^{-5} cm, por lo tanto, podemos obtener solamente máximos de orden cero. (Para rayos X de longitud de onda mayor que 10^{-8} cm, reflejados desde la superficie de un simple cristal, se obtienen máximos de orden mayor.) Debido a que consideraremos instrumentos ópticos para luz visible, supondremos de ahora en adelante que tenemos sólo reflexión especular.

Imagen de una fuente puntual en un espejo — fuente virtual y real.

Las superficies de fase constante para radiación desde una fuente puntual son esferas. Una región suficientemente pequeña sobre una de estas esferas puede ser aproximada por un plano, y podemos llamar a la onda (casi) plana de radiación que pasa a través de esta pequeña región, un *rayo*. En Fig. 9.19 vemos una fuente puntual S vista por medio de un espejo. La radiación que entra por la pupila (lente) del ojo puede considerarse como un “manejo de rayos”. Dos de éstos están dibujados en la Fig. 9.19. Cada rayo es reflejado desde el espejo. La fuente S' se llama *virtual* porque no existe realmente esa fuente en S' . (La fuente S se llama *real*.)

Fig. 9.19 Imagen virtual puntual S' de un punto real en un espejo plano.



Refracción —ley de Snell— principio de Fermat. Hemos dado dos aplicaciones para la ley de Snell. Una utiliza una sencilla construcción geométrica (Sec. 4.3). La otra utiliza el hecho de que el número de crestas de onda por unidad de longitud a lo largo del límite es el mismo sobre cualquier lado de este límite. (Sec. 7.2). Ambas aplicaciones hacen uso de ondas planas. Dado que en óptica geométrica se utilizan siempre rayos, es decir, haces angostos de luz, más que ondas planas, daremos una onda plana. La difusión del haz debido a la difracción no nos concierne y por lo tanto no la tendremos en cuenta.

Primero considere un haz que se propaga en un trozo homogéneo de vidrio de índice n , como se muestra esquemáticamente en la Fig. 9.20. Considere un átomo a , en medio del haz. Está influido por el haz. Irradia en todos sentidos. Su radiación contribuye a influir en los átomos b , c y d . Sus radiaciones se superponen para influir en el átomo e (que también se encuentra en medio del haz). Pero el haz es el resultado de interferencia constructiva. Esto significa que para b y d resultados suficientemente cerca, a ambos lados de c , los otros átomos b , c y d contribuyen con la misma fase en e , debido a haber sido todos influidos por a . En otras palabras, los tiempos para ondas que viajan a la velocidad de fase c/n desde a hacia b hasta e , de a hacia c , hasta e y a hacia d hasta e deben ser todos iguales si a , c y e están todos a lo largo de la trayectoria del rayo, y si b y d están suficientemente cerca de c . Si ése no fuese el caso, la radiación desde diferentes átomos no estaría superpuesta para mantener un haz por interferencia constructiva.

Ahora se ve de la Fig. 9.20 que si a , c y e están a lo largo del rayo, entonces las trayectorias vecinas \overline{abe} y \overline{ade} son ligeramente más largas que la trayectoria \overline{ace} . Lo que nosotros queremos significar diciendo que ellas son levemente iguales a \overline{ace} es que si (por ejemplo) b tiene un desplazamiento pequeño x desde c , entonces el camino \overline{abe} excede al \overline{ace} en una cantidad que es proporcional al cuadrado de la pequeña cantidad x , mas bien que proporcional a la primera potencia de x . Así, en un desarrollo en serie de Taylor de la longitud de la trayectoria en función del parámetro x , la primera derivada desaparece (este término de la serie es el que establece una contribución lineal en x).

Realmente, no es la longitud de trayectoria, sino el tiempo de propagación lo que interesa. Así tenemos el principio de que un haz de luz se propaga según un camino tal que la derivada del tiempo de propagación con respecto a x es cero, donde x es un parámetro que es cero para el camino del haz (como el \overline{ace}) y distinto de cero para un camino vecino (tal como el \overline{abe} o el \overline{ade}). Esta condición dice que *el tiempo de propagación a lo largo del haz es un extremo*. Éste se llama *principio de Fermat del tiempo mínimo* o, simplemente, *principio de Fermat*.

Utilizaremos ahora este principio para obtener la ley de Snell. En la Fig. 9.21 se muestra un átomo a en el medio 1 y un átomo e en un medio 2 (son análogos a los átomos a y e en la Fig. 9.20). El punto de inter-

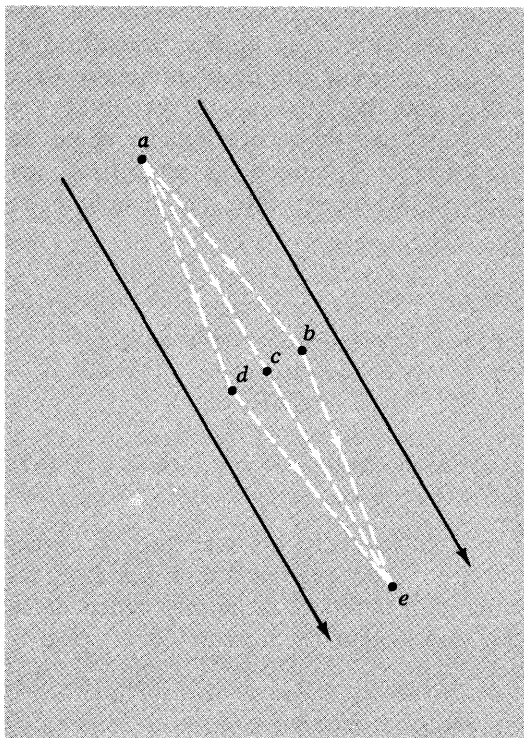


Fig. 9.20 Haz de luz propagándose en vidrio. Las flechas están según la dirección de propagación y dan el ancho del haz. Los puntos a , b , c , d y e son átomos del vidrio.

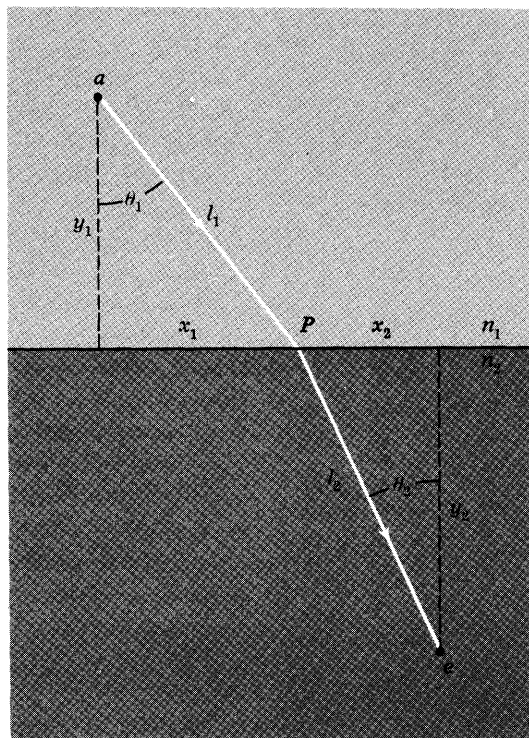


Fig. 9.21 Refracción. La longitud de trayectoria óptica $n_1 l_1 + n_2 l_2$ varía, dependiendo de la situación del punto P . El recorrido real del rayo de luz que se propaga de a hasta e se halla variando la posición de P para reducir al mínimo la trayectoria óptica, según el principio de Fermat. En ese caso \overline{aPe} está a lo largo del máximo de interferencia y es análogo a \overline{ace} en la Fig. 9.20.

sección del haz con la superficie de separación, indicado con P , es variable. La trayectoria \overline{aPe} tiene un segmento \overline{aP} que emplea un tiempo de propagación $t_1 = l_1 n_1 / c$ y un segmento \overline{Pe} que emplea un tiempo de propagación $t_2 = l_2 n_2 / c$. Las distancias ct_1 y ct_2 se denominan *longitud de trayectoria óptica* $n_1 l_1$ y $n_2 l_2$. La trayectoria óptica (t.o.) total es mínima si el tiempo total transcurrido es mínimo. Deseamos hallar el punto P para el cual

$$\text{t.o.} \equiv n_1 l_1 + n_2 l_2 = \text{mínimo.} \quad (85)$$

De la Fig. 9.21 tenemos

$$\text{t.o.} = n_1(y_1^2 + x_1^2)^{1/2} + n_2(y_2^2 + x_2^2)^{1/2}. \quad (86)$$

Desplacemos P una distancia infinitesimal de su (aún desconocida) posición para la cual se hace mínima la trayectoria óptica. Sea $d(t.o.)$ el cambio en la trayectoria óptica (t.o.) debida a este desplazamiento. Para hallar $d(t.o.)$ diferenciamos la ecuación (86). Las únicas variables son x_1 y x_2 , pues P permanece en la superficie de separación. La suma de x_1 y x_2 es por supuesto constante (pues los átomos a y e están fijos), así que el incremento dx_2 es el negativo del incremento dx_1 cuando P es desplazado. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 d(t.o.) &= n_1 dl_1 + n_2 dl_2 \\
 &= n_1 d(y_1^2 + x_1^2)^{1/2} + n_2 d(y_2^2 + x_2^2)^{1/2} \\
 &= \frac{n_1 x_1 dx_1}{(y_1^2 + x_1^2)^{1/2}} + \frac{n_2 x_2 dx_2}{(y_2^2 + x_2^2)^{1/2}} \\
 &= \frac{n_1 x_1}{l_1} dx_1 + \frac{n_2 x_2}{l_2} (-dx_1). \tag{87}
 \end{aligned}$$

Al escribir la ecuación (87) hemos despreciado los términos de orden superior que contenían a dx_1^2 , dx_2^2 , etc. Supongamos ahora que P es tal que aPe está según el haz; entonces la derivada de primer orden de la t.o. respecto de x_1 es cero, según el principio de Fermat. En tal caso la ecuación (87) da

$$d(t.o.) = 0 = \left[\frac{n_1 x_1}{l_1} - \frac{n_2 x_2}{l_2} \right] dx_1,$$

es decir

$$n_1 \frac{x_1}{l_1} = n_2 \frac{x_2}{l_2},$$

es decir

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \tag{88}$$

que es la ley de Snell.

Consideremos ahora algunos componentes ópticos básicos.

Espejo elipsoidal. En la Fig. 9.22 vemos un elipsoide de revolución hueco con una superficie interna de reflexión y con una fuente *puntual* de luz situada en F , uno de los dos focos principales. De la definición de elipse, las distancias desde F a los otros focos F' son las mismas para todos los caminos (*excepto* para el camino directo sin implicar reflexión). Por lo tanto, el foco F' es una región de interferencia completamente constructiva para radiación emitida por los electrones en la superficie que están influidos por la radiación de F . Decimos que la fuente en F está *formada* en el punto F' .

La imagen en F' *no* es un punto; la fase del campo resultante en un punto cercano a F' está dentro de casi $\pm \pi$ de la fase en F' con tal que el punto se encuentre dentro de una esfera con radio de alrededor de

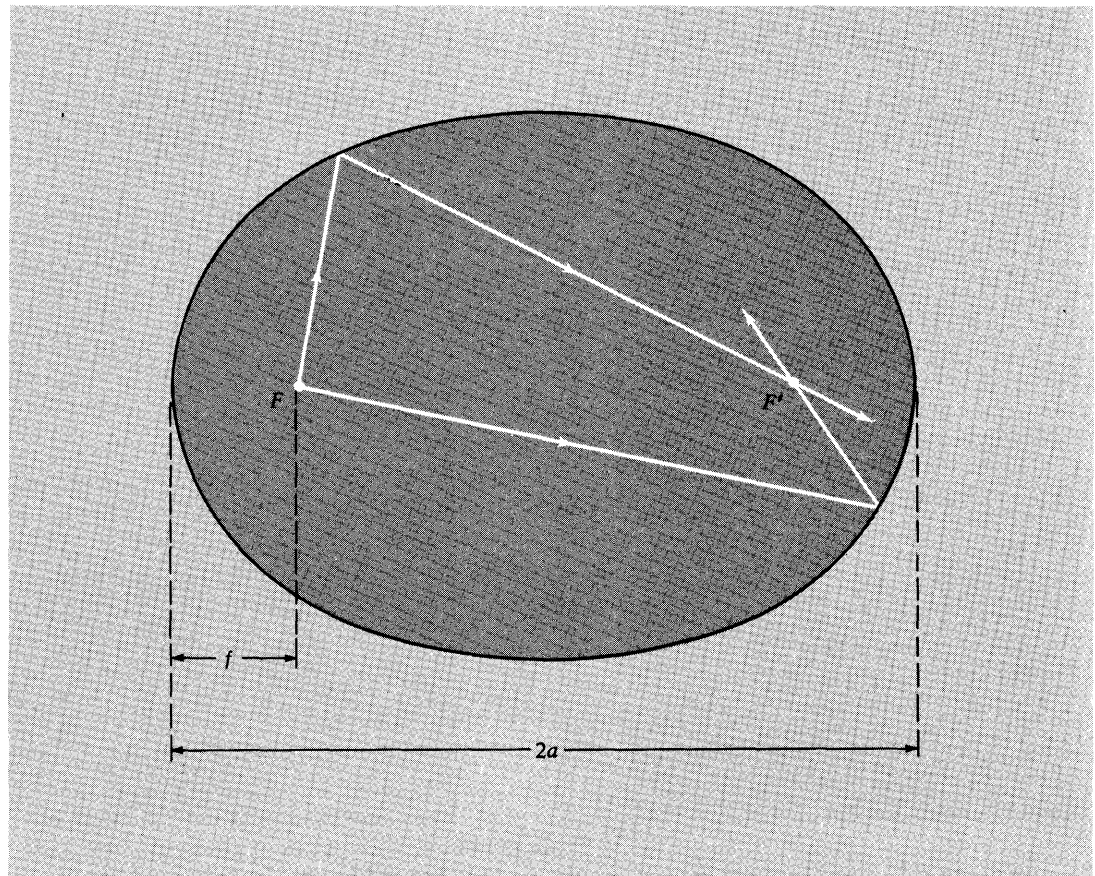


Fig. 9.22 Espejo elipsoidal.

$\lambda/4$ con centro en F' . Por lo tanto, esto es aproximadamente el tamaño de la imagen en F' .

Espejo cóncavo parabólico. Imagine que el punto focal F y la distancia focal f del elipsoide en la Fig. 9.22 está sostenido fijo, pero que el punto focal F' es movido hacia la derecha; la elipse es “estirada”. Si F' es movida infinitésimamente a la derecha, el elipsoide degenera en un paraboloide. Los rayos emitidos desde F forman entonces un haz paralelo (porque aún convergen en F' infinitésimamente alejados). Esto se muestra en la Fig. 9.23.

Si la concavidad del espejo parabólico tiene un diámetro D , entonces una fuente puntual en F no forma un haz perfectamente paralelo. El ancho angular del máximo de interferencia es $\Delta\theta \approx \lambda/D$. Si D es “infinito”, obtenemos una onda plana perfecta desde la fuente puntual.

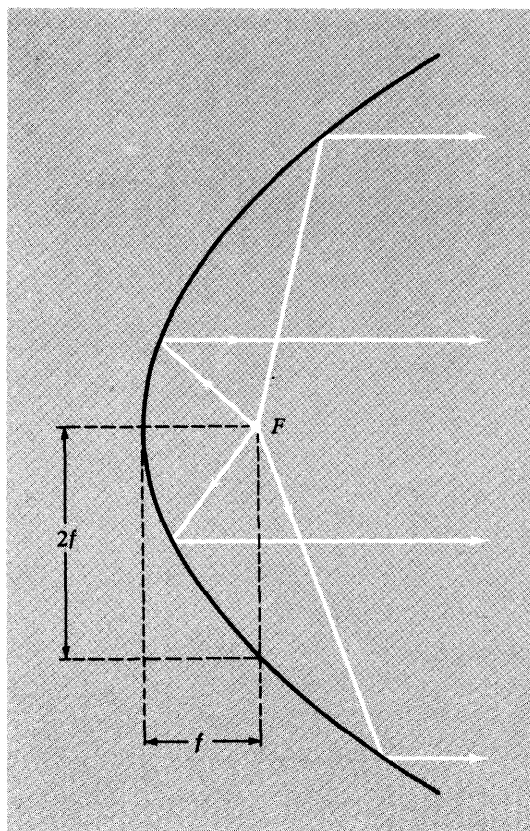


Fig. 9.23 Espejo cóncavo parabólico.

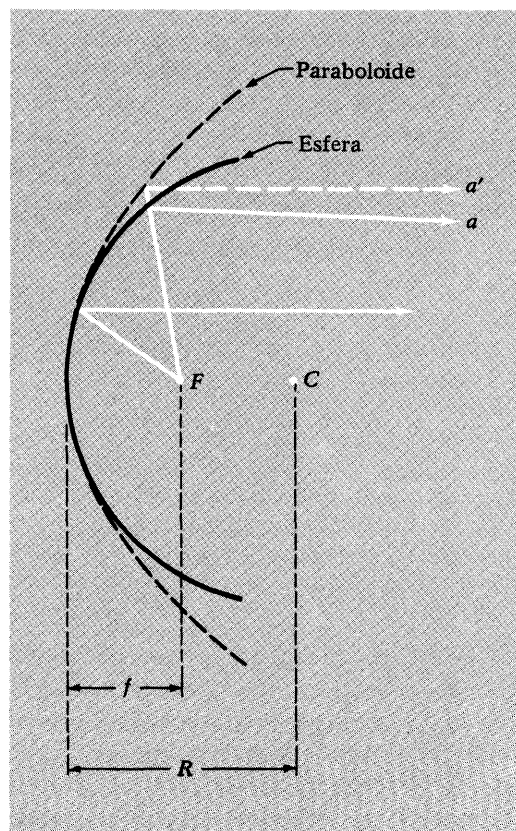


Fig. 9.24 Espejo esférico cóncavo ("en contacto" con un imaginario espejo parabólico que lo contiene). El centro de la esfera está en C ; su radio es $2f$. El rayo a reflejado desde la esfera no es paralelo a los ejes; el rayo a reflejado desde el paraboloide lo es. Esto ilustra la aberración esférica.

Recíprocamente, una onda plana incidente (perfectamente bien definida en ángulo) converge en una imagen en F que no es un punto a menos que D sea infinito. La imagen tiene un grosor $\Delta x \approx f \Delta \theta \approx f \lambda / D$.

Espejo esférico cóncavo. Una esfera se dice está "inscrita" en el vértice de un paraboloide si es tangente al paraboloide en ese punto y tiene el mismo radio que el radio de curvatura del paraboloide en dicho punto. No es difícil mostrar que el radio de tal esfera es $2f$. Véase Fig. 9.24.

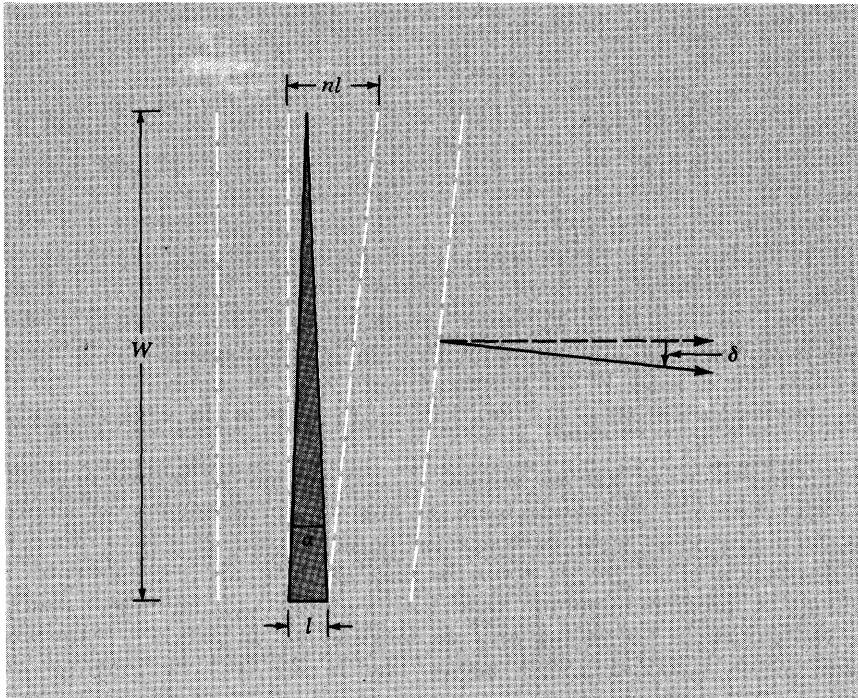


Fig. 9.25 Desviación por un prisma delgado.

Aberración esférica. Para una pequeña abertura de diámetro $D \ll 2f$, un espejo esférico está esencialmente “en contacto” con un imaginario espejo parabólico que lo contiene. Entonces, una fuente puntual en F forma un haz casi paralelo. Para concavidades grandes, la desviación de la superficie esférica respecto del paraboloide produce “aberración esférica”. (Véase Fig. 9.24.)

Para una discusión referente a la formación de imágenes en espejos cóncavos, véase PSSC, FÍSICA, 2.^a edición, cap. 12 (Editorial Reverté, S. A., Barcelona, Buenos Aires, México).

Se puede experimentar con espejos cóncavos procurándose un “espejo para afeitarse” (el hueco de una cuchara pulida sirve). Para experiencias con espejos convexos, recomendamos usar las bolas ornamentales de un árbol de navidad (o bien, el dorso de la cuchara).

Desviación de un rayo de luz a incidencia casi normal sobre un prisma delgado de vidrio. Un prisma delgado es aquél para el cual el ángulo de cuña α es tan pequeño que permite usar la aproximación de ángulo pequeño $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$. Para incidencia casi normal, podemos usar también dicha aproximación para el ángulo de incidencia. Entonces una

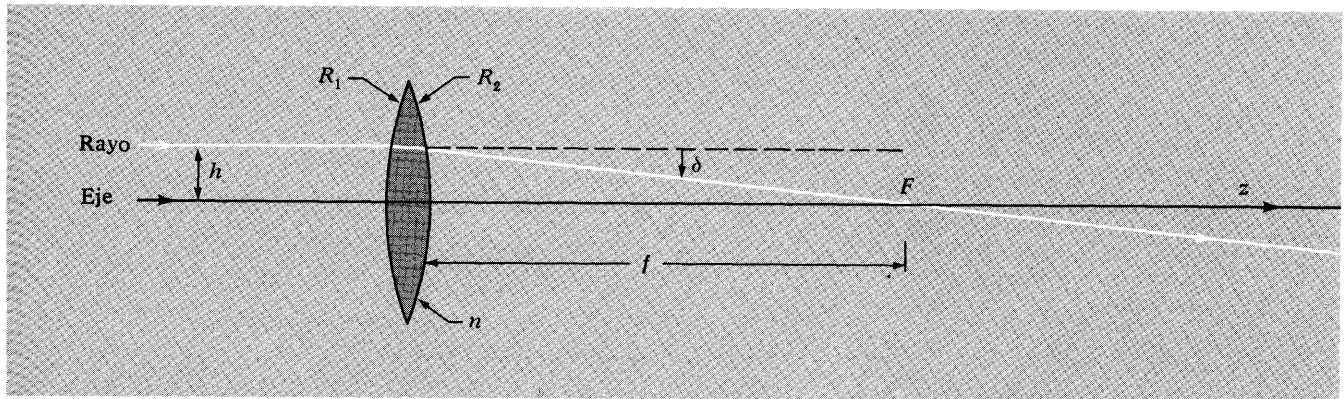
onda plana monocromática con un ángulo de incidencia casi normal es desviada “hacia la base del prisma” en un ángulo δ dado por

$$\delta = (n - 1)\alpha. \quad (89)$$

La desviación δ es una constante, *independientemente del ángulo de incidencia*, mientras nos mantengamos próximos al ángulo normal de incidencia. La ecuación (89) es fácilmente deducible (véase Fig. 9.25). En la base del prisma, el tren de ondas atraviesa el espesor l a una velocidad c/n . En el vértice, la velocidad es n veces mayor (pues el espesor del prisma allí es cero), y el mismo tren de ondas, por lo tanto, viaja una distancia nl en el mismo tiempo. Por lo tanto, el tren de ondas está adelantado en una distancia $(n - 1)l$ de la base. Esta distancia dividida por el largo W del prisma es (para ángulos pequeños) el ángulo de desviación $\delta = (n - 1)(l/W) = (n - 1)\alpha$, que es la ecuación (89).

Dispersión de color por un prisma. Como ejemplo de prisma delgado, suponga que $\alpha = 30$ grados (para el cual la aproximación de ángulo pequeño aún no es mala, para nuestro propósito) y n es 1,50. Entonces, la desviación es 15 grados según la ecuación (89). Ésa es realmente la desviación promedio, porque para vidrio común con un índice medio de refracción de 1,5, la luz azul de longitud de onda $0,45 \mu$ realmente tiene índice próximo a 0,01 mayor que la luz roja de longitud de onda de $0,65 \mu$. Por lo tanto, la luz azul es más desviada que la luz roja en casi $0,01 \alpha$. Para un α de 30 grados, el azul es desviado casi 0,3 grados más que el rojo. En radianes, como 30 grados es casi medio radián ($1 \text{ rad} = 57,3^\circ$) el azul es desviado en casi $1/200$ de radián más que el rojo. Sobre una pantalla un metro más allá de los 30 grados del prisma, el azul está por lo tanto separado del rojo en casi $\frac{1}{2}$ cm. Un espectrómetro de prisma hace uso de este efecto separador para analizar el espectro. En instrumentos ópticos que incorporan lentes de vidrio, la dispersión conduce a la aberración cromática, es decir, rayos de diferentes colores no convergen a los mismos lugares. Se puede evitar la aberración cromática en un telescopio usando un espejo parabólico para condenar la luz a un cierto foco en vez de lentes refractantes. (La luz de reflexión especular es válida para todos los colores.) Se puede eliminar también la aberración cromática usando dos clases de vidrio con diferente dispersión. Véase Prob. 9.53.

Enfoque de rayos de luz paraxiales por una lente delgada. Suponga que tenemos una lente de vidrio en el aire con dos superficies esféricas convexas normales a un eje común de simetría \hat{z} . Un rayo de luz incide desde la izquierda, propagándose paralelamente al eje de simetría de la lente a una distancia $y = h$ del eje. Si la lente es delgada, despreciamos (por definición) la variación de y mientras el rayo atraviesa la lente; también despreciamos el espesor comparado con la distancia



focal. Para considerar sólo rayos paraxiales mientras mantenemos h pequeño comparado con el radio de curvatura de las dos superficies, así podemos usar las aproximaciones de ángulo pequeño para todo ángulo que interese.

Halleemos el punto focal F donde un rayo incidente paralelo al eje de simetría atraviesa el eje de simetría luego de ser desviado por la lente, como se muestra en la Fig. 9.26. Vemos que si el rayo incidente es enfocado en F debió ser desviado en el ángulo pequeño.

Fig. 9.26 Lente delgada. Rayo incidente paralelo al eje.

$$\delta = \frac{h}{f}. \quad (90)$$

Condiciones necesarias para enfoque. Así vemos que la condición necesaria para la existencia de un punto focal *común* para todo rayo incidente paraxial paralelo, es que la desviación sea linealmente proporcional al desplazamiento h del rayo desde el eje. Así, la ecuación (90) se satisface para todo h (pero siempre suponiendo desviación de ángulo pequeño), entonces todos los rayos paralelos serán enfocados a la misma distancia f detrás de la lente. Esta condición se mantiene para cualquier problema similar de enfoque, por ejemplo, para el enfoque por una lente magnética de un haz de partículas cargadas.

Resta ver si una lente delgada con superficie esférica satisface la ecuación (90) con f independiente de h . Esto se ve de la siguiente forma: en lo que al rayo de la Fig. 9.26 respecta, pudo haber sido desviado por un prisma delgado equivalente. La primera superficie está a un ángulo h/R_1 de la vertical (donde el rayo lo intersecta). La segunda superficie está a un ángulo h/R_2 de la vertical en el sentido opuesto. El ángulo α del prisma equivalente es por lo tanto $hR_1^{-1} + hR_2^{-1}$. La desviación δ por el prisma delgado equivalente es $(n - 1)\alpha$, así pues, se tiene

$$\delta = (n - 1)h(R_1^{-1} + R_2^{-1}). \quad (91)$$

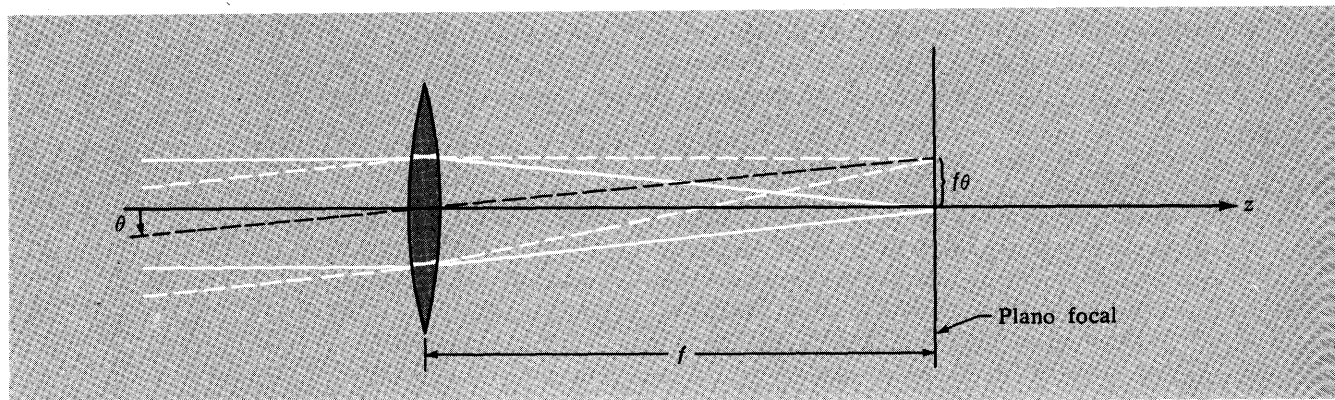


Fig. 9.27 Plano focal. **Fórmula del constructor de lentes.** Vimos que la ecuación (91) satisface la condición de enfoque, esto es, que δ sea proporcional a h ; la distancia focal f está dada por [véase ec. (90)]

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (92)$$

La ecuación (92) se llama *fórmula del constructor de lentes*.

Plano focal. Considere ahora un conjunto de rayos paralelos pero que no lo sean respecto al eje de simetría, sino más bien a un cierto ángulo θ respecto del eje. La desviación de un prisma delgado es independiente del ángulo de incidencia (para ángulos pequeños). Por lo tanto, *un rayo que corta la lente a una distancia h de su centro es desviado en $\delta = h/f$, independientemente del ángulo de incidencia*. Ello significa que cualquier conjunto de rayos paralelos converge en un punto de un plano, llamado *plano focal*, a una distancia f detrás de la lente, y el desplazamiento lateral en el plano del punto es $f\theta$ respecto del eje, como se muestra en la Fig. 9.27.

Imagen puntual real de un objeto puntual. Hemos encontrado la imagen puntual de un haz paralelo, es decir, un haz proveniente de un punto objeto (fuente) infinitamente alejados por la izquierda. Consideremos un punto objeto o a una distancia p a la izquierda de nuestra lente convergente y hallemos su imagen I a una distancia q a la derecha. Sea o sobre el eje de simetría; entonces I estará sobre el eje. Consideremos ahora la Fig. 9.28. Se sigue de ahí que si comenzamos con un vector posición o según la dirección $+\hat{z}$ y luego efectuamos las rotaciones $+\theta_1$, $-\delta$, $+\theta_2$, volvemos al eje de las $+\hat{z}$:

$$\theta_1 - \delta + \theta_2 = 0. \quad (93)$$

Fórmula para lentes delgadas. Pero

$$\theta_1 = \frac{h}{p}, \quad \theta_2 = \frac{h}{q}, \quad \text{y} \quad \delta = \frac{h}{f}.$$

(La desviación es siempre h/f , independientemente del ángulo de incidencia.) Por lo tanto, la ecuación (93) queda

$$\frac{h}{f} = \frac{h}{p} + \frac{h}{q},$$

es decir,

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}}. \quad (94)$$

La ecuación (94) se denomina *fórmula para lente delgada*.

Aumento lateral. Los ángulos de desviación de rayos por una lente delgada son invariables si la lente es rotada levemente alrededor de un eje que pase a través de su centro y perpendicular al plano de la Fig. 9.28. Así, el rayo del punto objeto a través del centro de la lente no es desviado, y el rayo que corta a la lente una distancia h del centro es desviado en h/f . Por lo tanto, puntos objeto e imagen en la Fig. 9.28 son invariables si a la lente se le da una pequeña rotación sobre un centro. (Por otra parte, si a la lente se le da una pequeña traslación perpendicular al eje, entonces el punto imagen se trasladará. La nueva situación se obtiene observando que el rayo a través del centro de la lente no es desviado.) En lugar de efectuar una pequeña rotación de la lente alrededor de su centro, suponga que se mantiene la lente fija y se da al punto objeto una leve traslación hacia arriba perpendicular al eje de la lente. El diagrama completo puede entonces ser rotado alrededor del centro de la lente (porque las desviaciones son independientes del ángulo de incidencia para incidencia casi normal). Así vemos que si el punto objeto es trasladado up hacia arriba en una magnitud y , entonces el punto imagen se traslada hacia abajo una magnitud que es mayor que y según la relación de "brazos" q y p . Esto se expresa diciendo que el aumento lateral es $-q/p$:

$$\text{aumento lateral} = -\frac{q}{p}. \quad (95)$$

El signo menos nos dice que si el punto objeto sube el punto imagen baja. Si el objeto no es un simple punto sino un cuerpo, tal como una pequeña flecha con tallo y cabeza, vemos que la imagen está *invertida*.

Lente convergente. La lente mostrada en la Fig. 9.28 es una *lente convergente*. La imagen de un objeto que se halle a una distancia ma-

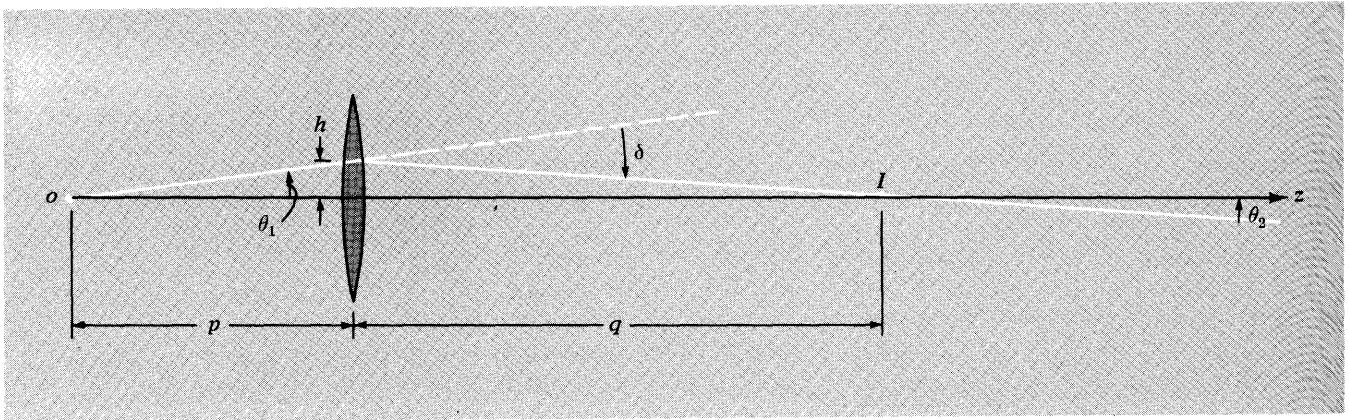


Fig. 9.28 Imagen puntual real de un objeto puntual.

yor que la distancia focal f de una lente delgada convergente es una *imagen real invertida*. El adjetivo “real” significa que hay luz en la imagen. Por contraste, una imagen en un espejo plano común es “virtual”, no hay luz detrás de la superficie del espejo.

Imagen virtual. Si el punto objeto en la Fig. 9.8 está a una distancia f a la izquierda de la lente delgada convergente mostrada, entonces la desviación h/f de rayos a una distancia h del centro de la lente es tal que forma un haz paralelo a la derecha de la lente. Si el punto objeto se halla más cerca que f , entonces la desviación h/f es insuficiente para dirigir el rayo hacia el eje. Por consiguiente, el rayo nunca corta el eje nuevamente. Por lo tanto, no existe imagen real. Este rayo parece provenir de un punto “virtual” a la izquierda de la lente. Se dice que allí hay *imagen virtual*. Vea Fig. 9.29. Es fácil demostrar (lo dejamos al lector) que la situación de la imagen virtual está dada por la fórmula de lente delgada, ecuación (94), teniendo en cuenta que interpretamos el signo menos de q como medida tomada a la izquierda de la lente.

Lente divergente. Si una lente es más delgada en el centro que en los extremos, es una *lente divergente* (suponiendo que sea una lente de vidrio en el aire). Si suponemos la lente como compuesta por prismas delgados (como hicimos para lentes convergentes), entonces el vértice de cada prisma está más cerca del eje que la base. Los rayos son alejados del eje de la lente (en lugar de ser dirigidos a éste como en las lentes convergentes). Un haz paralelo incidente de la izquierda da un haz divergente de un *foco virtual* a la izquierda de la lente como se ve en la Fig. 9.30. Es fácil demostrar que (el lector lo hará) todas las fórmulas obtenidas para lentes delgadas convergentes pueden ser usadas para lentes delgadas divergentes si damos interpretación adecuada al significado de las magnitudes negativas. Así, si decimos que

una lente divergente tiene una distancia focal negativa, $f = -|f|$, podemos usar la fórmula para lente delgada para referirnos a distancias imagen y objeto. Por ejemplo, la Fig. 9.30 corresponde a $p = +\infty$; $q = -|f|$ y $f = -|f|$ en la fórmula

$$p^{-1} + q^{-1} = f^{-1}.$$

Poder de una lente en dioptrías. La inversa de la distancia focal en unidades de metros inversos se llama el *poder de la lente en dioptrías*. Así, una lente convergente de distancia focal de 50 cm tiene un poder de + 2 dioptrías (+ 2 D). Una lente divergente de distancia focal — 50 cm tiene poder — 2 D. La inversa de la distancia focal (el poder) tiene la interesante característica de ser *lineal* en el siguiente sentido: si a una lente delgada se le adosa otra, *a potencia total de las dos lentes delgadas en contacto es la suma de sus potencias individuales*. Se ve fácilmente de la siguiente manera. La primera lente desvía un rayo *hacia el eje* según un ángulo h/f_1 , donde f_1 es positivo para una lente convergente y negativo para una divergente. Si la segunda lente se coloca en contacto con la primera, entonces el rayo no tiene posi-

Fig. 9.29 Imagen puntual virtual de un punto objeto. La distancia objeto p es menor que la distancia focal f .

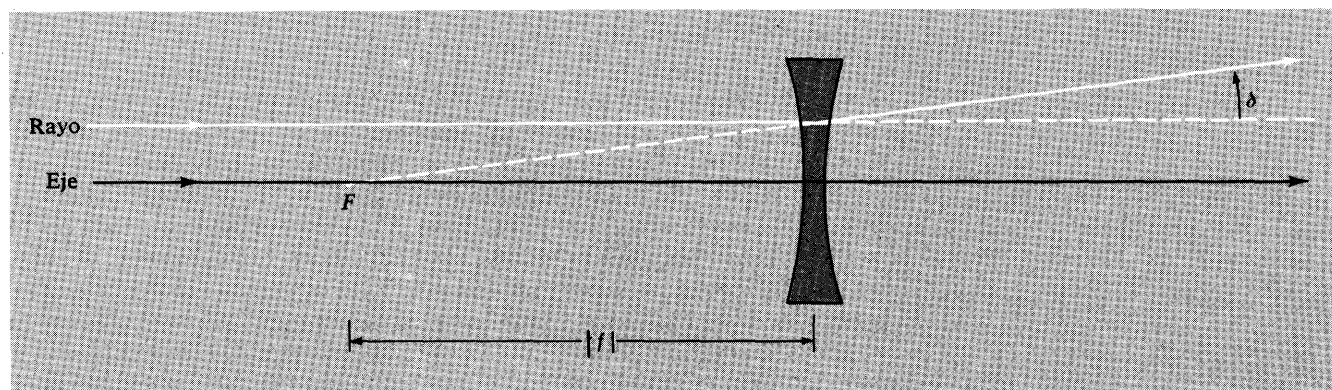
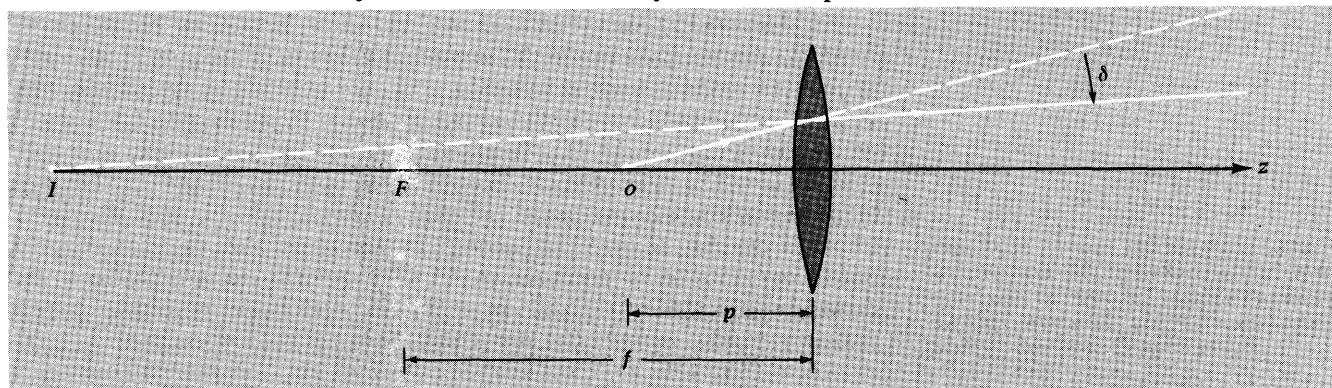


Fig. 9.30 Lente divergente.

bilidad de cambiar su distancia transversal h respecto del eje común de las dos lentes. Por lo tanto, es incidente sobre la segunda lente a la misma distancia h que si estuviese sobre la primera. Así, la desviación producida por la segunda lente es h/f_2 . La desviación total producida por las dos lentes es $h/f_1 + h/f_2$. Ésa es la desviación que produciría una sola lente equivalente de distancia focal f tal que $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$. Así, la potencia total, o la distancia focal inversa equivalente total, es la suma de las potencias individuales. Por supuesto, si hay un espacio entre las dos lentes entonces el rayo no corta a la segunda a la misma distancia h respecto del eje, como lo hacía en la primera. Las potencias de lentes en serie aumentan linealmente sólo si podemos despreciar la separación entre ellas.

Si utilizamos anteojos, deberíamos medir (muy aproximadamente) la potencia de cada lente según un plano horizontal y según otro vertical. Usaremos el sol como fuente puntual lejana. Si la lente es positiva puede formarse una imagen sobre una pared o un papel. Las distancias focales, ¿son las mismas para cada lente sobre dichos planos? (Si son diferentes, la lente se dice que es astigmática y se tiene astigmatismo en el ojo que difiere del normal.)

La distancia q del cristalino del ojo a la retina es alrededor de 3 cm. En metros inversos (m^{-1}) tendremos $q^{-1} = (0,03 \text{ m})^{-1} = 33 \text{ m}^{-1}$, esto es, q^{-1} es casi 33 metros inversos. Un ojo mirando a un objeto muy distante, tal como $p = \infty$ tiene una potencia f^{-1} dada por $f^{-1} = p^{-1} + q^{-1} = 0 + 33 \text{ m}^{-1} = 33 \text{ D}$. Para enfocar un objeto a una distancia $p = 25 \text{ cm}$, los músculos de acomodación del ojo deben incrementar la potencia en una magnitud $p^{-1} = (0,25 \text{ m})^{-1} = 4 \text{ m}^{-1} = 4 \text{ D}$, dando un total de casi 37 D. Si se poseen buenos músculos de acomodación, puede aumentarse la potencia en 10 D y enfocar así un objeto a una distancia $p = (10 \text{ D})^{-1} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$. Entonces, el objeto parece mayor y pueden apreciarse más detalles. Si se pudiese enfocar a 1 cm, el objeto parecería 25 veces mayor que a 25 cm; consecuentemente, se podrían distinguir detalles 25 veces menores. Nadie posee tal propiedad de acomodación.

Lente de aumento simple. Se puede sostener un objeto pequeño a unos 25 cm del ojo y examinarlo sin cansancio si se posee visión normal. Si la altura del objeto es h (en cm), subtiende un ángulo de $h/25$ (radianes) en el ojo, y esto determina la medida de la imagen sobre la retina. Si podemos acercarnos aún más al objeto la imagen sobre la retina será mayor. Para mantener una imagen nítida, los músculos de acomodación deben aumentar la potencia del cristalino. Esto es difícil y fatigante. Utilice ahora una lente de distancia focal $f(\text{cm})$. Sostenga la lente exactamente frente al ojo. Acerque el objeto. Cuando el objeto esté en el plano focal de la lente cada punto sobre el objeto dará un conjunto de rayos paralelos fuera de la lente y hacia el ojo. Así es

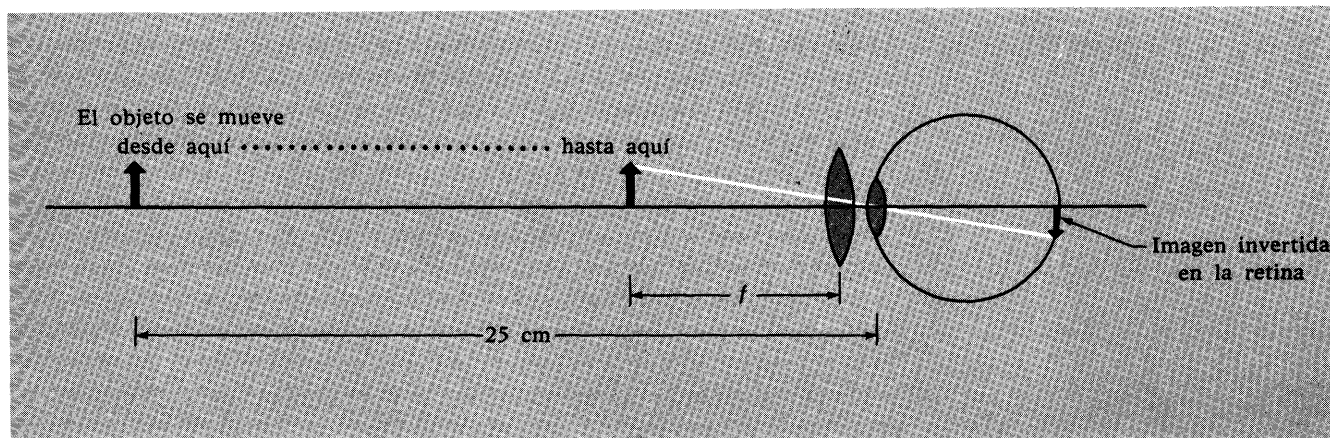
más fácil de enfocar — el cristalino está relajado. Dejaremos al lector demostrar que la medida angular del objeto aumenta en un factor $25/f$ (suponiendo ángulos pequeños para utilizar la aproximación de ángulo pequeño). Véase Fig. 9.31. Puede construirse una lupa procurándose una lente de distancia focal de 2 ó 3 cm.

Aumento producido por un pequeño orificio. Tome un trozo de hoja de aluminio y efectúe un agujerito de $\frac{1}{2}$ mm o menos (pinchando con un alfiler). Sosténgalo cerca y frente al ojo. Mire hacia un punto luminoso. Los “flotadores” que vemos son la configuración de difracción de las cadenas de células en el ojo”. (No están sobre la superficie, como puede comprobarse tratando de borrarlos parpadeando.) Ahora mire hacia una hoja escrita bien iluminada, a través del orificio. (Si utilizamos lentes, habremos de quitárnoslos.) Acerque la hoja cada vez más hacia el ojo. Observe que la palabra que está viendo permanece nítida y aumenta a medida que la acerca. (Finalmente se esfuma, pues el agujerito no es lo suficientemente pequeño.) El aumento es fácil de calcular mediante un esquema como el de la Fig. 9.31, con la lente reemplazada por un orificio pequeño.

¿Se ven realmente invertidos los objetos? Aquí tenemos un modo de convencerse de que la imagen en la retina es invertida. Mire a través del orificio hacia una fuente luminosa ancha. Sostenga la punta de un lápiz frente al orificio y mire su sombra sobre la retina. Todo sucede como se esperaba. Ahora *cambie el orden* y coloque la punta del lápiz entre el orificio y el ojo. Mueva el lápiz y observe la dirección del movimiento de la sombra. Haga un diagrama y explique qué sucedió.

Ejercitando las pupilas. Cuando se mira hacia un manantial luminoso extenso (como el cielo) a través del orificio, se ve un círculo brillante.

Fig. 9.31 Lente de aumento simple. La potencia del cristalino es suplementada por la lupa. El objeto puede ser movido hacia el ojo y, consecuentemente, dar una imagen mayor.

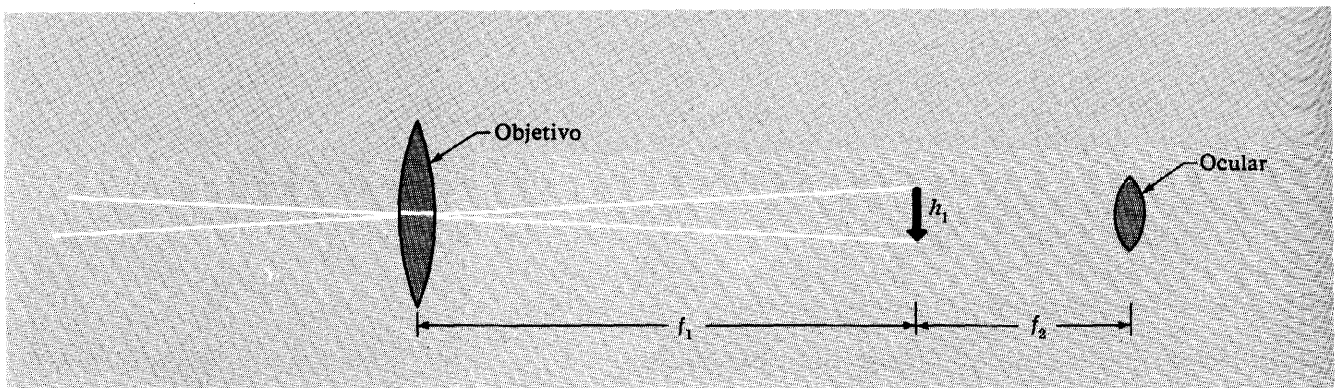


Ese círculo es la proyección de la pupila sobre la retina. Podrá estudiar la contracción y dilatación de la pupila tapando y destapando el *otro* ojo, aquel con el cual *no* mira a través del orificio. Si no se cubre este ojo de manera que no reciba luz, la pupila se contrae. ¡También lo hace así la pupila del ojo que mira a través del orificio! Y también podemos ver estas contracciones de pupila. Observe que la pupila invierte un tiempo de casi $\frac{1}{2}$ segundo para contraerse o dilatarse cuando la intensidad luminosa cambia súbitamente.

Telescopio. Un telescopio consiste en dos lentes. La primera es el objetivo, la cual produce una imagen real de un objeto distante. Para una buena aproximación, la imagen está en el plano focal del objetivo. Si θ_0 es la medida angular del objeto distante y f_1 es la distancia focal del objetivo, entonces, la altura h_1 de la imagen formada por el objetivo es $h_1 = f_1 \theta_0$. La segunda lente de un telescopio es el *ocular*. Es una simple lupa usada para observar la imagen formada por el objetivo. Si el ocular se ajusta de manera tal que la imagen esté en el plano focal del ocular, entonces un punto sobre la imagen da un haz paralelo en el ojo. Entonces el ojo está en descanso, tal como si estuviese mirando a un objeto distante sin telescopio. La medida angular subtendida en el ocular por la imagen de altura h_1 es h_1/f_2 , donde f_2 es la distancia focal del ocular. Ésta es mayor que la medida angular θ_0 en la relación $(h_1/f_2)/\theta_0 = (f_1 \theta_0/f_2)/\theta_0 = f_1/f_2$. De esta forma, el aumento angular es f_1/f_2 . Véase Fig. 9.32.

Microscopio. Un microscopio es como un telescopio, pues incorpora un objeto para formar la imagen real del objeto y un ocular para examinar esta imagen. El objeto al ser examinado está casi (no exactamente) en el plano focal del objetivo. La imagen se forma a una distancia L del objetivo de $L \approx 20$ cm. Esta distancia es esencialmente la longitud de barrido del microscopio. Un objeto de ancho x ubicado

Fig. 9.32 Telescopio.



a una distancia f_1 del objetivo, produce una imagen de ancho $h_1 = (L/f_1)x$ en el punto imagen. Esta imagen está a una distancia f_2 del ocular y subtiende allí un ángulo h_1/f_2 . Si el objeto fuese examinado a simple vista a una distancia de 25 cm, el ángulo subtendido sería $x/25$ cm. Entonces, el aumento es $(h_1/f_2)(x/25) = 25 L/f_1 f_2$. Véase Fig. 9.33.

Lente cilíndrica o esférica gruesa. En la Fig. 9.43 se muestra la formación por dicha lente de la imagen de un haz paralelo de luz.

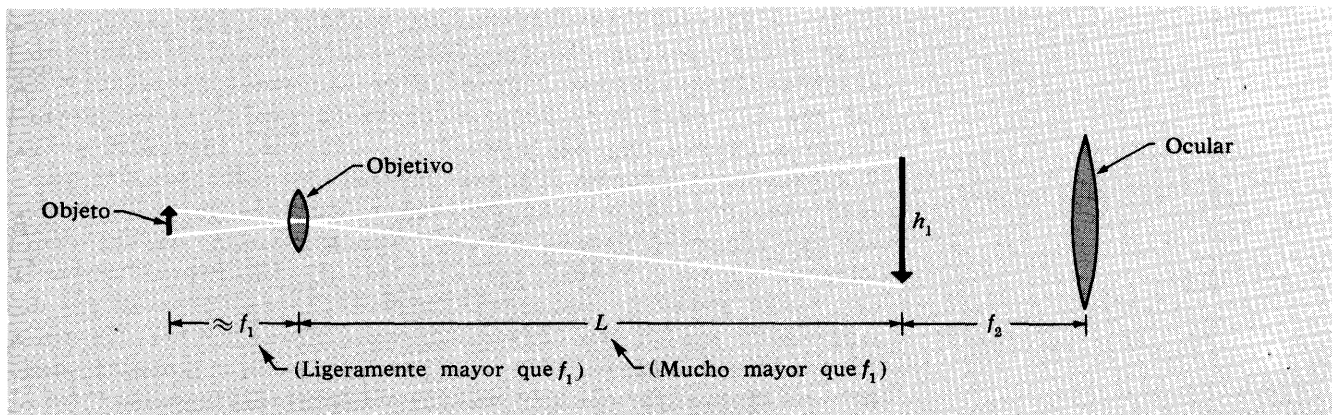
Desviación por una superficie esférica. Tracemos rayos paralelos a través de la lente. El rayo que atraviesa el centro de la esfera o círculo no se desvía. El rayo a una distancia h del centro tiene un ángulo θ_i de incidencia dado por $\theta_i = h/R$ para $h/R \ll 1$. La desviación δ de este rayo en la primera superficie es igual al ángulo de incidencia θ_i menos el ángulo de refracción θ_r . Para ángulos pequeños, la ley de Snell, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ queda $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$. Entonces, la *desviación hacia la normal a una superficie* está dada por

$$\begin{aligned} \delta &= \theta_1 - \theta_2 \\ &= \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right) \\ &= \theta_1 \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right). \end{aligned} \quad (96)$$

La ecuación (96) es general (para ángulos pequeños) y es útil para trazar rayos en sistemas complicados. En este ejemplo encontramos para la primera superficie una desviación

$$\delta = \frac{h}{R} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (97)$$

Fig. 9.33 Microscopio



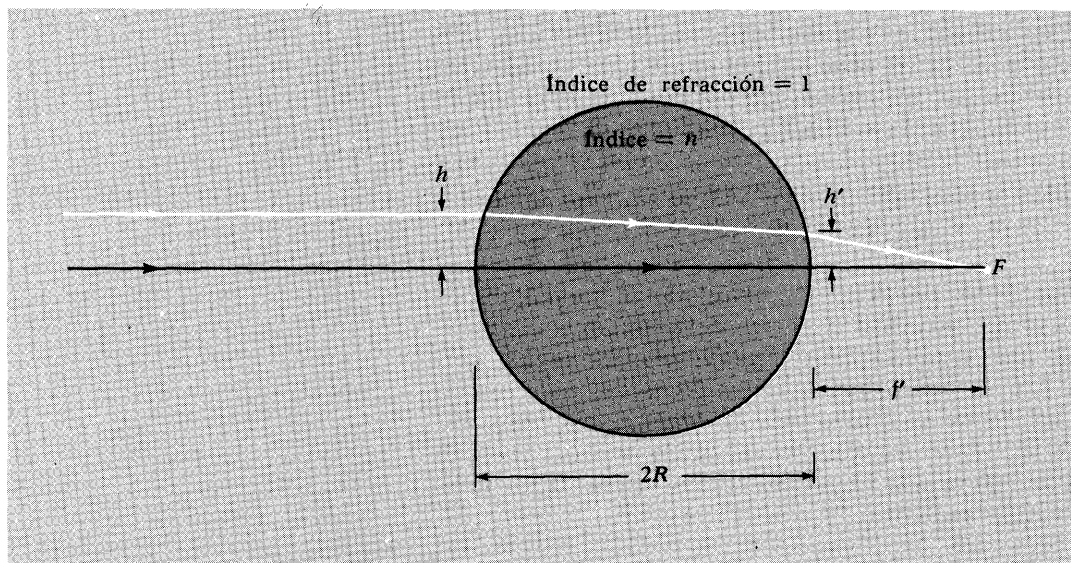


Fig. 9.34 Ejemplo de lente “gruesa”. El punto focal F está a una distancia f' más allá de la última superficie. Índices de refracción: aire = 1; lente = n .

Ahora sigue el rayo hacia la superficie posterior. Se acerca al eje en una cantidad $2R$ veces la desviación δ . Así alcanza la superficie posterior a una distancia h' que es

$$h' = h - 2R\delta = h - 2h\left(1 - \frac{1}{n}\right) = h\left(\frac{2}{n} - 1\right). \quad (98)$$

En la superficie posterior el rayo es nuevamente desviado hacia el eje. Por la simetría de un círculo respecto de una cuerda, la desviación sobre el emergente es la misma que sobre el incidente. Así, el rayo emerge en un ángulo 2δ del eje y a una distancia lateral h' . Cortará, por lo tanto, al eje a una distancia f' más allá de la última superficie, donde

$$2\delta = \frac{h'}{f'}. \quad (99)$$

De las ecuaciones (97), (98) y (99)

$$f' = \frac{h'}{2\delta} = \frac{h\left(\frac{2}{n} - 1\right)}{\frac{2h}{R}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{R(2 - n)}{2(n - 1)}. \quad (100)$$

Puede usarse la ecuación (100) y una jarra para medir el índice de refracción del agua o (por ejemplo) del aceite mineral. [La ecuación (100) es válida para un cilindro o esfera]. Véase Experimento casero 9.42.

Microscopio de Leeuwenhoek. El primer microscopio era sólo una esferita de vidrio. Fácilmente puede conseguirse uno. He aquí cómo actúa. Coloque la esfera exactamente frente al ojo. Coloque el objeto (a observar) en el punto focal F de la Fig. 9.34. Un punto del objeto produce un haz paralelo de luz incidente en el ojo. Puesto que es un haz paralelo, puede relajar los músculos de acomodamiento, y el haz enfocará en un punto de la retina. Calculemos el aumento de esta lente. Suponga que el objeto tiene una extensión lateral x_{obj} . Los rayos provenientes de los extremos del objeto a través del centro de la esfera no son desviados. Eso significa que la medida angular del objeto es x_{obj} dividida por la distancia de F al centro de la esfera.

$$\theta_{obj} = \frac{x_{obj}}{R + f'}. \quad (101)$$

Éste es el ángulo entre los haces paralelos que corresponden a imágenes de los extremos del objeto sobre la retina y es, por lo tanto, la medida angular que se "ve" usando el microscopio; cuando mire al objeto sin el microscopio debe mantenerlo alejado del foco unos 25 cm aproximadamente, holgados. La medida angular del objeto es entonces $x_{obj}/25$ cm. El aumento angular M es, por lo tanto,

$$M = \frac{25}{R + f'} = \frac{25}{R \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2-n}{n-1} \right) \right]} = \frac{25 \text{ cm}}{2R \left(1 - \frac{1}{n} \right)}. \quad (102)$$

Así, por ejemplo, si $R = 1$ mm y $n = 3/2$ (vidrio), se tiene $M = 375$.

Reflector inversor Scotchlite. Si $n = 2$, entonces, según la ecuación (98), un rayo paraxial incidente a una distancia h del eje, corta la superficie posterior de la esfera de la fig. 9.32 a una distancia $h' = 0$. Así, un haz paralelo es enfocado exactamente en la superficie posterior. El haz es allí parcialmente reflejado y parcialmente transmitido. La luz reflejada lo es a 180 grados de la dirección original, como se observa en la Fig. 9.35. La luz transmitida en la superficie posterior puede reflejarse ampliamente en la lente cubriendo la superficie posterior con una superficie reflectante plateada.

Un material reflectante llamado Scotchlite se puede conseguir en el comercio. Es utilizado para señales de tránsito, entre otros usos. Exáminelo con una lente de aumento. Verá que consiste de muchas esferitas de vidrio "sumergidas" en una superficie plateada y pintada de rojo, con un material especial. El mayor índice que se puede lograr con vidrio es $n = 1.9$. Es suficientemente próximo a 2, así que trabaja bastante bien.

La "próxima realización" de la mayor cámara de ampollas de hidrógeno líquido, actualmente (1968) en proyecto, usará Scotchlite en el

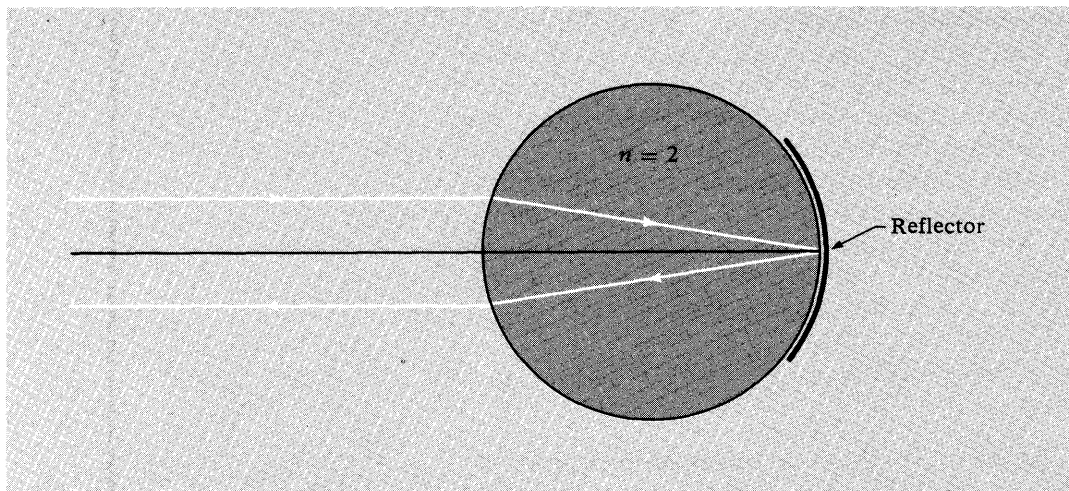


Fig. 9.35 Índice inversión de la dirección de propagación de la luz debido a un reflector ideal utilizando Scotchlite de índice $n = 2$.

fondo de la cámara para reflejar los rayos de luz hacia su superficie. Podemos fácilmente medir las propiedades retrodireccionales del Scotchlite. Véase Experimento casero 9.35.

Problemas y experimentos caseros

9.1 Campo cercano y campo lejano. ¿A qué distancia nos situaremos de una ranura doble con un ancho de ranura de 0,1 mm iluminada con luz visible a efectos de usar la aproximación de campo lejano sin emplear lentes? ¿A qué distancia nos situaremos de dos antenas de microondas estando éstas separadas 10 cm y emitiendo microondas de 3 cm a fin de emplear la aproximación de campo lejano?

9.2 Dos ranuras separadas 0,5 mm son iluminadas por un haz paralelo desde un laser de helio-neón que emite luz monocromática de longitud de onda 6328 Å. A cinco metros de las ranuras se encuentra una pantalla. ¿Cuál es la separación de las franjas de interferencia sobre la pantalla?

9.3 ¿Cuál es la longitud del clásico tren de ondas (paquete de ondas) correspondiente a la luz emitida por un átomo con un tiempo de decaimiento de 10^{-8} segundos? En una descarga gaseosa común los átomos no decaen libremente, sino que tienen un tiempo de coherencia $\approx 10^{-9}$ segundos debido al ensanchamiento Doppler y ensanchamiento por colisión. ¿Cuál es la longitud del correspondiente tren de ondas clásico?

9.4 Si una fuente lineal no es tal, sino que tiene un ancho de 1 mm, ¿a qué distancia debe estar de una ranura doble que ilumina, a fin de que para las dos ranuras sea razonablemente coherente? Suponga una separación de ranura de 1/2 mm.

9.5 ¿A qué distancia se encuentra un vehículo cuando apenas se pueden distinguir dos faros delanteros a simple vista?

9.6 Venus tiene un diámetro de alrededor de 8000 millas. Cuando es visible como “estrella matinal” (o crepuscular), se halla tan distante como el sol, es decir, casi 93 millones de millas. A simple vista parece más grande que un punto. ¿Estamos viendo el verdadero tamaño de Venus?

9.7 Resolución del ojo. Tome dos lamparitas de la misma potencia (digamos 150 vatios), una de vidrio transparente y filamento pequeño (1 pulgada por 1/8), la otra esmerilada de casi 3 pulgadas de diámetro. Halle experimentalmente cuánto debe caminar hasta que las dos lámparas parezcan tener el mismo tamaño. A esta misma distancia (grande) compare los tamaños aparentes de dos bombillas esmeriladas, teniendo éstas el mismo tamaño pero diferentes en potencia según el doble o triple. ¿Cómo explicamos el resultado? ¿Por qué Venus parece mayor que un punto? (Véase Prob. 9.6).

Experimento casero

9.8 Configuración de una red de difracción moiré. Se necesita una fuente de luz blanca y dos redes idénticas. Una buena fuente luminosa la constituye una lámpara de 40 W con un filamento recto de 3 pulgadas en un bulbo de vidrio transparente. Con la fuente lineal orientada verticalmente, mire a través de una red (manténgala cerca del ojo) y oriente ésta de manera que los colores se distribuyan horizontalmente. Ahora superponga la segunda red sobre la primera. Rótela cuidadosamente a fin de superponer exactamente las imágenes de primer orden de las dos redes. Con cuidado. Se logrará, obteniendo “franjas negras” a través de las imágenes coloreadas de primer orden. He aquí parte de la explicación. La separación entre líneas de la red es d . Suponga que la separación entre los planos de ambas redes sea s , consideradas como dos vallas superpuestas con un pequeño espacio entre ellas o como dos pantallas idénticas paralelas. A ciertos ángulos, las estrías de la red estarán una detrás de otra. A otros ángulos, las estrías de una red estarán (en proyección) entre las estrías de la otra. A estos ángulos, el número efectivo de estrías por unidad de longitud (es decir, d^{-1}) es doble. Apliquemos física: ¿Por qué se obtienen las franjas negras? Corresponden a ángulos donde el número efectivo de líneas es “uno solo” o “doble”? Dado el número de líneas por cm, d^{-1} , para cada red, ¿cómo determinar el espacio s ? Dado s , ¿cómo determinar d ?

Experimento casero

9.9 Configuración de difracción por una media de seda. Necesita una media seda (o nylon) y una fuente puntual de luz blanca. Aunque un foco de alumbrado público distante quizá sirva, la mejor fuente es un flash de 6 voltios con filamento de 1/2 mm. Para tener una buena fuente puntual quite la lente y cubra el reflector parabólico con un paño negro. O simplemente, mire la lámpara por un costado, fuera del haz del reflector. (Nota: Un destello no sirve.)

Mire a través de la media a la fuente puntual. Por la configuración que ve, puede determinar el espacio medio entre hebras y el número de ellas a diferentes ángulos. Superponga varios cortes o trozos de la media y mire hacia la fuente. La configuración de círculos concéntricos que se ve es similar a la configuración de difracción de rayos X difusa.

Experimento casero

9.10 Red de difracción con un disco long-play. Mire con un disco de 33 rpm hacia una fuente luminosa puntual blanca con un ángulo de incidencia casi rasante. Los surcos constituyen una buena red. Mida *grosso modo* la longitud de onda de la luz roja y verde utilizando el disco. Describa el método. ¿Cómo puede determinarse fácilmente la situación del máximo especular de orden cero?

Experimento casero

9.11. ¿Qué lado tiene las estrías? Un lado del plástico de su red de difracción es liso; el otro lado tiene estrías. Puede encontrar qué lado tiene las estrías mirando a través de la red a una fuente blanca luego de frotar un lado con un dedo grasoso; luego límpielo y pruebe el otro lado. ¿Cuál es la explicación?

Experimento casero

9.12 Considerando un espejo esférico y parabólico como el de la Fig. 9.24, tomar la dirección $+\hat{z}$ hacia la derecha (según los ejes de simetría) y x transversa a z ; tomar $a = x = 0$, en el vértice del espejo.

(a) Mostrar que la superficie parabólica está dada por

$$z = \frac{x^2}{4f}.$$

(b) Mostrar que la superficie esférica está dada (para $x \ll f$) por

$$z = \frac{x^2}{4f} + \frac{x^4}{64f^3} + \dots$$

(c) Compare un espejo esférico con abertura de diámetro D y longitud focal de la lente f , con un espejo parabólico con el mismo D y f . Para el espejo esférico, considerar la desviación angular $\delta\theta$ de los "peores rayos" (cerca del borde de la abertura) debido a la aberración esférica ($\delta\theta$ es la desviación respecto de \hat{z} de los rayos de una fuente puntual). Muéstrase que $\delta\theta$ es menor que el ancho de la difracción angular de $\Delta\theta \approx \lambda/D$ siempre que

$$D < 4f \left(\frac{\lambda}{4f} \right)^{1/4}.$$

Así (por ejemplo), para la luz visible y para una distancia focal $f \approx 50$ pulgadas un espejo esférico es casi tan bueno como un espejo parabólico siempre que el diámetro del espejo D sea menor que aproximadamente 3,5 pulgadas.

9.13 Una lámina de vidrio de espesor t e índice n es colocada entre el ojo de un observador y una fuente puntual. Mostrar que la fuente puntual parece haberse desplazado a un punto más cercano al observador en $[(n-1)/n]t$ aproximadamente. Aproxímese por pequeños ángulos.

9.14 Un "reflector triédrico" consiste de tres espejos planos unidos de manera de formar un triedro, como la esquina interior de una caja rectangular. Mostrar que un haz de luz que incide sobre tal reflector es invertido 180° de su posición original, independientemente del ángulo de incidencia y cualquiera que sea la superficie sobre la cual incide.

9.15 Mostrar que una onda plana que incide *normalmente* en una cara de un prisma de ángulo agudo A , se desvía en cantidad θ_{desv} donde

$$n \sin A = \sin(A + \theta_{\text{desv}}).$$

9.16 Un haz de laser de difracción limitada, de diámetro 1 cm, apunta hacia la luna. ¿Cuál es el diámetro del área iluminada de la luna? (La luna está a 240 000 millas.) Tómese la longitud de onda 6328 Å. Despréciase la dispersión en la atmósfera terrestre.

Experimento casero

9.17 Configuración de la difracción de una ranura. Pegue un pedazo de una hoja de aluminio por sus bordes a un porta objetos de un microscopio. (La forma más conveniente de pegarlo es con cinta "scotch". Hacer un solo corte con una hoja de afeitar o un cuchillo afilado. Sostenga la ranura cerca de un ojo y mire hacia una fuente lineal blanca. Estimar el ancho angular del máximo central haciendo (por ejemplo) marcas sobre un papel que se encuentre detrás de la fuente a fin

de tener una escala. Estimar la relación de la longitud de la onda de la luz roja a la luz verde, donde esos colores se obtienen con los filtros de gelatina. Usando el filtro rojo, estimar el espesor del objeto cortante, es decir, el ancho de su corte, usando la medida del ancho angular de la configuración de la difracción y suponer $\lambda \sim 6500 \text{ \AA}$. Si se tiene una lupa puede colocarse la ranura sobre una escala milimétrica y estimar el ancho de la ranura directamente. Comparando los dos resultados, ¿cómo son?

9.18 Configuración de difracción e interferencia de una doble ranura. Haga dos cortes paralelos y separados por $1/2 \text{ mm}$ o menos usando la técnica empleada en el Experimento casero 9.17. Haga un corte de alrededor de $1/2 \text{ cm}$ de longitud mayor que el otro, para poder pasar rápidamente de la configuración de doble ranura a la de simple, desplazando ligeramente las ranuras, a fin de ver qué parte de la configuración de doble ranura es “la modulación de la ranura simple”, debido al ancho no nulo de la simple ranura. Para ver fácilmente el efecto del espaciado d variable entre ranuras, corte una ranura a un ligero ángulo respecto de la otra, de manera que éstos se crucen en forma de “V”. Habría que hacer varias ranuras (hacer un par nos llevará 10 seg), algunas serán mejores que otras. (Coloque la ranura delante de una luz y examínela para ver por qué es mala si lo es.)

Experimento casero

9.19 Configuración de tres ranuras. Intente esto sólo después de haber hecho bastantes ranuras dobles buenas, con la técnica de 9.17 y 9.18. Corte una tercera ranura paralela a las dos primeras, de manera que pueda pasarse rápidamente de dos a tres ranuras con una ligera traslación. Lo importante es tratar de ver el angostamiento del máximo cuando se agrega la tercera ranura. [Se puede conseguir un hermoso conjunto de simple, doble, triple y cuádruple ranura de ancho variable y en cantidad por encima de 80 ranuras todas montadas sobre un llamado dispositivo Cornell Slitfilm Demonstrator, el cual se obtiene en The National Press, 850 Hansen Way, Palo Alto, Calif. Precio de catálogo, \$ US 1,50.]

Experimento casero

9.20 Coherencia — tamaño de una fuente “puntual” o lineal. Use una ranura simple de ancho conocido (calculado). Colocar el filtro de gelatina rojo sobre la fuente. Pararse suficientemente lejos de la fuente de manera de obtener una configuración de ranura simple bien definida. Ahora, acérquense a la fuente. Hallar la distancia L a la cual la configuración de simple ranura se emborrona. Lo hace a una distancia a la cual las diferentes partes del filamento de la lámpara (si ésta es de fuente puntual), se transforman en fuente de luz independiente y de esta manera son incoherentes para el tiempo de resolución del ojo como discutimos en la Sección 9.4. Usar la apreciación del tamaño de la fuente de la ranura y la medida de la distancia L a la cual la configuración se emborrona, para calcular la longitud de onda de la luz, usando la relación deducida en la Sección 9.4, $d(\text{fuente}) D(\text{ranura}) = L$.

Experimento casero

9.21 Coherencia — espejo de Lloyd, la “ranura doble garantizada contra incoherencia”. Si se sostiene una doble ranura frente a un ojo y se mira una fuente extensa como el cielo o un tubo fluorescente no se verá configuración de interferencia. ¿Por qué sucede así? Ahora, proyectaremos una ranura doble que dará una configuración de interferencia de doble ranura aunque se mire un tubo fluorescente. Primero hagamos una ranura simple con la técnica del Experimento casero 9.17. Entonces, tomemos un portaobjetos y colóquese de canto al primer portaobjetos (el que tiene la ranura) y paralelo a la ranura de manera que la imagen especular esté próxima, por ejemplo, $1/2 \text{ mm}$. Hacer esto sosteniendo el conjunto a un pie más o menos de la cabeza; de esta manera se podrá enfocar fácilmente los ojos sobre la “doble ranura” mientras sostiene frente

Experimento casero

a un fondo brillante y se ajusta el espejo. Cuando se obtiene una buena ranura, póngase el conjunto cerca de un ojo y enfóquese a larga distancia (es decir, sobre las fuentes luminosas). Observar tres o cuatro rayas negras paralelas a "la doble ranura coherente". Estas son ceros de interferencia debidos a la interferencia destructiva entre la luz que proviene de la ranura real y la de la imagen. La ranura imagen es, por supuesto, siempre completamente coherente con la real. (¿Por qué?) Debido a la inversión de fase en la reflexión el haz de la ranura y el haz de la imagen están en 180° fuera de fase. Por consiguiente, las franjas en el plano del espejo "negro" son ceros de interferencia. Aquí hay una cuestión a resolver experimental y "teóricamente": ¿Son las líneas "brillantes" que se encuentran entre líneas "negras" tan brillantes como el fondo que se ve con una sola ranura? ¿Más brillantes? ¿Menos?

Experimento casero

9.22 Espejos de Lloyd con sujetapapeles. (Véase Experimento casero 9.21). Un sujetapapeles iluminado por una lámpara de una fuente lineal angosta y brillante; sostenga el sujetapapeles tirante (y paralelo a) al borde del portaobjetos usado como espejo. Cuando se obtiene una visión decente de la "doble ranura coherente" de separación de menos de $1/2$ mm, sosténgase cerca de un ojo y busque las bandas de interferencia oscuras discutidas en Experimento 9.21. Esto requiere un poco más de práctica que en el método del 9.21. La luz debe ser casi rasante al espejo. Además, la iluminación debe ser dispuesta de manera que no lo ciegue.

Experimento casero

9.23 Configuración de difracción bidimensional. (a) Mire hacia una lámpara de alumbrado público a través de una tela metálica (de una ventana). Gire la ventana de manera que la separación proyectada entre alambres sea tan pequeña como queramos. *Problema:* ¿A qué distancia debe estar una lámpara de 20 cm de diámetro para que dé una iluminación coherente sobre dos alambres contiguos de la tela?

(b) Véase una lámpara de calle o una fuente puntual con varias clases de telas, un pañuelo de seda, medias de nylon, un paraguas, etc.

(c) Véase una fuente puntual a través de dos redes de difracción del tipo que tenemos en la caja; rótese una red hasta que sus líneas sean perpendiculares a la primera. Obsérvese que se consiguen algunas (más bien débiles) manchas brillantes cuando están los dos conjuntos de líneas a 45° . Estas manchas son una cosa nueva no obtenible por superposición de *intensidades* de dos redes. Por supuesto, son *debidas* a la superposición de amplitudes de los dos conjuntos de líneas. Hagamos un esbozo explicando el origen de estas "manchas extras". La configuración producida por dos redes cruzadas es similar a la producida por la difracción de un monocristal. Habrá visto la película hecha por Education Development Center (EDC antiguamente, DCI) por L. Germer, mostrando la difracción de un electrón monoenergético reflejado por la superficie de un monocristal (la técnica es más fácil para ondas reflejadas que para ondas transmitidas, si lo queremos ver en un monocristal. Similarmente, se pueden conseguir redes de difracción de Edmund Scientific Co. Son como su red de transmisión, excepto que la superficie está suavemente plateada para aumentar la reflexión.

Experimento casero

9.24 Red de difracción — filtro pasabandas de gelatina. Use la red de difracción como indicaremos para medir la longitud de onda del rojo y el verde que pasa por su filtro. Poner una fuente lineal (o puntual) próxima a una pared o una puerta. Hacer una marca sobre la pared a un pie aproximadamente, a un lado de la fuente, mirar la fuente a través de la red sosteniendo el filtro sobre la misma (o poniéndolo sobre la fuente — teniendo cuidado de fundirlo). Acercar y alejar de la fuente hasta que el color de interés aparezca superpuesto con su marca sobre la pared, medir la distancia apropiada y calcular λ . Calibrar así la

longitud de onda transmitida por su filtro rojo, verde, púrpura. Memorizar los resultados. (Entonces podrá usarse el filtro y red para hallar las longitudes de otros colores cuando así se desee, sin repetir la medida geométrica de este experimento.)

9.25 Líneas espectrales. Ponga sal de mesa sobre un cuchillo o una cuchara mojada (uno que no le importe estropearlo). Ponga el cuchillo a la llama de su cocina de gas, mire la llama amarilla con su red de difracción (esto se hace fácilmente por la noche o en un cuarto oscuro). Note que las imágenes de primer orden (y las de orden superior) de la llama amarilla de sodio son tan definidas y claras como las de orden cero de la imagen "directa". Esto se debe a que la luz amarilla es una "línea espectral" que tiene una banda angosta. (Verdaderamente, la amarilla del sodio es un "doblete" de dos líneas con longitudes de 5890 y 5896 Å.) Ahora mire una vela. El orden cero no parece terriblemente diferente de la llama del sodio, ambos son amarillos. Pero la imagen de difracción de primer orden de la vela es mucho más difusa en color, mientras que el sodio permanece definido. El amarillo de la vela, que es debido a las partículas calientes de carbón, tiene un espectro de longitud de onda que se extiende sobre (y aún más allá) todo el rango visible.

Aquí enumeramos fuentes de líneas espectrales definidas; mírelas con su red:

Vapor de mercurio: Lámparas fluorescentes, lámparas de mercurio de alumbrado público, lámparas de sol. Una lámpara de sol es conveniente por el hecho de que se conecta directamente a la línea, siendo probablemente la fuente más barata de líneas espectrales de vapor de mercurio. Su costo es: de alrededor de 10 dólares.

Neón: Se utiliza mucho en letreros luminosos. El neón tiene una profusión de líneas. Una fuente bastante monocromática es la G. E. NE-34 la cual se puede conectar directamente a la línea de 110 volt CA (el costo es aproximadamente 1,60 dólares). Otras son los probadores de continuidad de circuitos, los cuales se pueden conectar en cualquier enchufe, siendo su costo de alrededor de 1 dólar, y una "luz de noche" de neón.

Estroncio: Cloruro de estroncio (se puede conseguir en cualquier droguería por 25 centavos de dólar); disolver un poco en unas gotas de agua y ponerlas sobre una cuchara vieja a la llama. La longitud de la línea roja es una famosa longitud patrón.

Cobre: Sulfato de cobre: obtenibilidad y técnica similar a la del cloruro de estroncio. Éste da un hermoso color verde.

Hidrocarburo: Observe la llama de gas en el espectro de primer orden. Hay una imagen definida de un claro azul y una imagen definida de un verde claro. El color azul de la llama se debe a una o más líneas espectrales casi monocromáticas.

9.26 Espectro monocromático con el papel higiénico. Queme un pedazo de papel higiénico y obsérvelo con la red de difracción (sosténgala como siempre cerca de un ojo). Obsérvese la hermosa y clara llama de "primer orden". Esto muestra que la débil luz amarilla es casi monocromática con muy poca "luz blanca" debida al carbón caliente. El amarillo que se ve es ahora un familiar doblete de sodio de longitud 5890 y 5896 Å.

Ahora reconozca el "amarillo del sodio" en un fósforo de papel común con la red. La mayor parte de la luz es el "amarillo del carbón caliente", que no es realmente amarillo sino un completo espectro "blanco". ¡Pero mire cuidadosamente! En la parte amarilla del espectro de carbón, en la parte baja de la

Experimento casero

Experimento casero

cartulina donde la llama se ve azul, bajo la zona brillante del espectro del carbón, ¿puede verse una débil y poco clara llama monocromática? Si no es así, inténtelo nuevamente. Ahora queme otra y obsérvela. ¿Se puede concluir que todas las cosas tienen sal o están al menos contaminadas por ella?

Experimento casero

9.27 Franjas del sodio en Fabry-Perot. Una de las fuentes casi monocromáticas más baratas del mundo es la que se obtiene quemando un trozo de papel higiénico. Se puede usar esta fuente para franjas en el Fabry-Perot. Queme el papel. (El cuarto debe ser oscuro, quizás habrá que tener también agua a mano.) Mirar a través de la llama su imagen en incidencia casi normal en un “pedazo de vidrio”, un portaobjetos o el vidrio de un cuadro. Verá franjas como impresiones digitales. Si el vidrio es ópticamente plano, las franjas serán círculos centrados sobre la pupila; de cualquier forma pueden verse fácilmente. Si se tiene una cocina de gas o un mechero Bunsen, se puede obtener una fuente brillante de luz de sodio monocromático poniendo sal sobre un cuchillo mojado y sumergiéndolo en la llama. Así se pueden ver franjas de Fabry-Perot aun de día. Una buena fuente monocromática estable con la cual se pueden ver las franjas es la G. E. NE-34.

Experimento casero

9.28 Espectrómetro de tubo — líneas de Fraunhofer. Use un tubo de 1,5 a 2 pies de largo. Mire la red de difracción sobre un extremo, y una ranura sobre el otro. La mejor ranura es la que se hace con dos hojas de afeitar. Pegue una de las hojas de afeitar en forma permanente y coloque la otra pegada sobre una masilla que no endurezca (obtenible en cualquier ferretería) de manera que se pueda ajustar fácilmente cerrando para obtener mayor resolución, abriendo para más luz. Véase el espectro mencionado en 9.25.

Problema: ¿Se podría resolver el doblete de sodio con este espectrómetro?

Resp. No; la separación entre líneas dada por esta red de difracción es igual al ancho de la imagen debido a la difracción en la pupila del ojo.

¿Se puede resolver usando un tubo más largo?

Resp. No. Hay dos formas de mejorar la resolución. Una es conseguir una red con espaciado d menor. La otra es aumentar el número de líneas que se usan, es decir, aumentar el ancho D de la red usada. Con la red proyectada arriba, D es el ancho de la pupila (alrededor de 2 mm). Si se agrega un telescopio con una lente objetivo de 2 cm de diámetro, y si todos los rayos que entran en el objetivo pasan por la pupila, entonces con la red de difracción y la lente objetivo su resolución angular λ/D es mejorada 10 veces.

Con este espectrómetro simple se pueden ver las líneas de Fraunhofer del espectro del sol. Salga un día de sol, apile media docena de hojas de papel blanco sobre la tierra (más de una, de manera que aparezcan lo “más blanco posible”). Observar el papel al sol con el espectrómetro. Use un saco o una manta para cubrir la cabeza de manera de evitar la luz solar, si no tendrá dificultad para ver el espectro de primer orden. Ajuste la ranura alrededor de 1/2 mm. Observe 3, 4 ó 5 líneas oscuras que cruzan el espectro continuo del sol. Si no se ve nada, vuelva a probar, ajuste el ancho de la ranura para una intensidad conveniente. Otra técnica es cubrir la ranura con varias capas de papel encerado; use una ranura bastante cerrada y observe hacia el cielo cerca del sol con el espectrómetro.

Las líneas oscuras de Fraunhofer que se ven son líneas de absorción. Los átomos, en el relativamente frío gas del manto exterior del sol, son excitados por el espectro continuo emitido por el sol caliente. Las frecuencias que corresponden a la resonancia natural de los átomos los excitan. Estos toman energía del espectro continuo en su frecuencia de resonancia. Así, que el gas exterior es opaco a dichas frecuencias, de manera que el espectro presenta líneas

negras que corresponden a los colores donde la luz solar ha sido completamente absorbida. Las líneas más fáciles de ver son unas que están muy poco espaciadas en la zona amarillo-verde debidas al hierro, calcio y magnesio; la línea H en la zona azul-verde debida al hidrógeno; y varias líneas poco espaciadas en la zona del azul debidas a los hidrocarburos (similares a las líneas de emisión que se ven con una llama de gas). La línea D del sodio está presente también, pero muy difícil de ver (para mí al menos). Para saber dónde buscarlas, observar las líneas de emisión del sodio usando sal sobre una llama de gas. Es decir, el color que se “pierde” en el espectro de Fraunhofer.

Experimento casero

9.29 Difracción de ondas de agua. Ilumine una bañera desde arriba con una lámpara de incandescencia que tenga un filamento pequeño y un bulbo claro (transparente) a fin de conseguir sombras definidas. Generar ondas moviendo un palo que flote o una madera colocada atravesada. Coloque flotando una taza de café como un obstáculo opaco. Estimar la distancia detrás del obstáculo a la cual la sombra de la taza “electriza”. Suponga que no conoce el diámetro de la taza. Determínelo (aproximadamente) multiplicando la “longitud de cicatrización”, L_0 , por la longitud de onda, λ , y sacando la raíz cuadrada. (Suponemos que sabe dónde aparece esta fórmula. Véase Sección 9.6.) Ésta es una de las formas de hallar el diámetro del núcleo — midiendo su “sección eficaz” de difracción. (Nota: es algo difícil medir la longitud de onda de las ondas de agua con la burda técnica que sugerimos; es más fácil mover el palo a un tiempo reproducible (tan rápido como se pueda) y medir la frecuencia. La longitud de onda puede entonces obtenerse de la relación de dispersión para ondas de agua, como está tabulado en la Sección 4.2. ¿Cómo es la medida de la sección eficaz, comparando con el diámetro de la taza medido directamente?

9.30 ¿Qué ancho tiene una “onda plana” de una fuente puntual distante? Como hemos mencionado a menudo, las ondas provenientes de una fuente puntual distante se “comportan” como una onda plana sobre una “región limitada”, transversal a la línea que va desde la fuente puntual al punto campo. ¿Cuál es el límite de la región? Supongamos que la fuente está a una distancia L y deseamos considerar una región plana circular de radio R transversal a la línea mencionada anteriormente. ¿Cuál debe ser el valor de R para que la fase en el centro del círculo y en los bordes difiera en menos de $\Delta\phi$ radianes?

Resp. La fase en el centro del círculo está adelantada respecto a la del borde (el centro está más cerca de la fuente) en $\Delta\phi = \pi R^2 / L\lambda$. Así, la fase es “la misma” sobre todo el plano del círculo si la extensión del área del círculo es pequeña comparada con $L\lambda$.

9.31 La radioantena parabólica más grande del mundo hasta el presente es la del National Astronomic Observatory, Green Bank, West Virginia, es un disco parabólico de 300 pies de diámetro. ¿Cuál es su resolución angular en radianes y en minutos de arco (las unidades usadas por los astrónomos) para la famosa radiación de 21 cm del hidrógeno?

Resp. Una fuente puntual será vista como una pelota de balonvolea a una distancia de 300 pies.

9.32 Telescopio y pupila. Suponga que tiene un telescopio simple consistente de un lente objetivo y un ocular. La ampliación angular es f_1/f_2 , donde f_1 y f_2 son las distancias focales del objetivo y el ocular respectivamente. Mostrar que no todos los rayos de un objeto distante que atraviesan un objetivo de gran diámetro se introducen en su ojo y que en realidad el “diámetro útil” del objetivo es alrededor de f_1/f_2 veces el diámetro de su pupila. De esta manera, en un telescopio de potencia 8, el haz saliente es un haz paralelo de ancho 4 mm (dos veces más ancho que la pupila del ojo, de manera que el ojo no necesita estar perfectamente alineado y también de manera que fuera del eje en el campo

de visión entregan toda su luz). La lente objetivo deberá ser de 32 mm de diámetro. Un diámetro mayor es malgastar la lente objetivo.

Experimento casero

9.33 Tamaño de la pupila y actividad mental. Si alguien nos muestra un elegante individuo del sexo opuesto, el diámetro de la pupila puede aumentar en un 30 % de acuerdo con Eckhard Hess, *Scientific American*, p. 46 (abril, 1965). Este gran cambio es muy difícil de detectar en la propia pupila usando una hoja de aluminio con un agujerito que cubre el ojo, con una fuente brillante que ilumina el agujerito como discutimos en la Sección 9.7. Concentrándose, puede variar el tamaño de la pupila, dependiendo de lo que se está pensando si tenemos alguien que lee a nuestro lado. (Concéntrese en lo que escucha, no en el tamaño de la pupila.)

Experimento casero

9.34 Difracción por un obstáculo opaco. Este trabajo experimental sale bien con una fuente puntual blanca, consistente en una lámpara del tipo utilizado en un reflector, con la lente eliminada y el reflector cubierto de una tela oscura (el tamaño del filamento es de alrededor de 1/2 mm). La fuente debería estar por lo menos a 3 m del obstáculo, de manera que se obtenga una onda plana coherente que incida sobre el obstáculo del tamaño de un alfiler. La pantalla detectora es un portaobjeto sobre el que va pegado una cinta "Scotch" transparente. Hacer que la sombra del objeto incida sobre la pantalla, con ésta sostenida a un pie de la cara (a cualquier distancia que halle conveniente para observar la pantalla). El ojo deberá estar casi en línea con la fuente luminosa y la imagen sobre la pantalla a fin de aprovechar la gran intensidad dispersada a pequeños ángulos de la pantalla transparente. Aparte de observar las bellas franjas, un propósito del experimento es explorar (someramente) el concepto de "longitud de la sombra", L_0 , dado por $L_0\lambda \approx D^2$, donde D es el ancho del obstáculo. Entre otras cosas observar un alfiler (si el diámetro del alfiler es de 1/2 mm, entonces $L_0 \approx 50$ cm para la luz visible), y un cabello (el mío tiene un diámetro de aproximadamente 1/20 de mm. Esto da $L_0 \approx 1/2$ cm).

Primero considerar el alfiler. Colocar la pantalla a 5 ó 6 m del alfiler. La imagen de difracción será entonces lo suficientemente grande como para que no se necesite una lupa. Puede ayudar el agitar ligeramente de un lado hacia otro el portaobjeto a fin de borrar el efecto de las irregularidades de la cinta "Scotch". Observe la famosa mancha brillante en el centro de la sombra de la cabeza del alfiler y la línea brillante en el centro del cuerpo del alfiler. ¿Es la mancha o la línea más brillante o más oscura que la pantalla misma (en un punto exterior a la imagen)? A continuación examine la imagen del alfiler con la pantalla a una distancia de sólo 5 cm del alfiler. (Se necesitará una lupa, a menos que se tenga muy buena vista.) Obsérvese que la sombra es de un hermoso negro sólido, sin ninguna mancha brillante en el centro. Esto es debido a la gran proximidad menor que L_0 . En los bordes se ven franjas, como era de esperar (de la discusión en la Sec. 9.6).

Ahora considerar el cabello. Ponga la pantalla inmediatamente detrás del cabello (es decir, alrededor de 1 mm detrás). Observar la sombra con una lupa. Será fina y negra puesto que L es pequeña comparada con L_0 . Ahora coloque la pantalla a una distancia de unos pocos cm. Verá unas bonitas franjas. Colóquese a 5 ó 6 m, es decir, varios cientos de veces L_0 . De acuerdo a nuestra discusión, la sombra estará prácticamente "cicatrizada" y la imagen del cabello será muy difícil distinguirla del fondo iluminado por la fuente. Los ojos son detectores del contraste muy sensibles, así que algo se podrá ver. Observar otras cosas, filos agudos, agujeritos en hojas de aluminio, etc.

Experimento casero

9.35. Scotchlite. Se puede conseguir cinta adhesiva roja del tipo Scotchlite en una ferretería. Ésta se usa para decoración, reflectores de seguridad, niveles, etc. Observarla con una lupa. Pegue un pedazo sobre una pared, y alúm-

bre la con un reflector apuntado hacia ella, con el reflector sostenido frente a la nariz hacia el lado derecho. De esta manera verá que la luz es retrodirigida a 180° . Ahora mueva gradualmente el reflector hacia afuera mientras se dirige el haz hacia la cinta. ¿De qué forma se puede calcular el ancho angular del haz retrodirigido? ¿Por qué se espera un ancho angular? Es decir, ¿por qué no da un haz perfectamente retrodirigido?

9.36 Coherencia y polarización. La luz emitida por una fuente puntual no polarizada pasa a través de un polarizador lineal con su eje de transmisión a 45° respecto del eje x y del y . Entonces incide sobre una doble ranura. Cada una de las ranuras está cubierta por un polarizador lineal, una de las ranuras tiene el eje del polarizador según el eje \hat{x} y el otro lo tiene según el eje \hat{y} .

(a) Supongamos que se observa la configuración de interferencia con el ojo sin ninguna ayuda. ¿Piensa que lo que se verá es la usual configuración de interferencia de una doble ranura? ¿Qué es lo que espera?

(b) Ahora supongamos que observe la configuración de interferencia mientras sostiene un polarizador lineal en frente de un ojo. ¿Qué espera ver? ¿Qué sucede cuando rota el polaroide frente a su ojo?

(c) Supongamos que observa la configuración con un polarizador circular usado como analizador. ¿Qué configuración espera ver?

Hay varias sutiles variaciones que se pueden hacer sobre este problema:

(i) Ponga un polarizador circular dextrógiro sobre una ranura y un polarizador circular levógiro sobre la otra y repetir las observaciones de arriba. (ii) Agregar una placa de un cuarto o media onda detrás de las ranuras, etc.

9.37. Interferómetro de doble ranura. Supongamos que cubrimos una de las dos ranuras con un portaobjetos y la otra sin nada. Si el portaobjetos tiene un espesor de 1 mm, pruébese que la luz monocromática de longitud de onda 5000 \AA se retarda en una ranura respecto de la otra alrededor de 1000 longitudes de onda. Si la configuración de doble ranura no se borra, la luz debe ser bastante monocromática. ¿Qué ancho debe tener la banda de longitudes de onda (en angstroms) para que la fase relativa de las dos ranuras varíe en menos de 180° de un borde al otro de la banda de longitudes de onda? ¿Cómo podría usarse este hecho para medir la banda de la línea espectral? (¿Quién podría medir y hacer un gráfico, en función de quién y cómo se podría obtener el ancho de banda del gráfico?)

9.38 Ampliación de agujeros. Deducir una fórmula para ampliación de un amplificador de agujeros. Controle la fórmula como sigue: hacer dos marcas separadas 2 cm sobre un papel; hacer dos marcas separadas 2 mm sobre otro. Ponga un agujero sobre un ojo y nada sobre el otro. Ambos papeles deben estar iluminados desde atrás (así es más fácil observarlos). Con ambos ojos abiertos, mire con uno de ellos a través del agujero de la marca de 2 mm mientras con el otro mira la marca de 2 cm. Acerque la marca de 2 mm hasta que se superpongan los dos conjuntos de marcas. Medir las diferencias apropiadas.

Experimento casero

9.39 Partículas que flotan en el ojo. Use una hoja de aluminio con un agujerito, iluminada por una fuente extensa para estudiar las partículas. Cuando haya localizado una, intente eliminarla pestañeando. ¿Puede lograrse? "Gire" sus ojos una o dos veces, luego inspeccione los remolinos de la partícula. Ahora intente ver si está más cerca de la pupila o de la retina: variando la distancia del agujerito a su ojo. El tamaño del círculo de luz cambia. (Hacer un esbozo intentando explicar por qué). Cualquier objeto con la misma colocación que la pupila debería cambiar aparentemente de tamaño en la misma relación que la proyección de la pupila. (¿Por qué?) ¿Qué hace la partícula? ¿Está más cerca de la retina o de la pupila? Ahora tratar de estimar su longitud y diá-

Experimento casero

metro. Para estimar el diámetro, compárese con un cabello sostenido enfrente de la pupila entre el agujero y la pupila. Para esto, se necesita un agujerito muy pequeño, más pequeño que el que pueda hacer con un alfiler. Arrugue una hoja de aluminio y luego alísela. Observar a través de los agujeritos accidentalmente producidos. (Éstos sí que son pequeños — cuanto más pequeños menor es la intensidad que los atraviesa.) Ahora observe un cabello. Verá su sombra y una bella franja de difracción en sus bordes. Comparar su tamaño con el de una partícula. ¿Son éstas más finas que un cabello? (Nota: un cabello humano tiene un diámetro de alrededor de $1/20$ mm, es decir, 50μ . Un glóbulo rojo típico tiene un diámetro de 5 ó 6μ .)

Experimento casero

9.40 Bolitas. Consiga bolitas de vidrio transparente en una juguetería. Coloque una fuente puntual a un metro más o menos y enfóquela en un punto de la bolita. ¿A qué distancia de la bolita está el punto focal? ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio? (¿Está de acuerdo la situación del punto focal con los resultados deducidos en la Sección 9.7 si se toma $n = 1.5$?) Observar alguna cosa pequeña. Medir la ampliación con la técnica del Experimento casero 9.38.

9.41 Lentes planoconvexas. Una lente planoconvexa es una lente que tiene un lado plano y el otro esférico (o cilíndrico). Deducir una fórmula para la colocación del punto focal para luz incidente sobre el lado plano de la lente.

Experimento casero

9.42 Medida del índice de refracción del líquido. Use una jarra de vidrio vacía, o por ejemplo un biberón transparente. (Se puede usar también el bulbo transparente de una lámpara.) Con el recipiente en posición vertical, lleno de líquido transparente e iluminado desde un lado se tiene una lente cilíndrica gruesa como se discutió en la Sección 9.7. Con el recipiente descansando sobre su lado y semilleno se tiene una lente plano-convexa, el lado plano es la superficie del líquido. Iluminado desde arriba con una fuente lineal o puntual, mida la localización del punto focal. Use la fórmula apropiada para hallar el índice de refracción. Hacer esto con agua, alcohol y aceite mineral.

9.43 Cámaras satélites. De acuerdo con los diarios, tenemos un satélite que transporta una cámara que puede resolver objetos de 1 pie de diámetro. ¿Cuál debe ser el diámetro de la lente si el satélite se halla a una altura de 150 millas?

Experimento casero

9.44 Lentes interiores y exteriores. Un biberón lleno de aire y sumergido en agua es una lente divergente. Usar una pecera con lados de vidrio, o una cacerola ordinaria con un espejo para cambiar la dirección de un haz vertical dirigido hacia abajo y obtener un haz horizontal. Poner un poco de leche en el agua para poder ver el haz. Un buen haz se obtiene con un reflector cubierto con un pedazo de cartulina opaca, con un agujero descentrado. (El bulbo del reflector es usualmente irregular en la punta, además no es deseable la luz directa del bulbo, ya que no sigue la ley del cuadrado inverso de la distancia, sino el haz paralelo del reflector parabólico.) Se pueden estudiar lentes de aire y de aceite mineral y vidrio usando una suspensión de leche en agua para poder ver el haz.

Experimento casero

9.45 Mezcla de colores. Sus ojos y su cerebro no analizan la luz (en la forma en que su oído analiza los sonidos). Se requiere alguna práctica, pero se puede reconocer la diferencia entre un color debido a una luz monocromática y el color debido a una mezcla de longitudes de onda. Psicológicamente, el "blanco" es un color. Sin embargo, su red de difracción demuestra que es el espectro total de las longitudes de onda visibles.

(a) Observe cosas con su filtro púrpura a través del cual pasa el rojo y el azul pero se absorbe el verde.

(b) Observe dos fuentes blancas separadas — fuentes lineales o lámparas de incandescencia — con su red de difracción. Varíe la distancia a las dos fuentes hasta que el espectro de primer orden a la izquierda de la lámpara de la derecha pueda ser superpuesto al espectro de primer orden a la derecha de la lámpara de la izquierda. Así se puede superponer cualquier par de longitudes de onda y ver qué color “psicológico” resulta. Para superponer dos longitudes de onda “puras” se deben usar dos fuentes lineales. Se consiguen hermosos colores. ¡Inténtelo! (Este experimento ha sido sugerido por Joseph Doyle.)

9.46 Un objeto puntual está a dos metros de una lente positiva de potencia 1 dioptría. ¿Dónde está la imagen? (El objeto está sobre el eje del lente.)

9.47 Una lente delgada usada como lupa tiene una amplificación = 5. Una segunda lente delgada tiene una amplificación 7. Cuando se usan ambas lentes (una lente inmediatamente siguiendo a la otra), ¿cuál es la amplificación del conjunto? ¿Es 35, 12, 2?

9.48. Amplificación longitudinal. Mostrar que si un objeto puntual sobre el eje de una lente delgada positiva se mueve a una distancia dp a lo largo del eje, entonces la imagen se mueve en una cantidad dq , donde dq tiene la magnitud q^2/p^2 veces dp .

9.49. Profundidad de foco. Un objeto puntual que está a una distancia p es enfocado sobre un film colocado a una distancia q detrás de la lente delgada del diámetro D . Otro objeto puntual que está a una distancia $p + \Delta p$ no estará enfocado sobre el film; estará enfocado antes (o después) del film y originará un círculo de confusión sobre el mismo.

(a) Mostrar que el diámetro d del círculo de confusión sobre el film de un punto fuera de foco está dado por $d \approx D(q/p^2)\Delta p$. Así, para un círculo de confusión “tolerable” dado, es decir, un valor dado de d y para un dado p y q , la “profundidad local” Δp es inversamente proporcional al diámetro D de la lente. Pequeños D dan una gran profundidad focal. La distancia focal dividida por el diámetro es lo que se llama el “número f ”. Así, un número f grande significa un pequeño diámetro máximo de la lente y una profundidad focal debería ser infinita. Verifíquese que con un agujerito amplificador todas las cosas están “en foco” desde $p \approx 1$ cm hasta el infinito, sin tener que enfocar con los músculos de acomodación.

(b) Si D es demasiado pequeño no podemos despreciar la difracción. Mostrar que la difracción de un círculo de confusión $d \approx q\lambda/D$. Ahora supongamos que no está limitado por la densidad de grano del film fotográfico o cualquiera otra cosa del film. También supongamos que no está limitado por la intensidad (lo cual podría requerir un gran D). Definir d^2_{pr} como la suma de los cuadrados de las dos contribuciones d , de la profundidad de foco y la otra de la difracción. Minimizar d^2_{pr} como función del diámetro D de la lente, manteniendo las demás variables constantes. Mostrar que para un dado λ , p y Δp , la mínima imagen borrosa es obtenida con un D tal que cumple la relación $D^2 = \lambda p^2 / \Delta p$.

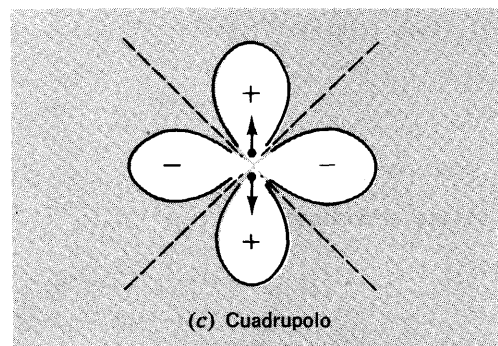
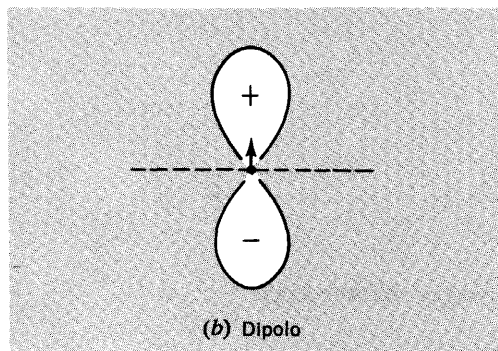
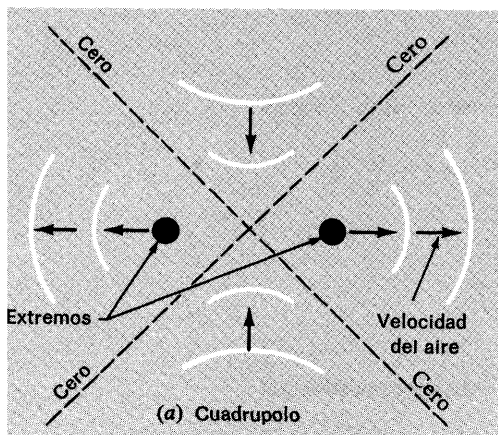
(c) Olvídense de la difracción. Supóngase que se fotografía a dos personas de una vez; una está a 15 pies y la otra a 25. La distancia focal de la lente es de 10 cm. Se quiere que el círculo de confusión de *ambas* personas sea menor que 1 mm en el “espacio objeto”, es decir, 1 mm “sobre la persona”. Hallar el número f necesario. (Usemos aproximaciones; por ejemplo, tomemos $p \approx 20$ pies como promedio.)

(d) La difracción, ¿hace la imagen notablemente peor en la geometría de la parte (c)?

Respuesta: El número f es ≈ 50 . La difracción contribuye tanto como la profundidad focal al desenfoque.

Experimento casero

9.50. Configuración de radiación del diapasón—radiación cuadrupolar. Sostenga un diapasón cerca de su oído. Rótelo según su eje (el del mango) y escuche el máximo y el mínimo de intensidad. Sostenga el diapasón en el extremo de un tubo que ha sido construido para resonar con el diapasón. Lentamente, rótelo alrededor de su eje. En 360° de rotación hallará cuatro ángulos de intensidad nula y cuatro ángulos de intensidad máxima. Sostenga el diapasón de manera que esté en un cero de intensidad. Sin perturbar la posición relativa del diapasón y el tubo, inserte un pedazo de cartulina que semicierre el extremo del tubo, dando a una de las ramas del diapasón camino libre, pero bloqueando la otra. ¿Qué sucede? ¿Por qué? Ahora haga sonar dos diapasones uno frente al otro, sostenga uno en cada extremo del tubo y escuche las pulsaciones. Cuando ha establecido el ritmo, gire un diapasón en 90° alrededor de su eje, de manera que pase de un ángulo de máxima intensidad al siguiente. Las pulsaciones no continúan normalmente. Justamente, después de girar, hay dos pulsaciones, cuando debería haber sólo una y entonces las pulsaciones continúan con el ritmo original. Salvo que tenga un buen oído para mantener pulsaciones estacionarias, pueden aparecer perturbaciones producidas por uno mismo, las nuevas pulsaciones están sobreimpresas a las viejas, pero no tendrá dificultad en escuchar las pulsaciones extras que aparecen cuando gira el diapasón. (Sirve de ayuda contar "1 y 2 y 3 y ...", los números para los máximos y las "y" para los mínimos; entonces deje de contar influido por lo que se escucha al girar el diapasón.)



¿Cuál es la explicación? Piense cómo actúa el diapasón sobre el aire en su vecindad. Cuando las ramas se separan empujan el aire hacia afuera de las mismas, dándole una determinada velocidad al expellerlo. Esto origina en la región entre ramas un ligero déficit de aire, puesto que las ramas al expandirse dejan aún más espacio entre ellas. El aire de los lados se precipita para llenar el déficit. La velocidad inducida al aire es: hacia afuera para el aire que está en el plano de las dos ramas y hacia adentro para el aire que está en el plano que pasa entre las dos ramas. En el siguiente medio ciclo, las ramas se dirigen hacia adentro. El aire es succionado en el plano de las ramas y expelido en el plano que pasa entre las ramas. En algún lugar entre estas dos direcciones debe haber una zona de velocidad nula, es decir, donde la configuración de velocidades tiene un *nodo*. Ésta es la explicación para los cuatro máximos y los cuatro mínimos cuando se rota el diapasón. La configuración de radiación es la que se muestra en la parte (a) de la figura en el instante en que las ramas se están moviendo hacia afuera. Tal configuración de radiación es lo que se llama *configuración de radiación cuadrupolar*. Si se tiene una sola rama en lugar de dos, la configuración de radiación de máximos y mínimos y la de fases relativa será la de la configuración de radiación *dipolar*. Si se toma un dipolo oscilante (aquí será una onda sonora dipolar, pero esto se aplica también a ondas de radio y a otros tipos de ondas) y se superpone su radiación a la de un dipolo idéntico, que está ligeramente desplazado en posición y oscilando a 180° fuera de fase respecto del primero, se consigue radiación dipolar. Se pueden conseguir diversas configuraciones cuadrupolares, dependiendo éstas del desplazamiento relativo a la configuración del dipolo. Pero todos tendrán el mismo aspecto: Hay cuatro "lóbulos" de intensidad fuerte, donde se produce interferencia constructiva de los dos dipolos. La fase en los lóbulos vecinos difiere en 180° . Hay nodos entre los lóbulos. (Una configuración dipolar tiene justamente dos lóbulos y dos nodos.) Las figuras muestran una configuración dipolar y dos cuadrupolares; la configuración (b) es un gráfico polar para la función de onda de una radiación dipolar en un instante dado; la (c) se obtiene por superposición de dos dipolos que están desplazados ligeramente uno del otro y que oscilan desfasados en 180° . Éste es el que corresponde al diapasón. El (d) se obtiene superponiendo dos dipolos que están ligeramente desplazados uno del otro según la dirección de los nodos y que oscilan a 180° fuera de fase.

9.51 Suponga que produce un haz de radio con una antena radiotransmisora plana de área A_T . Éste es recibido con una antena de área A_R localizada a una gran distancia D del transmisor. Mostrar que la potencia transmitida P_T y la recibida P_R están relacionadas aproximadamente por

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{A_R A_T}{\lambda^2 D^2}.$$

Suponga que las antenas receptoras y transmisoras consisten cada una en un "cono" de microonda y que la entrada consiste en una abertura en forma de cuadrado de una longitud de lado de 3 m. Suponga, además, que la frecuencia de la microonda es 1000 Mc y que la distancia entre el transmisor y el receptor es de 10 millas. ¿Cuál es la relación entre la potencia transmitida y la recibida?

9.52 Configuración de interferencia de N ranuras idénticas. La amplitud está dada por la ecuación (54), Sección 9.6. Hacer una representación gráfica de la suma de las correspondientes amplitudes complejas para un valor "arbitrario" de $\Delta\phi$ (la fase relativa entre contribuciones de ranuras próximas). Hacer una representación gráfica para el primer cero adjunto al máximo principal; de aquí deducir gráficamente el hecho de que $\Delta\phi = 2\pi/N$ para este cero. Mostrar con la representación gráfica que la constante de fase para la superposición es el promedio de las constantes de fase de la primera y la última contribuciones.

9.53 Corrección de la aberración cromática. Usando dos diferentes clases de vidrios en una lente compuesta, se puede corregir algo de la aberración cromática. En lugar de una lente consideremos un prisma delgado. Proyectar un prisma tipo cuña con ángulo α_1 y α_2 que dé una desviación dada θ_0 a una longitud de onda $\lambda_0 = 5500 \text{ \AA}$ y que no halla cambio de desviación con la longitud de onda, dado que los dos tipos de vidrio tienen índices de refracción $n_1(\lambda)$ y $n_2(\lambda)$, donde estas funciones son conocidas.

$$\text{Resp.} \quad \alpha_1 \frac{dn_1}{d\lambda} = \alpha_2 \frac{dn_2}{d\lambda}.$$

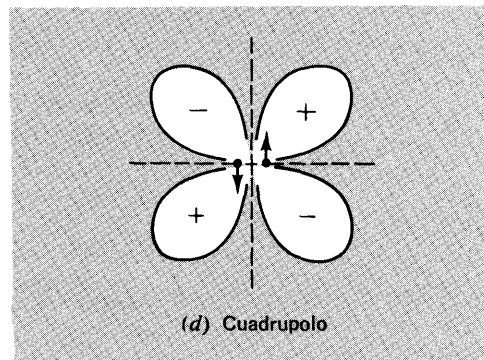
Ahora expresar la desviación θ del prisma para la longitud de onda λ en función de la serie de Taylor en $\lambda - \lambda_0$. Desarrollarla sólo hasta el término del segundo orden. $(\lambda - \lambda_0)^2$. ¿Cómo se podría corregir la aberración cromática de otra manera (dándole lo que necesite)?

Experimento casero

9.54 Viendo bajo el agua. Observe objetos bajo el agua usando una máscara de bucear. Deducir el hecho de que las cosas parezcan estar tres o cuatro veces más lejos de lo que en realidad están. Una demostración especialmente vívida es observar a alguien que en una piscina esté sumergido con la cabeza fuera del agua. Sumerja la mitad inferior de su máscara de manera que el nivel de agua esté al nivel de sus ojos. Entonces podrá ver la cabeza de la persona a través del aire y ver el cuerpo de la misma a través del agua.

Experimento casero

9.55 Vidrios bajo el agua. Cuando sumerge su cabeza bajo el agua sin la máscara, las cosas se ven borrosas, debido a que el cambio de índice de refracción



Problema 9.50 Configuración de radiación del diapasón. (a) Cuadrupolar. (b) Dipolar. (c) Cuadrupolar. (d) Cuadrupolar.

del agua al ojo no es muy grande. Como simplificación suponga que no hay cambio de índice. También suponga que la lente de su ojo tiene muy poco efecto, como si todo el enfoque fuera hecho en la interfase aire-ojo. (Se trata de una simple aproximación. En realidad puede ver debajo del agua hasta la misma extensión.) Suponga que la distancia focal de la primera superficie es de 3 cm y que un haz de luz paralela está enfocada en la retina. Cuando, mira debajo del agua se pierde el poder de enfoque. Proyectar vidrios, que al usarlos debajo del agua permitan ver claramente. Usar lentes con índice de refracción 1,5. Mostrar que si la distancia focal, cuando se usan debajo del agua, es de 3 cm, entonces, cuando se usan en aire, la distancia focal es alrededor de 1 cm. Si una de estas lentes se usa como lupa, ¿cuál es su poder de ampliación? Suponga que usa una bolita de vidrio ordinario por lente. Se quiere formar una imagen (de un haz paralelo en el agua) 3 cm detrás de la superficie de la bolita. ¿Cuál debe ser el diámetro de la bolita?

Resp. Alrededor de 1,7 cm. Ahora consiga una e inténtelo. (Sosténgala cerca del ojo.)

Experimento casero

9.56 Interferencia por luz dispersada. Aquí tenemos una forma simple de obtener hermosas líneas de interferencia coloreadas. Frote un poco de talco sobre un espejo ordinario. (También se puede usar harina o ceniza, o simplemente condensar el aliento sobre el espejo.) Párese a varios pies del espejo. Alumbre con una pequeña linterna de bolsillo (de las de tipo lápiz) y observe la reflexión. (O use cualquier reflector tapando la mayor parte de él con la mano, de manera de tener una fuente de menos de 1 cm; o use una vela.) ¡Advierta las franjas! Inténtelo en diferentes posiciones de la fuente luminosa, acercándola y alejándola del espejo. Las franjas se producen por la interferencia de las siguientes clases de rayos: el primero es el que pasa a través de los granos del polvo dispersante, reflejándose especularmente en el espejo, volviendo hacia nuestro ojo, sin ser dispersado tampoco al volver. La segunda clase es la que pasa a través del polvo sin ser dispersada, siendo reflejada especularmente, pero en el viaje de vuelta es dispersada por los mismos granos de polvo. Los granos de polvo son transparentes (se ven blancos por la misma razón que se ve blanco el polvo de vidrio). La dispersión es muy próxima a la dirección hacia adelante para la totalidad de los rayos. Así, cada uno de los dos rayos interferentes pasa a través de un mismo espesor de material transparente en un grano dado. Deducir del hecho observado que la franja central, que aparentemente pasa por la imagen de la fuente puntual, es siempre un máximo de interferencia. Para luz blanca es blanco. Las franjas comienzan a colorearse después de una distancia de varias franjas a cada lado de la franja central. La apariencia geométrica de las franjas no es fácilmente calculable. Véase A. J. de Witte "Interference and scattered light" *Am. Jour, Phys.* 35, 301 (abril, 1967).

9.57 Interferómetros estelares. (a) Una doble ranura seguida de una lente y una película fotográfica puede dar una resolución angular $\delta\theta \approx \lambda/d$, donde λ es la longitud de onda y d es la separación entre ranuras. Así se puede detectar la estructura de objetos astronómicos, que emiten luz visible que esté sostenida en un ángulo λ/d o mayor. Justificar la afirmación precedente.

(b) Cuando d es del orden de 30 cm, las turbulencias de la atmósfera terrestre, que originan variaciones del índice de refracción del aire del medio, producen saltos de fase relativos del orden de π para los dos caminos del objeto astronómico a las dos ranuras (los dos caminos tienen una separación de alrededor de un pie en toda la atmósfera). Mostrar que el resultado límite de la resolución angular es alrededor de 2 microrradianes para la luz visible en la superficie de la tierra.

(c) Ahora reemplace las dos ranuras ópticas por dos radioantenas que detecten una longitud de onda de 30 cm. En lugar de una lente, que fue usada para hacer incidir en un lugar las ondas luminosas de las dos ranuras, a fin de

producir las interferencias, ahora usamos un cable coaxial o también un retransmisor para cada antena, para mandar la señal a una central receptora. Esta central tiene la función de la emulsión fotográfica. Mostrar que para tener la misma resolución que para la luz visible con ranuras separadas por 30 cm, las radioantenas deberán estar separadas 180 km.

(d) Ahora bien, el tamaño de cada turbulencia es de unos pocos pies; así que una vez que los caminos están separados por varios pies, los saltos de fase acumulados al azar por los caminos al pasar a través de la atmósfera, son esencialmente independientes de la separación de los caminos. Como primer intento, por consiguiente, podríamos suponer que el efecto de la atmósfera, cuando las antenas están separadas 180 km, debería ser el mismo que el efecto para las dos ranuras con luz visible separadas por unos pocos pies, y así podríamos predecir que las variaciones del índice de refracción arruinaría la resolución angular de las antenas. Realmente, es cierto que el índice de refracción del aire para las radioondas no es demasiado diferente que el índice para la luz. Sin embargo, el correspondiente salto de fase relativo, para la onda de 30 cm, es varios cientos de veces más chico que para la luz visible. ¿Por qué ocurre así?

(e) El radiointerferómetro no sufre las variaciones del índice de refracción de la atmósfera, y así podemos aumentar la separación entre antenas a más de 180 km, obteniéndose, por consiguiente, mejor resolución que con el interferómetro usado para luz visible. (Por supuesto, el objeto astronómico debe emitir ondas de 30 cm así como luz visible, si estamos detectando con ambos métodos.) Podemos de esta manera proyectar un interferómetro, por ejemplo con una antena en Nueva York y otra en California, lo que nos daría una línea de base de aproximación de 3000 km y correspondientemente una resolución angular de 10^{-7} rad. Desgraciadamente hay un nuevo problema, y es la variación de fase introducida por los cables que transportan la señal (debido a variaciones de temperatura) o por la transmisión de las dos antenas a la estación central, donde las señales se superponen para producir la interferencia. La cantidad de aire sobre nuestra cabeza es equivalente a una capa uniforme con un espesor de alrededor 8 km y con una densidad igual que la que tiene al nivel del mar. La cantidad de aire entre Nueva York y California y alguna estación central en Midwest es varios cientos de veces más que aquélla, y así no podemos trabajar. ¿Qué deberíamos hacer? He aquí una ingeniosa solución dada por N. Broten, et. al., "Long Base-line Interferometry Using Atomic Clocks and Tape", *Science* 156, 1952 (23 junio, 1967): En cada estación hay un reloj atómico, por ejemplo, un maser de hidrógeno oscilando a 1000 MHz (10^9 cps). Tal reloj puede tener una estabilidad de una parte en 10^{14} , lo que significa que varía la fase al azar, pero solamente un ciclo en 10^{14} ciclos. Mostrar que tal reloj es estable (varía en menos de un ciclo) para el tiempo del orden de un día.

(f) Suponga que queremos medir la radioonda de una estrella cuya frecuencia central es de $\nu_0 = 1000$ MHz (la que corresponde a una radioonda de 30 cm) con un ancho de banda de $\Delta\nu = 1$ MHz. El oscilador local oscila a $\nu_0 = 1000$ MHz. En cada estación, la señal del oscilador local es superpuesta con la señal de la antena. Si el oscilador local nos suministra una corriente $\cos \omega_0 t$ y la señal de la antena una corriente $\cos(\omega t + \phi)$, entonces la superposición de las dos corrientes, elevadas al *cuadrado* y promediadas sobre un ciclo (a 1000 MHz) da una potencia $P = I^2 R$ con la dependencia temporal:

$$P = 1 + A^2 + 2A \cos[(\omega_0 - \omega)t - \phi],$$

veces alguna constante. Justificar esta fórmula.

(g) Si $\nu_0 t$ se conoce con un error menor que un ciclo para $t = 1$ día, entonces P se conoce con un error menor que un ciclo a la frecuencia más baja de "pulsación" $\nu_0 - \nu$ para $t = 1$ día. La frecuencia del oscilador está centrada sobre la banda deseada. Entonces el promedio de $\nu_0 - \nu$ en la banda de la señal detec-

tada es cero. El ancho de banda $\Delta \nu$ es, aproximadamente, 1 MHz. Esta señal, P , con frecuencias que van de cero hasta alrededor de 1 MHz, es registrada sobre una cinta en cada estación. (Las cintas usadas para registrar video en TV tienen suficiente ancho de banda para este fin.) Después de un tiempo de registro en cada estación (de menos de un día), las cintas registradoras pueden *transportarse*, por ejemplo en avión, hasta la oficina del físico. Los dos registros se sincronizan y se las reproduce de manera de superponer sus señales. A efecto de que la información de fase no se pierda, es necesario que ninguno de los registros pierda un ciclo, o que la sincronización lo sea dentro del ciclo (un ciclo en la frecuencia de oscilación de la señal P en cada registro). Esta señal tiene frecuencias componentes desde cero hasta, aproximadamente un 1 MHz, puesto que éste es el ancho de banda original. Así, pues, los dos registros deben estar sincronizados con una precisión mayor que 1 microsegundo. Además, cuando los registros fueron hechos en la misma antena, deberán tener el tiempo marcado sobre ellos, de manera que el físico sepa cuándo se produce la simultaneidad de la señal. Las marcas del tiempo sobre los registros deben ser hechas con una precisión mayor que 1 microsegundo. La sincronización y el marcado del tiempo en los registros ordinarios de televisión están hechos con una precisión mayor que 1- μ seg, ¡esta exactitud es rutinaria! De esta manera es posible proyectar un interferómetro estelar con una radioantena en Nueva York, juntamente con un registrador de cinta y una estación similar en California. El interferómetro barre el ciclo mientras la tierra gira. La "constante" de fase ϕ en cada corriente de antena es justamente la cantidad kr , donde r es esencialmente la distancia de la antena a la estrella. Así, la antena 1 en Nueva York tiene una corriente $A_1 \cos(\omega t + kr_1)$ debida a una estrella dada, y la antena 2, en California, tiene una corriente $A_2 \cos(\omega t + kr_2)$ debida a la misma estrella, para la misma componente ω de la señal. Supongamos, para mayor simplicidad, que las antenas son idénticas en cuanto a construcción y que reciben amplitudes iguales $A_1 = A_2 = A$. Mostrar que cuando las corrientes producidas por los registros se superponen, la corriente resultante, $P_1 + P_2$, es proporcional a $1 + A^2 + 2A \cos \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t \cos \frac{1}{2}k(r_1 - r_2)$. Ahora elevar al cuadrado esta corriente y promediarla en un ciclo de $\nu_0 - \nu$. Mostrar que el resultado promedio temporal de la potencia es proporcional a $(1 + A^2)^2 + A^2[1 + \cos k(r_1 - r_2)]$. El término $\cos k(r_1 - r_2)$ registra un ciclo cada vez que California está más cerca de 15 cm, mientras Nueva York esté 15 cm más lejos de ella (suponiendo que $\lambda = 30$ cm). Si hay una segunda estrella (o alguna estructura interna) será resuelta si el valor de $k(r_1 - r_2)$ difiere de la primera estrella, por ejemplo, en π , si la separación angular de la primera estrella es del orden λ/d .

(h) Hay otros problemas técnicos que no se han mencionado. Por ejemplo, dado que hay muchas radioestrellas, es deseable que el telescopio apunte sólo a una pequeña región del espacio, de manera que "vea" una única estrella. ¿Cómo conseguiremos esto? (Suponga que cada telescopio tiene un diámetro de 50 m.)

(i) Aquí tenemos otro problema. Queremos reconocer la franja central de interferencia a fin de saber la dirección exacta de la estrella. (Ayuda: Cuando se mira una fuente puntual con una doble ranura y (por ejemplo) luz verde, no es fácil encontrar la franja central de interferencia. También ocurre esto si se usa luz roja. Sin embargo, si se usa luz blanca que, como sabemos, incluye a ambas, roja y verde, encontrar las franjas centrales es fácil.) ¿Por qué sucede así? Muestre cómo podría usar cada antena para detectar dos bandas de frecuencia (esto es similar a usar luz roja y verde en el caso óptico) mezclando cada una con la frecuencia del oscilador local, correlacionando las correspondientes cintas magnéticas para cada banda de frecuencia separadamente y, finalmente, mezclando las señales obtenidas de las cintas de las dos bandas de frecuencia.

La clase de radiointerferómetro estelar que hemos discutido podrá algún día ser utilizado para medidas precisas de las fluctuaciones del período rotacional de la tierra. Véase T. Gold, *Science* 157, 302 (21 julio, 1967), y G. J. F. MacDonald, *Science* 157, 304 (21 julio, 1967).

9.58 Conversión de modulación de amplitud a modulación de fase en radio-transmisión FM. (Este problema está muy relacionado con el 9.59.)

(a) Una modulación de amplitud de tensión tiene la forma:

$$V(t) = V_0[1 + a(t)] \cos \omega_0 t,$$

donde ω_0 es la frecuencia portadora y $a(t)$ la modulación de amplitud relativa. Una modulación de fase de una señal de tensión tiene la forma

$$V(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + \varphi(t)],$$

donde $\varphi(t)$ es la modulación de fase. Mostrar que la frecuencia angular instantánea, en esta modulación de fase, está dada por $\omega(t) = \omega_0 + d\varphi(t)/dt$. Así vemos que podríamos llamarla frecuencia modulada (FM) en lugar de fase modulada.

(b) La modulación de amplitud relativa $a(t)$, o la fase modulada $\varphi(t)$ contiene la información a ser transmitida, por ejemplo música. Sometamos a un análisis Fourier la música y consideremos una sola componente de frecuencia ω_m , donde el subíndice m está para la "modulación". Entonces reemplacemos $a(t)$ por $a_m \cos \omega_m t$ (deberíamos considerar también el término que contiene $\sin \omega_m t$, pero no lo haremos). La modulación de amplitud de tensión es

$$V(t) = V_0[1 + a_m \cos \omega_m t] \cos \omega_0 t = V_0 \cos \omega_0 t + V_0 a_m \cos \omega_m t \cos \omega_0 t.$$

Esta modulación de amplitud es equivalente a la superposición de oscilaciones armónicas puras a la frecuencia portadora ω_0 , la frecuencia superior de la banda es $\omega_0 + \omega_m$, y la frecuencia inferior es $\omega_0 - \omega_m$. Justificar la afirmación precedente escribiendo explícitamente $V(t)$ como la mencionada superposición.

En AM estas frecuencias son emitidas y sintonizadas por su radioantena. Los relámpagos y las afeitadoras eléctricas emiten también en el mismo rango de frecuencias y contribuyen a la modulación de amplitud, produciendo una suave variación de amplitud a una frecuencia dada. Esto origina un ruido "estático" sobreimpreso a la música. Si convertimos la modulación de amplitud en modulación de fase, este ruido estático puede ser eliminado lo bastante, debido a que el estático perturba la variación de amplitud y el receptor FM sabe que esos ruidos no pueden ser parte de la música, puesto que ésta ha sido emitida a amplitud constante. El receptor de FM puede disponerse para filtrar las bruscas variaciones de amplitud, es decir, los estáticos.

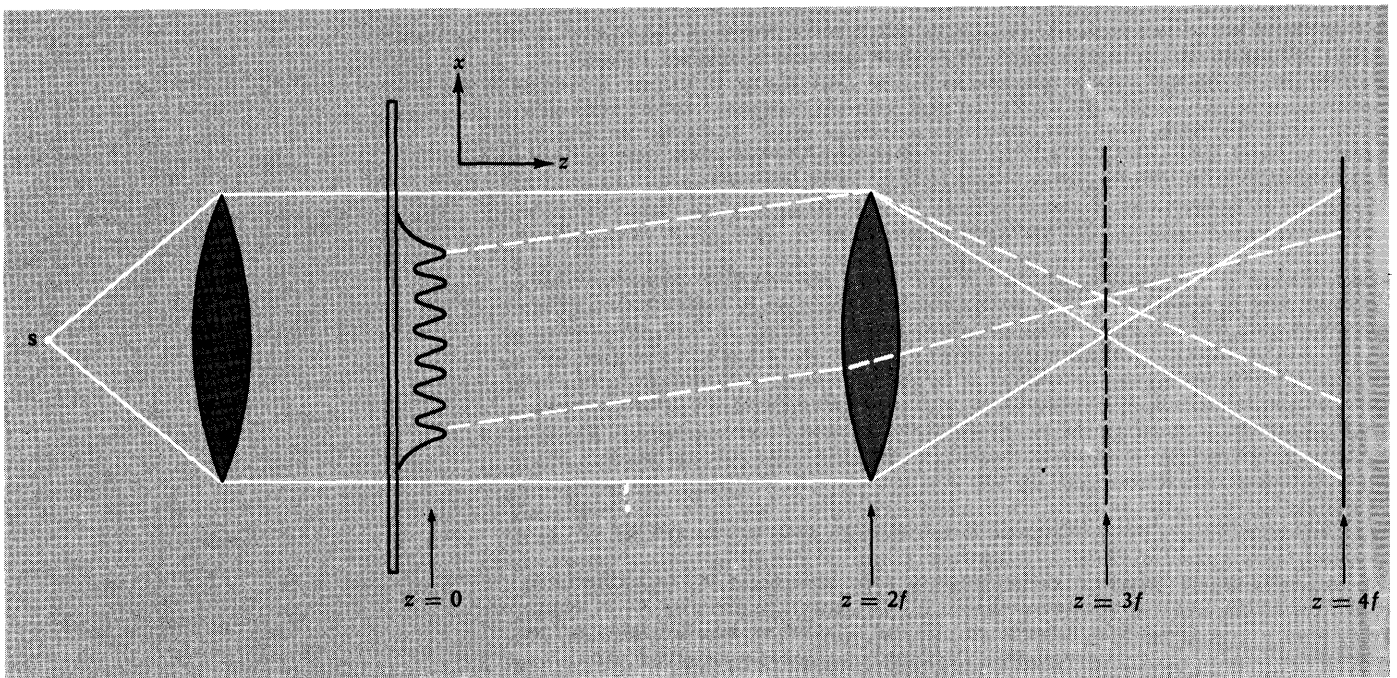
Así es como la AM se convierte en FM: la tensión AM se aplica en la entrada de un filtro pasabanda por el que pasa una banda estrecha que incluye la portadora ω_0 , pero excluye los dos lados $\omega_0 \pm \omega_m$. Una vez que la portadora ha sido aislada de los dos lados de la banda, se le da un cuarto de ciclo de retraso (o avance) a la frecuencia portadora, es decir, su fase es variada en 90° . Entonces se la superpone con los dos lados, los que han sido preservados sin cambio. (Podemos también amplificar o reducir la amplitud de la portadora si lo deseamos, pero lo omitiremos.) Así que podemos, por ejemplo, reemplazar $\cos \omega_0 t$ por $\sin \omega_0 t$ en la portadora $V_0 \cos \omega_0 t$. Después del salto de fase y la recombinación, obtenemos:

$$V'(t) = V_0 \sin \omega_0 t + V_0 a_m \cos \omega_m t \cos \omega_0 t.$$

Ahora demos el nombre de $\varphi(t)$ a $a_m \cos \omega_m t$, el que es también nuestro original $a(t)$ para una modulación dada de frecuencia. Por simplicidad, suponemos que la magnitud de $a(t)$, es decir, de $\varphi(t)$ es pequeña comparada con la unidad. Entonces, $\cos \varphi(t) \approx 1$, $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$.

(c) Mostrar que la tensión de arriba puede ser escrita en la forma

$$V'(t) = V_0 \sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad \varphi(t) = a_m \cos \omega_m t.$$



Problema 9.59 Microscopio con constante de fase. En este ejemplo hemos considerado que la ampliación es la unidad. El plano del objeto está a $z = 0$ y el plano de la imagen a $z = 4f$. El plano focal del objetivo está a $z = 3f$.

Así vemos la treta para convertir AM a FM (o viceversa): es el salto de fase de la portadora en $\pm 90^\circ$ respecto a los dos lados de la banda. Esta hermosa invención de E. H. Armstrong, en 1936, hizo posible la radio comercial FM.

(d) Mostrar que otra forma de convertir AM a FM (o viceversa) es cambiar la fase de los lados de la banda en 180° , dejando la portadora invariable.

9.59 Conversión de luz modulada en fase a luz modulada en amplitud en un microscopio con contraste de fase. (a) Primero consideremos un microscopio ordinario. No estamos por ahora interesados en la ampliación, así que consideraremos que la ampliación es la unidad. Pongamos un portaobjeto de vidrio en $z = 0$ con el portaobjeto en el plano xy . Pongamos una lente en $z = 2f$, donde f es la distancia focal de la lente. Pongamos una pantalla opaca fotográfica en $z = 4f$. Entonces el portaobjetos es proyectado sobre la pantalla. Y la ampliación es uno. Justificar la afirmación precedente.

(b) Ahora ponga una ameba en una gota de agua sobre el portaobjetos y enfoque la imagen sobre la pantalla. Desgraciadamente no podemos ver la ameba, puesto que es transparente, con un índice de refracción no muy diferente del agua en el que está sumergida. Tiñamos la ameba con una tintura. Ahora podemos verla, pero la tintura la mató; si hubiéramos querido estudiar su proceso vital, este método no serviría.

El papel de la tintura es modular la amplitud de la luz en $+z$ que emerge de la ameba, es decir, la modulación es relativa a la amplitud de la luz que pasa a través del portaobjetos del microscopio donde no está la ameba. Donde no hay tintura, la amplitud en $+z$ extremo de la ameba y a una posición transversal x dada, es la misma que la que sería si no hubiera ameba. Sin embargo, la fase es diferente, debido a que la luz pasa a través de diferente cantidad de ameba según sea x , y a que el índice de refracción de la ameba es diferente del índice del agua. Así que suponiendo que el portaobjetos es iluminado con una

onda plana monocromática de luz propagándose según la dirección $+z$, la luz emitida por una fuente puntual S localizada en el foco de la lente es el productor del haz paralelo. (Véase figura.) Suponga que en $z = 0$, justo debajo de la ameba, el campo eléctrico cuando ella no está, viene dado para todo x por

$$E(x, z, t) = E_0 \sin \omega t.$$

Cuando la ameba está presente hay una variación de fase $\varphi(x)$ que depende de x . En tal caso, el campo eléctrico de la luz en $z = 0$ está dado por

$$E(x, z, t) = E_0 \sin[\omega t + \varphi(x)].$$

De esta manera, la ameba produce modulación de fase. La lente en $z = 2f$ forma una imagen de la ameba sobre la pantalla en $z = 4f$. El campo eléctrico en la pantalla está dado por la misma expresión que en $z = 0$ (despreciando pequeñas pérdidas) y no teniendo en cuenta la inversión de la imagen, es decir, el reemplazo de x por $-x$. El promedio temporal del cuadrado del campo eléctrico es entonces $\frac{1}{2}$ de E_0^2 , independiente de x , y por eso no podemos ver la imagen. Justificar ambas partes de la afirmación precedente.

(c) El teñido modula la amplitud E_0 , pero mata a la ameba. En realidad sería deseable convertir la luz modulada en fase, en luz modulada en amplitud. ¿Cómo podemos hacer esto? Nos guiamos por analogía con la conversión de AM a FM, como se discutió en el Problema 9.58. Ahora tratamos con el problema inverso, es decir, la conversión de luz FM a luz AM. (Sin embargo, es de notar una peculiaridad, aquí la modulación de fase es espacial, $\varphi(x)$, no temporal como anteriormente habíamos analizado, $\varphi(t)$. ¡No nos inquietemos por ello todavía!) Observando el Problema 9.58, vemos que terminamos con la modulación de fase $\varphi(t) = a_m \cos \omega_m t$, pues comenzamos con una modulación de amplitud $a(t) = a_m \cos \omega_m t$. Ahora comenzamos con una modulación fase $\varphi(x)$. Supongamos que la magnitud de $\varphi(x)$ es pequeña comparada con 1 radián para todo x , es decir, la ameba tiene un índice de refracción casi igual al del agua. Mostrar que la modulación de fase de la luz en $z = 0$ o en $z = 4f$ puede ser escrita en la forma (para $\varphi \ll 1$)

$$E(x, z, t) = E_0 \sin \omega t + E_0 \varphi(x) \cos \omega t.$$

Ahora hacemos un análisis Fourier de la dependencia en x , $\varphi(x)$, y consideramos una sola componente de número de onda k_m . Así tenemos $\varphi(x) = a_m \cos k_m x$. Entonces la luz modulada en fase en $z = 0$ o en $z = 4f$ estará dada por:

$$E(x, z, t) = E_0 \sin \omega t + E_0 a_m \cos k_m x \cos \omega t.$$

Esta es la luz modulada en fase que afirmamos da una imagen "invisible" en $z = 4f$. Ahora observemos una vez más el Problema 9.58. Por analogía llamaremos a la contribución $E_0 \sin \omega t$ con el nombre de onda luminosa portadora. Así vemos que si podemos producir un salto de fase de la onda luminosa portadora de 90° relativa a la luz modulada (la luz con amplitud a_m), habremos producido luz AM. Sin preocuparnos todavía cómo puede hacerse en la práctica, reemplacemos $\sin \omega t$ por $\cos \omega t$ en la luz portadora en la expresión de arriba. Tenemos, entonces, para luz en la pantalla en $z = 4f$

$$\begin{aligned} E'(x, z, t) &= E_0 \cos \omega t + E_0 a_m \cos k_m x \cos \omega t \\ &= E_0 [1 + a_m \cos k_m x] \cos \omega t \\ &= E_0 [1 + a(x)] \cos \omega t. \end{aligned}$$

Esta amplitud modulada da la intensidad proporcional al promedio temporal del campo eléctrico al cuadrado, es decir, a $\frac{1}{2} E_0^2 [1 + a(x)]^2$, el que depende de x , y de esta manera muestra cómo el espesor de la ameba y su índice de refracción dependen de x y, por consiguiente, vemos a la ameba.

(d) Hay sólo un “pequeño” problema todavía: ¿Cómo aislar la onda luminosa portadora del resto de la luz y luego recombinarla (superponiéndola) con el resto de la onda en la pantalla, todo esto debe ser producido entre $z = 0$ y $z = 4f$? En el caso de conversión de tensión AM a tensión FM, el artificio usado era un filtro pasabanda que separaba la frecuencia portadora $\omega = \omega_0$ de los laterales $\omega = \omega_0 \pm \omega_m$; así, por analogía, debemos buscar un *filtro pasabanda para los números de onda* para separar el número de onda portador $k_x = k_0 \pm k_m$. Esta afirmación es más comprensible si escribimos el campo eléctrico modulado en fase en $z = 0$ en la forma

$$E(x, z, t) = E_0 \sin[\omega t - k_0 x] + \frac{1}{2} E_0 a_m \cos[\omega t - (k_0 + k_m)x] \\ + \frac{1}{2} E_0 a_m \cos[\omega t - (k_0 - k_m)x],$$

donde $k_0 = 0$ y donde hemos escrito la onda permanente $\cos k_m x \cos \omega t$ como una superposición de dos ondas propagándose con $k_x = +k_m$ y con $k_x = -k_m$. Justificar esta última fórmula. Así vemos que la oscilación modulada en fase en $z = 0$ produce tres ondas propagándose. La onda portadora tiene $k_x = 0$; la modulación da una onda con $k_x = +k_m$ y una con $k_x = -k_m$. Las tres ondas tienen el mismo k_z , este valor es esencialmente ω/c , pues hemos supuesto que k_x es pequeño comparado con k_z , es decir, que las tres ondas se propagan esencialmente en la dirección z , y, por consiguiente, que la magnitud $\omega/c = \sqrt{k_z^2 + k_x^2}$ del vector de propagación es esencialmente igual al vector k_z para las tres ondas. (Omitimos k_y de la discusión.)

(e) En la figura se muestra un portaobjetos más la dependencia x de la componente Fourier k_m del espesor de la ameba. La onda portadora es producida por la fuente puntual S . Sus rayos exteriores están dibujados con líneas sólidas. La parte superior de la banda sen $k_x = +k_m$ se dibujó en líneas a trazos. (La parte inferior de la banda con $k_x = -k_m$ no ha sido representada.) Las lentes focalizan estas tres ondas, cada una de las cuales es casi plana, en imágenes casi puntuales en el plano focal de la lente, localizado en $z = 3f$. Los rayos continúan hasta la pantalla en $z = 4f$ donde nuevamente se superponen. Note que *en el plano focal de las lentes* (en $z = 3f$) *las tres ondas están completamente separadas en el espacio*. Es decir, que podemos trabajar sobre la portadora sin perturbar las otras (¡las laterales!). Así tenemos un filtro espacial para aislar k_x , en analogía con el filtro temporal usado para aislar ω . Ahora que tenemos la portadora aislada de las laterales en $z = 3f$ se le cambiará fácilmente su fase sin perturbar las otras. La hermosa invención del microscopio de contraste de fase, fue hecha por F. Zernicke en 1934.

Podemos describir el proceso que hemos tratado en una forma más abstracta y, por consiguiente, más general, como sigue: En $z = 0$ tenemos dada una dependencia funcional de la x de la amplitud y de la fase de la oscilación $A(x) \cos[\omega t + \varphi(x)]$. [En el presente ejemplo no había modulación de amplitud en $z = 0$, es decir, $A(x)$ fue constante. En otros ejemplos que incluyen configuración de difracción, teníamos $\varphi(x)$ constante.] Analizamos por Fourier la dependencia en x para hallar las ondas estables en $z = 0$. Esto actuó como fuente de ondas que se propagan con conocidos valores de k_x y k_z . Entonces usamos una lente para convertir la dependencia en k_x (en $z = 0$) a la dependencia en x (en el plano focal de la lente a una distancia f de ésta), con los diferentes k_x enfocados en diferentes x . La dependencia en x en *este plano focal* es así equivalente a la k_x , con una correspondencia uno a uno entre k_x y x . Así, la dependencia en x en este plano focal es igual a un número constante de veces la *transformada de Fourier* de la dependencia en x en el plano del objeto en $z = 0$. No hay otro valor de z , para lo cual esto sea verdadero. Cuando finalmente las

ondas alcanzan la pantalla (el plano imagen) tienen la misma dependencia en x que en el plano objeto (despreciando la inversión de la imagen y el hecho de que la ampliación puede ser distinta de la unidad). Así, en el camino que va del plano objeto al plano focal detrás de la lente y delante de la pantalla, la dependencia en x va de dependencia en x en el plano objeto a dependencia en k_x en el plano focal y luego dependencia en x en el plano imagen. El paso de la dependencia en k_x en el plano focal a la dependencia en x en el plano imagen se hace por una *transformación inversa de Fourier*. Así podemos decir que en el microscopio de contraste de fase comenzamos con una dependencia en x , la transformamos según Fourier, trabajamos sobre ella (cambio de fase de parte de la transformada de Fourier, quizás amplificar o atenuar su amplitud también) y luego realizamos la inversión Fourier. (Si dejamos la transformada de Fourier intacta, es decir, no efectuamos el cambio de fase en el plano focal, será el resultado final la misma dependencia en x original.) Muchos efectos interesantes pueden obtenerse en esta forma, es el caso de la llamada “espectroscopia transformada Fourier” o “espectroscopia de plano focal”.

(f) Describir la conversión de AM a FM en el caso de tensiones, en los mismos términos generales que se han utilizado para explicar el microscopio de contraste de fase.

(g) En nuestra discusión no hemos tenido en cuenta el ancho total (en la dirección x) de la ameba y de la portadora. Supongamos que el ancho del haz de la onda portadora es W y el de la ameba es w . ¿Cuál es el efecto de estos anchos sobre la variación según x de la intensidad en el plano focal en $z = 3f$, es decir, cómo el resultado primitivo se modifica?

(h) Suponga que en lugar de un cambio de fase de 90° de la portadora en el plano focal la eliminamos interponiendo un objeto opaco. ¿Cómo será la dependencia en x de la intensidad de la imagen en tal caso?

9.60 Dos lentes delgadas en serie. Dadas dos lentes delgadas de potencia f_1^{-1} y f_2^{-1} dispuestas en serie con un eje común, con separación s entre las dos lentes. Considerar las dos lentes como positivas. (El resultado será general, con una conveniente interpretación de signos.) Consideremos un rayo paralelo al eje, a una distancia h del mismo, e incidiendo sobre la primera lente. Sea el rayo incidente desde la izquierda, y las lentes en el orden 1 y 2 desde la izquierda. La primera lente desvía el rayo hacia el eje. Supongamos que el rayo alcanza la segunda lente antes de cruzar el eje. Hallar el punto focal F donde el rayo cruza el eje después de atravesar la segunda lente. Mostrar que la colocación de F es independiente de h (para aproximaciones de pequeños ángulos). Ahora definir la colocación P (“plano principal”) como sigue: Extrapolar el rayo incidente hacia adelante (hacia la derecha) y el rayo emergente (el que pasa por F) hacia atrás, hasta que se crucen; lo hacen en el plano principal P . Sea x la distancia de F hacia la derecha la segunda lente. Entonces $x + y$ es la distancia del plano focal F a la derecha del plano principal P . A esta distancia se le llama la distancia focal f de la combinación de las dos lentes, considerándose como si fuera una única lente colocada en el plano principal P . Hallar x , y y f en función de f_1 , f_2 y s . Una vez que se han hallado f y P para los rayos provenientes de la izquierda, hacer lo mismo para los rayos que van de derecha a izquierda. ¿Son las mismas las distancias focales?

Resp. Para rayos incidentes desde la izquierda

$$\begin{aligned} f^{-1} &= f_1^{-1} + f_2^{-1} - sf_1^{-1}f_2^{-1}; \\ x &= (1 - sf_1^{-1})f; \\ y &= sf_1^{-1}f. \end{aligned}$$

574 Interferencia y difracción

9.61. Dos lentes que tienen $f_1 = +20$ cm y $f_2 = +30$ cm se colocan separados por 10 cm. Si un objeto de 5 cm de alto se coloca a 30 cm frente a la primera lente, hallar (a) la colocación, (b) la orientación, y (c) el tamaño de la imagen final. Por la técnica del trazado de rayos, situar la posición de la imagen sobre el diagrama.

9.62 Un objeto verde distante es observado con una cámara oscura, que tiene la película a una distancia D del agujerito. ¿Cuál será el diámetro del agujerito si la proyección tiene el máximo de definición?

Temas suplementarios

- 1 Ejemplos de osciladores microscópicos débilmente acoplados 576**
 - Molécula de amoníaco 576
 - Mesones K neutrales 578
- 2 Relación de dispersión para las ondas de de Broglie 578**
 - Electrones en una caja 579
 - Ondas estacionarias formadas como las del violín 579
 - Frecuencias de ondas estacionarias distintas de las del violín 582
 - Medios inhomogéneos 582
- 3 Penetración de una «partícula» en una región «clásicamente prohibida» del espacio 582**
 - Analogía con los péndulos acoplados 583
- 4 Velocidad de fase y de grupo para las ondas de de Broglie 584**
- 5 Ecuación de onda para las ondas de de Broglie 586**
- 6 Radiación electromagnética de un átomo unidimensional 588**
 - Por qué la frecuencia de radiación es la frecuencia de pulso 588
- 7 Tiempo de coherencia y pulsos ópticos 589**
- 8 ¿Por qué el cielo es brillante? 590**
- 9 Ondas electromagnéticas en medios materiales 594**
 - Ecuaciones de Maxwell 594
 - Medios lineales isotrópicos 595
 - Definición de χ , χ_m , ϵ , y μ para campos estáticos 595
 - Susceptibilidades para campos dependientes del tiempo 596
 - Modelo simple de un medio lineal isotrópico 597
 - Uso de cantidades complejas en las ecuaciones de Maxwell 599
 - Susceptibilidad compleja 600
 - Constantes dieléctricas complejas 600
 - Constante dieléctrica compleja para el modelo simple de un medio lineal isotrópico 601
 - Ecuaciones de Maxwell para medios lineales isotrópicos 602
 - Ecuaciones de Maxwell para medios neutrales, lineales e isotrópicos 602
 - Ecuación de ondas 603
 - Índice de refracción compleja 604
 - Soluciones en ondas planas 605
 - Ondas planas propagándose según el eje z 605
 - Relación entre E y B para ondas planas 605
 - Ejemplo numérico de índice de refracción complejo 606
 - Reflexión y transmisión de ondas planas 607
 - Condiciones de contorno en $z = 0$ 607
 - Ejemplo: Modelo simple para la relación de dispersión del conductor 609
 - Rango de frecuencias puramente resistivo 609
 - Caso 1: « Medio resistivo diluido » 611
 - Caso 2: « Medio resistivo denso » 612
 - Rango de frecuencia puramente elástico 613
 - Caso 1: Rango de frecuencias dispersivas 614
 - Caso 2: Rango de frecuencias reactivas 615
 - Resumen de las propiedades de los conductores 615
 - Aplicación: Plata sólida 616
 - Aplicación: Gráfito 617

Temas suplementarios

1 Ejemplos de osciladores microscópicos débilmente acoplados

Primero leamos la Sección 1.5 sobre péndulos débilmente acoplados, incluyendo el último párrafo, Ejemplos esotéricos, que es una introducción a este tema.

Aquí mostraremos algunos ejemplos de osciladores débilmente acoplados tomados de la física atómica y de la física de las partículas elementales. En cada caso hay “dos grados idénticos de libertad”, que están débilmente acoplados de manera que hay dos modos normales de frecuencia ω_1 y ω_2 . Sin embargo, no tratamos aquí con sistemas macroscópicos. La ley de Newton no es suficiente. La comprensión de estos sistemas “microscópicos” requiere la mecánica cuántica. No obstante, el comportamiento matemático de los sistemas que describiremos tiene una gran similitud a los péndulos débilmente acoplados. Aunque la interpretación física es bastante diferente. Para los péndulos acoplados, el cuadrado de la amplitud de un péndulo es proporcional a la energía (cinética más potencial) de ese péndulo. La energía va de un péndulo a otro con una frecuencia dada. Para un sistema descrito por la mecánica cuántica, el cuadrado de la amplitud para un grado dado de libertad (en realidad el cuadrado del valor absoluto, pues las amplitudes son siempre complejas en mecánica cuántica) da la *probabilidad* de que el grado de libertad esté “excitado” (es decir, tenga *toda* la energía). Esta probabilidad pasa de un grado de libertad a otro a una frecuencia dada, $\nu_1 - \nu_2$. La energía está “cuantizada”; ésta no puede subdividirse, es constante. El hecho correspondiente en los sistemas microscópicos es que la probabilidad total de que uno u otro grado de libertad esté excitado es constante. (Esta probabilidad total es 1, mientras el sistema no pierda por alguna causa la energía de excitación.) Los dos ejemplos siguientes son famosos. Los encontrará nuevamente cuando estudie mecánica cuántica.

Molécula de amoníaco. La molécula de amoníaco, NH_3 , está compuesta de un átomo de nitrógeno y tres de hidrógeno. (Véase volumen II, Pág. 324.) Los tres átomos de hidrógeno forman un triángulo equilátero. El plano de este triángulo se denomina plano H_3 . El átomo de hidrógeno tiene dos posibles emplazamientos donde puede vibrar, que corresponden a los péndulos *a* y *b*. Una (posición *a*) es sobre un lado del plano H_3 ; la otra es sobre el otro lado. El átomo N no puede pasar de un lado al otro (de la posición *a* a la *b* o viceversa), pues hay una barrera de potencial entre *a* y *b*. En mecánica clásica (es decir, en mecánica newtoniana) *a* y *b* son posiciones de equilibrio estable, por consiguiente,

un átomo N vibrando en a nunca puede pasar a b . (En analogía con el péndulo, esto corresponde a eliminar un resorte de acoplamiento. Así que si el péndulo a está vibrando y el b está en reposo, esta situación se preservará para siempre, despreciando la fricción.) En cambio, la mecánica cuántica introduce un “acoplamiento entre” a y b , lo que permite la “penetración de la barrera de potencial”. Supongamos que la molécula $t = 0$ está en el estado cuántico en que N está definidamente en a . Entonces, las probabilidades iniciales están dadas por $|\psi_a|^2 = 1$, $|\psi_b|^2 = 0$ (es decir, probabilidad 1 de que N esté vibrando en la posición a y cero que lo esté en la posición b). Sin embargo, se halla que estas condiciones no son mantenidas. En efecto, se encuentra (resolviendo la ecuación de Schrödinger) que para estas condiciones iniciales la probabilidad de hallar N en a es $|\psi_a|^2$ y la de hallarla en b $|\psi_b|^2$ están dadas por:

$$|\psi_a|^2 = \frac{1}{2}[1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t], \quad (1a)$$

$$|\psi_b|^2 = \frac{1}{2}[1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)t], \quad (1b)$$

donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias de los modos normales. Las ecuaciones 1 son considerablemente similares a las ecuaciones (1.99), Sección 1.5. La probabilidad total de que N esté en un lado u otro es, por supuesto, la unidad, como se halla sumando las ecuaciones (1a) y (1b).

Así como con los péndulos acoplados, una molécula de amoniaco puede empezar de manera que esté en un modo normal o en otro. Saliendo de él, si la molécula está en el modo con frecuencia ligeramente superior (llamemos a este modo 2; $\omega_2 > \omega_1$) entonces aquél es inestable. Tiende a emitir radiación electromagnética y caer del modo 2, llamado “estado excitado”, al modo 1, llamado estado fundamental. Esta radiación puede ser detectada. Su frecuencia es la frecuencia del pulso $\nu_2 - \nu_1$ cuyo calor es

$$\nu_{\text{puls}} = \nu_2 - \nu_1 \approx 2 \times 10^{10} \text{ cps.}$$

Ésta corresponde a la longitud de onda ($\lambda = c/\nu_{\text{puls}}$) de alrededor de 1,5 cm, la que está en el rango típico del “radar” o las “microondas”. Si se envía un haz de microondas de frecuencia 2×10^{10} cps a través de gas de amoniaco, algunos de los fotones de microondas inducen transiciones del estado fundamental (modo 1) al estado excitado (modo 2). De esta forma, la energía es intercambiada entre el haz de microondas y el gas por la excitación de las moléculas. Similarmente, una molécula excitada “decae” al estado fundamental cediendo un fotón al haz. Este intercambio entre el haz de microondas y el gas de amoniaco es la base para el “reloj de amoniaco”. La absorción de energía de la microonda es la “cuerda” del reloj. El flujo de probabilidad de estado a al b y al revés en la frecuencia de pulso provee el “mecanismo de escape” del

reloj. El reloj de amoniacio y sus descendientes dan al mundo una medida del tiempo más precisa.

Mesones K neutrales. Otro sistema fascinante con un comportamiento análogos a los péndulos acoplados es el de los mesones K neutrales, que se llaman “partículas extrañas”. Éstas son *muy* extrañas y todavía no han sido entendidas completamente. Este sistema tiene dos grados de libertad, llamados el mesón K^0 y el mesón \bar{K}^0 , análogo a los dos péndulos. Éstos están acoplados, pues cualquiera puede interactuar con dos mesones pi (entre otras cosas) vía una “interacción débil”. Los mesones pi (piones) son análogos a los resortes. Hay por consiguiente dos modos normales, y que se llaman mesón K_1^0 y mesón K_2^0 . A diferencia de los modos previamente discutidos, uno de estos modos (el K_1^0) es fuertemente amortiguado. El otro lo es débilmente. (Sistemas con amortiguamiento se han discutido en el Cap. 3.) Si el sistema a $t = 0$, comienza con probabilidad unidad de estar en el modo K^0 , la probabilidad decrece con el tiempo en forma exponencial, e^{-t/τ_1} . Un amortiguamiento similar, pero mucho más pequeño, ocurre con el modo K_2 . La “pérdida de probabilidad” correspondiente al amortiguamiento es el resultado del decaimiento radiactivo de los modos en otras partículas. Por ejemplo, K_1^0 decae mayormente en dos piones y τ_1 es el tiempo medio de decaimiento para K_1^0 .

Si el sistema comienza en $t = 0$ con probabilidad unidad de estar en el estado K^0 (llamado estado a), y si no hay amortiguamiento, entonces la probabilidad de que el sistema esté en el mismo estado (K^0) un tiempo más tarde estará dada por la ecuación (1a). La correspondiente probabilidad de hallar el sistema en el estado b (\bar{K}^0) debería estar dada por la ecuación (1b). Debido al amortiguamiento, estas fórmulas deberán ser modificadas, obteniéndose

$$|\psi(K^0)|^2 = \frac{1}{4}[e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} + 2e^{-(1/2)(t/\tau_1 + t/\tau_2)} \cos(\omega_1 - \omega_2)t], \quad (2a)$$

$$|\psi(\bar{K}^0)|^2 = \frac{1}{4}[e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} - 2e^{-(1/2)(t/\tau_1 + t/\tau_2)} \cos(\omega_1 - \omega_2)t]. \quad (2b)$$

Note que cuando $\tau_1 = \tau_2 = \infty$ (sin amortiguamiento). Las ecuaciones (2) son idénticas a las (1).

Un ejercicio interesante es inventar un mecanismo amortiguado que sólo amortigüe el modo 1 y otro que amortigüe sólo el modo 2 con péndulos débilmente acoplados. Entonces las ecuaciones para la energía de los péndulos será como las (2) en lugar de como las (1).

2 *Relación de dispersión para las ondas de de Broglie*

Una onda de de Broglie que describe una partícula con energía definida tiene la forma

$$\psi(z, t) = A f(z) e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

La probabilidad de hallar la partícula en un intervalo dz en la posición z es $|\psi(z,t)|^2 dz$, la que es independiente de t . Si la energía potencial de la partícula es constante, tenemos un medio homogéneo, entonces $f(z)$ es una función sinusoidal de kz :

$$\psi(z,t) = [A \sin kz + B \cos kz] e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

La relación de dispersión para una partícula en una región de potencial constante V se obtiene substituyendo $E = \hbar\omega$ y $p = \hbar k$ (la condición de frecuencia de Bohr y la relación de número de onda de de Broglie) en la expresión clásica de la energía. Por ejemplo, para electrones no relativistas de masa m , la relación clásica entre la energía E , el impulso p y el potencial V está dada por:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V, \quad (3)$$

La que da la relación de dispersión para las ondas de de Broglie como

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V. \quad (4)$$

Electrones en una caja. Como ejemplo, tomaremos los electrones confinados en una caja "unidimensional" extendida de $z = 0$ a $z = L$. Dentro de la caja tenemos $V = V_1$ (constante). Para z menor que 0 o mayor que L , tenemos $V(z) = +\infty$. De esta manera, los electrones están confinados en la caja. Considerando un solo electrón; si éste se comportara clásicamente, debería tener una energía cinética dada por

$$\frac{p^2}{2m} = E - V_1. \quad (5)$$

Pero un electrón real no es una partícula clásica. Los posibles estados ligados del electrón real en el "pozo infinito de potencial" de arriba son justamente los modos normales de las ondas de de Broglie del electrón; es decir, son ondas estacionarias con frecuencia y longitud de onda relacionada por la ecuación (4).

Ondas estacionarias formadas como las del violín. ¿Cuál es la sucesión de los números k para las ondas estacionarias? La probabilidad de hallar un electrón fuera del intervalo $0 \leq z \leq L$ es nula. Así que $|\psi(z,t)|^2$ es cero fuera del pozo. Pero $\psi(z,t)$ es una función continua de z . Por consiguiente, debe también ser cero en $z = 0$ y $z = L$. (Éstas son las mismas condiciones que para una cuerda de violín homogénea fijada en $z = 0$ y L . Las ondas estacionarias de de Broglie tienen exactamente la

misma secuencia que las de la cuerda ideal de violín.) Entonces, las condiciones de contorno en $z = 0$ requieren que $B = 0$ en la ecuación (2), dando

$$\psi(z, t) = e^{-i\omega t} A \operatorname{sen} kz. \quad (6)$$

La condición de contorno en $z = L$ requiere que $\operatorname{sen} kL = 0$. De aquí que las posibles ondas estacionarias son dadas por $L = 1\frac{1}{2}$ longitud de onda, $2\frac{1}{2}$, etc.:

$$k_1 L = \pi, \quad k_2 L = 2\pi, \quad \dots, \quad k_n L = n\pi, \quad \dots \quad (7)$$

Si el electrón está en un modo simple, la probabilidad por unidad de longitud (es decir, que podamos caer en el intervalo dz) de hallar la partícula en la posición z al tiempo t es

$$|\psi(z, t)|^2 = |e^{-i\omega t} A \operatorname{sen} kz|^2 = |A|^2 \operatorname{sen}^2 kz. \quad (8)$$

Esta probabilidad es independiente del tiempo, diciéndose entonces que el electrón está en un estado estacionario. La probabilidad que el electrón esté en algún lugar entre $z = 0$ y L es la unidad. Esto da la "condición de normalización" sobre $|A|^2$:

$$1 = \int_0^L |\psi|^2 dz = |A|^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2 kz dz = \frac{1}{2} |A|^2 L, \quad (9)$$

la que determina $|A|$. Así, si

$$A = |A| e^{i\alpha} = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{i\alpha},$$

entonces

$$\psi(z, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-i(\omega t - \alpha)} \operatorname{sen} kz, \quad (10)$$

donde α es una fase constante indeterminada.

La frecuencia de las ondas estacionarias está dada por la relación de dispersión, ecuación (4):

$$\omega_n = \omega_0 + \frac{\hbar k_n^2}{2m}, \quad \omega_0 \equiv \frac{V_1}{\hbar}. \quad (11)$$

Así la energía E del electrón está dada por

$$E_n = V_1 + \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = V_1 + \frac{\hbar^2 (n\pi/L)^2}{2m}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

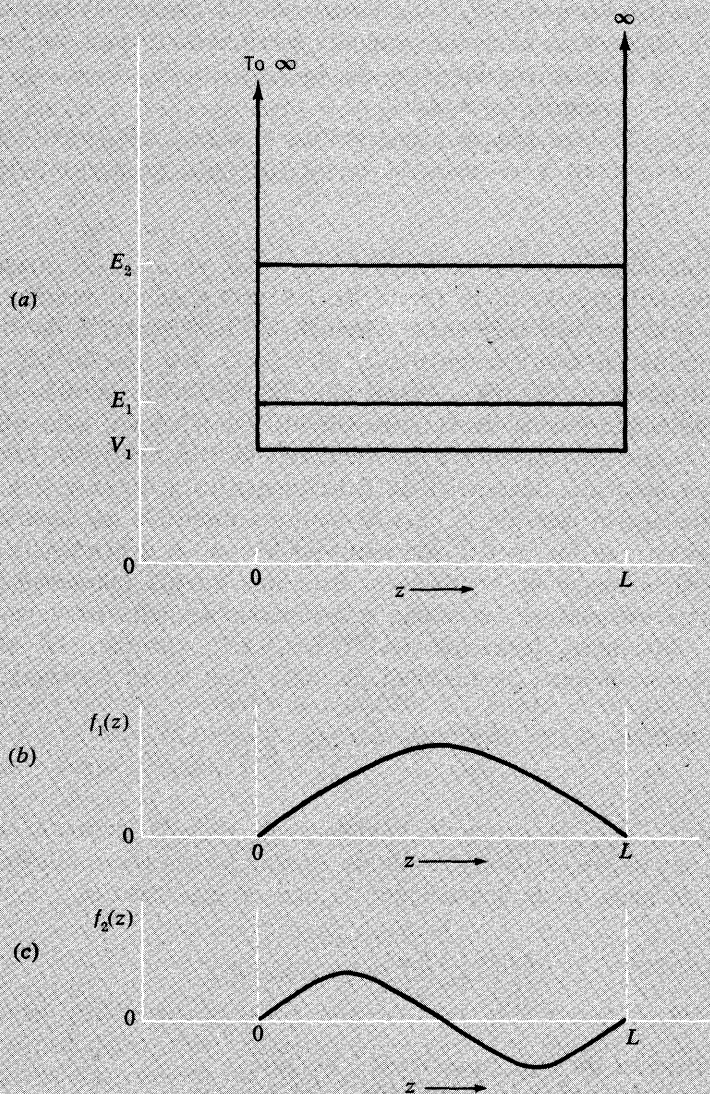


Fig. TS.1 Electrón ligado en un pozo de potencial infinito. (a) Gráfico de $V(z)$, con el agregado de líneas horizontales E_1 y E_2 que muestran la energía del primero y segundo modo (estado fundamental y primer estado excitado). La energía cinética $E_n - V_1$

es proporcional a n^2 , así hemos visto que $E_2 - V_1$ es cuatro veces el valor $E_1 - V_1$. (b) Representación gráfica de la función de onda del estado fundamental. (c) Representación gráfica de la función de onda del "primer estado excitado".

Frecuencias de ondas estacionarias distintas de las del violín. Aunque las formas de las ondas estacionarias son como las del violín, las frecuencias no son “armónicas”, de la frecuencia del modo más bajo, como el caso del violín. Esto es debido a que la relación de dispersión para las ondas de de Broglie es diferente de la relación de dispersión para las ondas de la cuerda del violín.

En la Fig. TS.1 se ven en forma gráfica el modo más bajo (llamado estado fundamental) y el segundo modo (llamado primer estado excitado).

Medios inhomogéneos. Si la función potencial $V(z)$, no es constante, independientemente de z , la forma de las ondas de de Broglie estacionarias (estados con frecuencia definida, es decir, energía de la partícula definida) no son sinusoidales en el espacio. Así que no hay “relación de dispersión” que dé ω como una función de k , pues la dependencia espacial no es la de la ecuación (2) y no hay un solo número de onda k que corresponda a la frecuencia ω . En este caso se debe resolver la ecuación diferencial de Schrödinger para obtener $f(z)$. Esto es algo análogo al caso de la cuerda continua discutida en Sección 2.3. Allí hallamos que los modos son sinusoidales en su dependencia espacial sólo si el medio es homogéneo. Para una cuerda inhomogénea, la dependencia espacial de las ondas estacionarias se halla resolviendo la ecuación diferencial [ecuación (2.59) Sec. 2.3; tenemos la tensión $T_0(z) = T_0 = \text{constante}$, la densidad de masa $\rho_0(z)$ no es constante]

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = - \frac{\omega^2 \rho_0(z)}{T_0} f(z). \quad (13)$$

Similarmente, para el potencial inhomogéneo $V(z)$, la dependencia espacial de las ondas estacionarias de de Broglie se obtiene resolviendo la ecuación de onda de de Schrödinger la que en este caso es

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [V(z) - \hbar\omega] f(z). \quad (14)$$

3 *Penetración de una “partícula” en una región “clásicamente prohibida” del espacio*

La energía cinética más la energía potencial para una partícula clásica no relativista se expresa así

$$E = \frac{p^2}{2m} + V, \quad (1)$$

donde $p^2/2m$ es la energía cinética y V es la energía potencial. Suponga que V es V_1 entre $z = 0$ y $z = L$ y es V_2 ($V_2 > V_1$) desde $z = L$ a $+\infty$

y desde $z = 0$ a $-\infty$. Suponga que la partícula clásica está “ligada” en el pozo de potencial descrito en el Tema suplementario 2. Éste es el caso si la energía E está entre V_1 y V_2 . Es así, que si la partícula se halla por algún motivo entre $z = 0$ y L , no saldrá nunca de allí. Ésta va y viene entre las paredes con impulso $p_z = \pm \sqrt{2m(E - V_1)}$, invirtiendo el signo de p_z cada vez que alcanza una pared. No puede entrar en la región donde el potencial es V_2 puesto que en esta región la energía cinética debería ser negativa:

$$\frac{p^2}{2m} = E - V = E - V_2 = -(V_2 - E), \quad \text{para } E < V_2. \quad (2)$$

Por supuesto, que no tiene sentido para una partícula clásica tener energía negativa.

Las partículas reales no son clásicas, pues tienen propiedades ondulatorias así como también propiedades de partículas. La relación de de Broglie $p = \hbar k$ y $E = \hbar \omega$ da la relación de dispersión

$$\omega = \omega_0(z) + \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad \text{para } \omega > \omega_0, \quad (3)$$

con:

$$\omega_0(z) \equiv \frac{V(z)}{\hbar}.$$

Analogía con los péndulos acoplados. Se puede comparar ésta con la relación de dispersión para péndulos acoplados (en la aproximación continua — véase Sección 3.5)

$$\omega^2 = \omega_0^2(z) + \frac{K^2 a^2}{M} k^2, \quad \text{para } \omega^2 > \omega_0^2, \quad (4)$$

con

$$\omega_0^2(z) \equiv \frac{g}{l}. \quad (5)$$

Para los péndulos acoplados, cuando ω es menor que ω_0 , las ondas no son sinusoidales; son ondas exponenciales. Los medios se dice que son reactivos. La relación de dispersión se transforma en

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{K^2 a^2}{M} \kappa^2, \quad \omega^2 < \omega_0^2, \quad (6)$$

donde κ es la constante de atenuación y $\delta = 1/\kappa$ es la longitud de atenuación. Similarmente para las ondas de de Broglie, cuando ω es menor que ω_0 , la relación de dispersión se transforma en

$$\omega = \omega_0(z) - \frac{\hbar \kappa^2}{2m}, \quad \omega < \omega_0. \quad (7)$$

Así que la energía cinética $E - V$ está dada en nuestro ejemplo por:

$$E - V_1 = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}, \quad 0 \leq z \leq L \quad (8)$$

y

$$E - V_2 = -\frac{\hbar^2 \kappa_2^2}{2m}, \quad \text{otros lugares.} \quad (9)$$

Por consiguiente, para energía cinética positiva de la partícula, las correspondientes de de Broglie son sinusoidales (para un medio homogéneo) con número de onda k_1 , mientras para energía de la partícula negativa, las ondas de de Broglie son ondas exponenciales con constante de atenuación κ_2 . Las funciones de onda de los posible estados de un electrón ligado en este “pozo de potencial finito” son de forma muy similar a los “modos ligados” de péndulos acoplados descritos en la Sección 3.5. Así, la función de onda del estado fundamental $f(z)$ es sinusoidal en la región de “energía potencial positiva” (la región dispersiva) con longitud de onda tal que kL es ligeramente menor que π . En $z = 0$ y en $z = L$, esta onda sinusoidal se une suavemente a la función exponencial, la que decae a cero a una distancia infinita de la región dispersiva. (Los dos estados estacionarios más bajos se muestran en la figura TS.2)

Del gráfico vemos que la probabilidad de hallar la partícula en la región clásicamente prohibida no es nula. Para z menor que cero, la probabilidad es proporcional a $|\exp[-\kappa_2(-z)]|^2$; para z más grande que L es proporcional a $|\exp[-\kappa_2(z-L)]|^2$.

Note que si V_2 tiende a ∞ , entonces de acuerdo con la ecuación (9), κ_2 se hace infinita y la distancia de atenuación δ^2 tiende a cero. Ésta es la situación que se discutió en el Tema suplementario 2. Para ese caso, habíamos escrito inmediatamente debajo el número de onda de los modos permitidos y obtuvimos las correspondientes energías de la relación de dispersión. En el presente ejemplo, pozo de potencial finito, es más complicado hallar los valores permitidos de k (dentro del pozo) y κ (fuera del pozo).

4 *Velocidad de fase y de grupo para las ondas de de Broglie*

Para un electrón no relativista de energía E en un pozo de potencial constante V , la relación de dispersión es (véase Tema suplementario 2)

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{V}{\hbar}. \quad (1)$$

La velocidad de fase es

$$v_\varphi(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} + \frac{V}{\hbar k}. \quad (2)$$

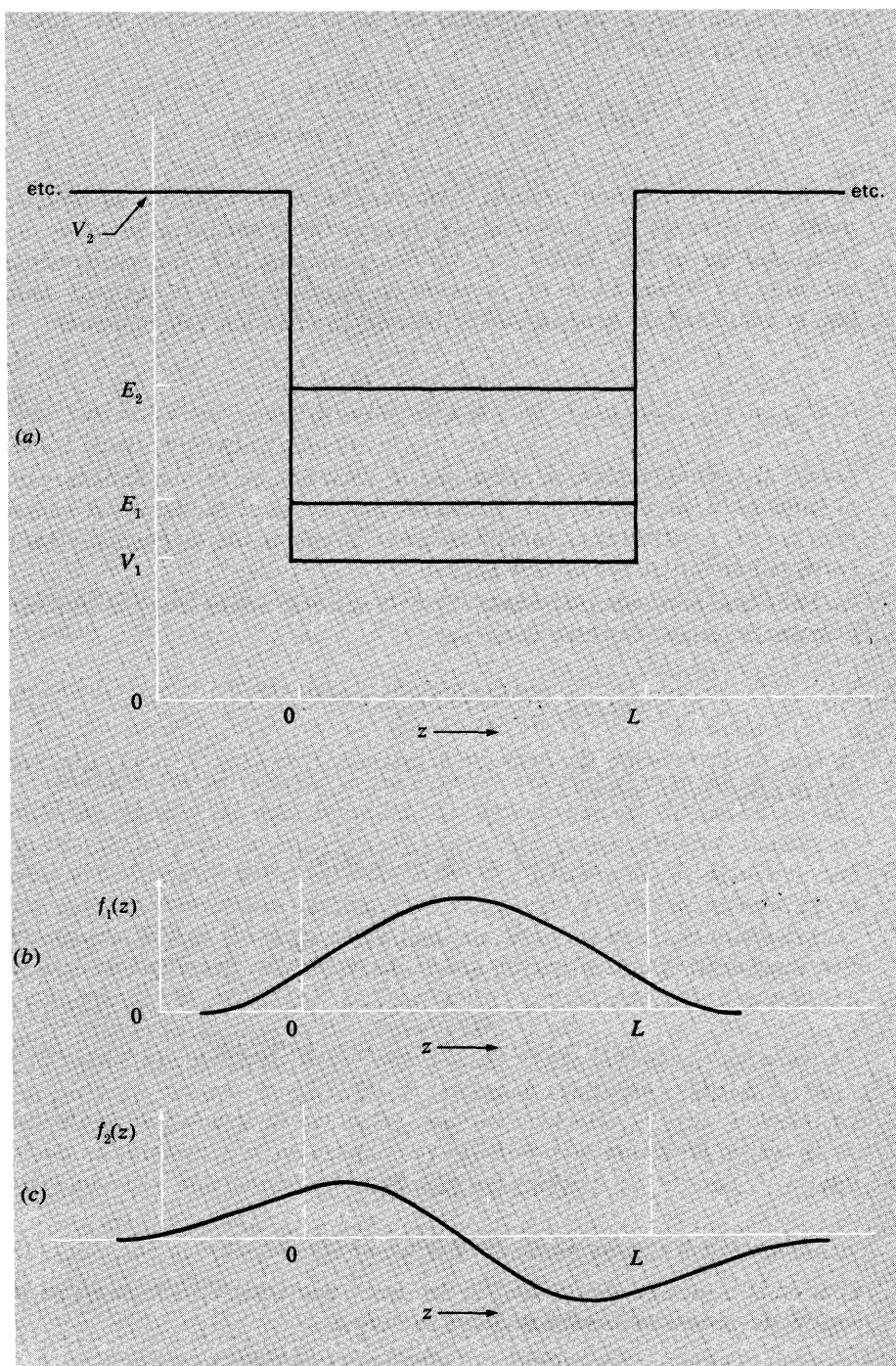


Fig. TS.2 Electrón ligado en un pozo de potencial finito. (a) Gráfico de $V(z)$, con el agregado de líneas horizontales E_1 y E_2 que muestran la energía del estado fundamental y el primer estado excitado. (b) Dependencia del estado fundamental. (c) Dependencia espacial del primer estado excitado.

La velocidad clásica de la partícula es: p/m , es decir, $\hbar k/m$. Así que la ecuación (2) se lee

$$v_{\phi}(k) = \frac{1}{2} v(\text{partícula}) + \frac{V}{p(\text{partícula})}, \quad (3)$$

la cual es una relación peculiar. Afortunadamente, $v_{\phi}(k)$ no es directamente observable. La velocidad de una partícula cuántica es la de un "paquetes de ondas" hecho con valores próximos a k , no exactamente un valor. La velocidad de propagación de un paquete de ondas está dado por la velocidad de grupo v_g . Así, usando la ecuación (1), hallamos

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 = \left(\frac{\hbar k}{m} \right)_0, \quad (4)$$

donde el subíndice cero significa que la derivada ha sido calculada para el valor de k del centro de la banda Δk que forma el paquete. Así vemos que $v_g = v(\text{partícula})$ si tomamos como momento de la partícula $(\hbar k)_0$ correspondiente al centro del paquete.

Para una partícula relativista, libre la relación entre energía, impulso y masa en reposo m está dada por

$$E^2 = (mc^2)^2 + (cp)^2, \quad (5)$$

la que da la relación de dispersión (usando $E = \hbar\omega$ y $p = \hbar k$, que son relativamente correctas)

$$\hbar^2 \omega^2 = (mc^2)^2 + (\hbar ck)^2. \quad (6)$$

La velocidad de fase $v_{\phi} = \omega/k$ tiene el valor $v_{\phi} = \omega/k = E/P$, la que es $c^2/v(\text{partícula})$, y es así mayor que c . La velocidad de grupo es

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2 p}{E} = v(\text{partícula}). \quad (7)$$

La relación entre la velocidad de fase, velocidad de grupo y la velocidad de la luz es la misma que para las radioondas en la ionosfera, es decir, $v_{\phi} v_g = c^2$. Sucede así porque las relaciones de dispersión son similares

5 Ecuación de onda para las ondas de de Broglie

Una onda armónica de de Broglie (es decir, una onda estacionaria) en la región de potencial constante tiene la forma

$$\psi(z,t) = e^{-i\omega t}(Ae^{ikz} + Be^{-ikz}). \quad (1)$$

Así,

$$\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} = -i\omega \psi(z,t); \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(z,t); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} = e^{-i\omega t}(ikAe^{ikz} - ikBe^{-ikz}); \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} = -k^2 \psi(z,t). \quad (5)$$

Para partículas no relativistas, la relación de dispersión está dada por (véase Tema suplementario 2).

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V. \quad (6)$$

Multiplicando la ecuación (2) por $i\hbar$ y usando las ecuaciones (5) y (6) se obtiene

$$\frac{i\hbar \partial \psi(z,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} + V\psi(z,t). \quad (7)$$

La ecuación (7) se obtuvo usando ondas armónicas para un potencial uniforme, la que da una dependencia espacial que es sinusoidal en kz . No hay razón para suponer que esta ecuación no se verifique cuando se tiene $V = V(z)$, es decir, cuando V es una función de la posición, así que eso esperamos que suceda. Ésta fue la suposición de Schrödinger. Pensó que quizás la ecuación (7) saliera aun para $V(z)$ no constante. La ecuación (7) con $V = V(z)$ se llama *ecuación de Schrödinger* (más precisamente, la ecuación de Schrödinger unidimensional dependiente del tiempo). Se la usa en física atómica.

Cuando no podemos despreciar los efectos relativistas, las ecuaciones (6) y (7) no son válidas. Para partículas relativistas libres, la relación de dispersión es

$$\hbar^2 \omega^2 = \hbar^2 c^2 k^2 + (mc^2)^2. \quad (8)$$

Multiplicando la ecuación (8) por $-\hbar^{-2}\psi(z,t)$ y usando las ecuaciones (3) y (5) obtenemos

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} - \frac{(mc^2)^2}{\hbar^2} \psi(z,t). \quad (9)$$

La ecuación (9) se denomina *ecuación de Klein-Gordon*. Note que si ponemos $m = 0$ tenemos la clásica ecuación de onda para medios no dispersivos con velocidad de propagación c . Esto se debe a que el fotón tiene masa en reposo nula.

6 Radiación electromagnética para un átomo unidimensional

Primero revise el Tema suplementario 2. Considerar los estados estacionarios para un electrón ligado en un pozo de potencial unidimensional con infinitos lados localizados en $z = -L/2$ y $+L/2$. Suponga ahora que este electrón ligado resulta ser una superposición del estado fundamental y el primer estado excitado:

$$\psi(z,t) = \psi_1(z,t) + \psi_2(z,t), \quad (1)$$

$$\psi_1(z,t) = A_1 e^{-i\omega_1 t} \cos k_1 z, \quad k_1 L = \pi; \quad (2)$$

$$\psi_2(z,t) = A_2 e^{-i\omega_2 t} \sin k_2 z, \quad k_2 L = 2\pi. \quad (3)$$

La probabilidad (por unidad de longitud) de hallar el electrón en la posición z al tiempo t está dado por:

$$\begin{aligned} |\psi(z,t)|^2 &= |A_1 e^{-i\omega_1 t} \cos k_1 z + A_2 e^{-i\omega_2 t} \sin k_2 z|^2 \\ &= A_1^2 \cos^2 k_1 z + A_2^2 \sin^2 k_2 z \\ &\quad + 2A_1 A_2 \cos k_1 z \sin k_2 z \cos(\omega_2 - \omega_1)t \end{aligned} \quad (4)$$

Vemos que la probabilidad tiene un término que oscila armónicamente con una frecuencia que está entre las dos frecuencias de de Broglie ω_1 y ω_2 . En efecto, no es difícil realizar la siguiente integración y obtener \bar{z} , el promedio espacial de z :

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} |\psi|^2 dz &= (A_1^2 + A_2^2) \frac{L}{2}, \\ \int_{-L/2}^{L/2} z |\psi|^2 dz &= \frac{16L^2}{9\pi^2} A_1 A_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t, \\ \bar{z} = \frac{\int z |\psi|^2 dz}{\int |\psi|^2 dz} &= \frac{32L}{9\pi^2} \frac{A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega_2 - \omega_1)t, \end{aligned}$$

es decir,

$$\bar{z} = (0,36L) \frac{A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega_2 - \omega_1)t. \quad (5)$$

Por qué la frecuencia de radiación es la frecuencia de pulso. Si el electrón tiene una carga $q = -e$ ésta radiará electromagnéticamente a la frecuencia a la cual oscila. Se ve de la ecuación (5) que el promedio

de la posición de la carga oscila a la frecuencia de pulso $\omega_2 - \omega_1$. Por consiguiente, la frecuencia de radiación es la frecuencia de pulso entre dos estados estacionarios incluidos en la "transición".

$$\omega_{\text{rad}} = \omega_2 - \omega_1. \quad (6)$$

7 Tiempo de coherencia y pulsos ópticos

Se puede obtener interferencia entre dos ondas de diferente frecuencia; esto es cierto para fenómenos ópticos así como también para otros tipos de fenómenos. Supongamos tener dos ondas luminosas, la 1 y la 2, que producen los campos eléctricos E_1 y E_2 , ambas polarizadas según el eje \hat{x} (así podemos omitir el signo de vector). El campo total en un z dado es la superposición de E_1 y E_2 . Usando un campo complejo $E_c(t)$ tenemos

$$E_c(t) = E_1 e^{i\omega_1 t} e^{i\varphi_1} + E_2 e^{i\omega_2 t} e^{i\varphi_2}. \quad (1)$$

El flujo de energía, que puede ser medido por un fotomultiplicador (cuya corriente de salida es proporcional al flujo incidente) es proporcional al promedio de $E^2(t)$ sobre un período T de la oscilación "rápida" a la frecuencia promedio:

$$\begin{aligned} \langle E^2(T) \rangle &= \frac{1}{2} |E_c(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)]\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Así podemos esperar medir una corriente del fotomultiplicador que varíe a la frecuencia de pulso relativamente lenta $\omega_1 - \omega_2$. ¿Cuáles son los requerimientos sobre el ancho de banda? Recordar que nuestro simple punto de vista consiste en pensar que las amplitudes y las fases varían lentamente en una forma impredecible, con, por ejemplo, φ_1 variando al azar en cantidad del orden de 2π en un intervalo de tiempo de coherencia que es la inversa del ancho de banda de la oscilación 1:

$$t_{1(\text{coh})} \approx (\Delta\nu_1)^{-1}. \quad (3)$$

$$t_{2(\text{coh})} \approx (\Delta\nu_2)^{-1}. \quad (4)$$

Es claro que si estamos observando pulsos, las componentes individuales deben mantener su fase bastante constante en la duración del período del pulso. Así, para observar pulsos, necesitamos que ambos tiempos de coherencia sean largos comparados con el período de la pulsación, es decir, que ambos anchos de banda deben ser pequeños comparados con la frecuencia de pulso:

$$\begin{aligned} \Delta\nu_1 &< |\nu_1 - \nu_2| \\ \Delta\nu_2 &< |\nu_1 - \nu_2| \end{aligned} \quad (\text{para pulsos observables}) \quad (5)$$

Además, necesita poder detectar variaciones en la corriente del fotomultiplicador a la frecuencia de la pulsación. También es necesario ingenio. El experimento ha sido realizado, y es bonito.*

8 *¿Por qué el cielo es brillante?*

Aprendimos por qué el cielo es azul en la Sección 7.5; el color depende de la dispersión de la luz por las moléculas del aire. Aquí tenemos un argumento que parece mostrar que el cielo debería ser invisible: Considerar una componente dada monocromática de la luz solar. El campo eléctrico estimula una molécula dada de aire. Cada electrón oscilante de la molécula del aire radia ondas en todas direcciones, alguna de las cuales alcanzan el ojo de un observador. Pero para una molécula dada (denominada 1) hay otra (núm. 2) que está $\frac{1}{2}$ longitud de onda más lejos del observador. Si ambas moléculas están radiando con la misma amplitud y fase, sus ondas deberían superponerse para dar un cero en la posición del observador. Para dispersión próxima a los 90° , podemos obviamente satisfacer este requerimiento de la amplitud y fase, siempre que el número de moléculas de aire por unidad de volumen sea suficientemente grande, de manera que siempre hay próxima una molécula "núm. 2" para cualquier "núm. 1". (Para dispersión próxima a cero grados, las moléculas que están $\frac{1}{2}$ longitud de onda más lejos del observador son excitadas medio período antes; por consiguiente, no da interferencia destructiva.) Para aire en STP, la densidad numérica es alrededor de $3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Por consiguiente, un cubo de lado $5 \times 10^{-3} \text{ cm}$ (la longitud de onda de la luz azul) contiene alrededor de 4×10^6 moléculas, es decir, aproximadamente 100 moléculas por cada lado del cubo con lado igual a una longitud de onda. Esto parecería más que suficiente para producir interferencia casi completamente destructiva, aun cuando tengamos en cuenta que la densidad del aire decae exponencialmente con la altura respecto de la superficie de la tierra. Por consiguiente, llegamos a la conclusión de que la parte del cielo que corresponde a la dispersión de 90° debería ser "negra" ¡y no azul brillante!

Esta predicción contradice obviamente a la experiencia. En efecto, la intensidad observada está bastante de acuerdo con la predicha en base a las moléculas consideradas individualmente, teniendo en cuenta la densidad numérica de moléculas y sumando las *intensidades* aportadas por las moléculas independientemente. Por alguna razón, la predicha interferencia destructiva no se produce. ¿Por qué?

Aquí hay otro hecho relacionado con el anterior: Si en lugar de aire usamos vidrio o agua limpia, la predicha interferencia destructiva ocurre. Esto se debe a que pasa por el agua con una pérdida despreciable

* A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, y P. O. Johnson, "Photoelectric Mixing of Incoherent Light," *Phys. Rev.* **99**, 169 (1955).

de identidad. Ahora bien, la cantidad de aire sobre la superficie terrestre es equivalente en peso y (aproximadamente) en número de moléculas a alrededor de 10 m de agua. Sin embargo la cantidad de dispersión a 90° experimentada por un rayo de luz al atravesar 10 m de agua limpia es muy pequeña comparada con la experimentada por los rayos solares al atravesar la atmósfera. Si sumamos en el caso del agua las *amplitudes* de la dispersión a 90° conseguimos la esperada interferencia destructiva. En el caso del aire, es la *intensidad* lo que se debe sumar. ¿Por qué?

La respuesta está en la *uniformidad* del espacio de las moléculas del agua cuando se las compara con las moléculas del aire. (Ello nada tiene que ver con la diferencia entre una molécula de aire y una de agua: el vapor de agua se comporta como el aire gaseoso; el aire líquido se comporta como el agua líquida.) Las moléculas del agua están “en contacto” y tienen un espaciado casi uniforme. Está siempre “garantizada” la existencia de una molécula “núm. 2” para anular la contribución de una dada “núm. 1” (en la superposición de sus campos radiantes en la posición del observador). En el caso del aire es sólo *en promedio* que hay una molécula “núm. 2” por cada “núm. 1”; algunas veces la hay y otras no. Las *fluctuaciones* (en la uniformidad de la densidad numérica de las moléculas) *destruye la coherencia*. La “esperada” interferencia destructiva de las *amplitudes* para la dispersión a 90° por consiguiente no ocurre. En realidad (como es el caso en fuentes incoherentes) la intensidad total es la suma de las *intensidades* de las fuentes contribuyentes.

He aquí una deducción simplificada: Consideremos una pequeña región 1. Ahora escojamos otra región (llamémosla núm. 2) del mismo tamaño, situada a la misma distancia del sol, pero $\frac{1}{2}$ longitud de onda más lejos del observador que la región 1. (Considerando una componente monocromática de la luz solar.) Suponga que cada una de estas regiones es pequeña comparada con la longitud de onda. Entonces, todas las moléculas de región 1 son estimuladas en fase. Cada una contribuye con un campo E_1 en la posición del observador. Si en un tiempo dado hay n_1 moléculas en la región 1, entonces el campo en el observador debido a estas moléculas es $n_1 E_1$. Similarmente, el campo debido a la región 2 es $n_2 E_2$. El campo total debido a estas dos regiones es la superposición $E = n_1 E_1 + n_2 E_2$. Debido al hecho que las dos regiones son estimuladas en fase y están $\frac{1}{2}$ longitud de onda apartadas respecto del observador, tenemos que E_2 es $-E_1$. Así que en un instante dado tenemos

$$E = n_1 E_1 + n_2 E_2 = (n_1 - n_2) E_1. \quad (1)$$

El campo E_1 es el campo radiado por una molécula de aire estimulada. Para este campo podemos escribir (obviando la notación vectorial, puesto que no estamos interesados en la polarización)

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Por consiguiente, la contribución de las dos regiones está dada por

$$E = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

donde

$$A = (n_1 - n_2)A_1. \quad (4)$$

¿Cuál es el valor promedio o valor “esperado” de la amplitud A ? Algunas veces n_1 es mayor que n_2 ; otras es más pequeño. En promedio n_1 y n_2 son iguales; por consiguiente, en promedio A es cero. Si n_1 y n_2 permanecieran con el promedio fijo E , debería ser siempre nulo y no tendríamos dispersión a 90° . Pero éste no es el caso, como veremos.

Observemos la intensidad de la radiación dispersada. La intensidad es proporcional al cuadrado del campo radiado. Lo promediaremos sobre un período. (El período es aproximadamente 10^{-15} seg; n_1 y n_2 no varían durante ese tiempo). Entonces, la intensidad dispersada es proporcional al cuadrado de la amplitud A . Excepto constantes que no interesan:

$$\text{Intensidad} = A^2 = (n_1 - n_2)^2 A_1^2. \quad (5)$$

Ahora consideremos el efecto de las fluctuaciones en $n_1 - n_2$. Si promediamos sobre un intervalo de tiempo suficientemente grande, de manera que las regiones 1 y 2 puedan “mostrar” la densidad numérica constantemente variable, veremos que la intensidad promedio de las dos regiones es justamente el promedio de $(n_1 - n_2)^2$ veces la intensidad de una molécula que pertenece a la región 1. Usando la letra I para la intensidad promediada temporalmente de las dos regiones, tenemos:

$$I = \overline{(n_1 - n_2)^2} I_1, \quad (6)$$

donde I_1 es la intensidad de una molécula (la que está en la región 1) y donde las barras denotan promediación temporal. Ahora bien, el promedio de n_1 , \bar{n}_1 , es igual al valor promedio de n_2 , \bar{n}_2 . Por consiguiente, podemos escribir:

$$\begin{aligned} (n_1 - n_2)^2 &= [(n_1 - \bar{n}_1) - (n_2 - \bar{n}_2)]^2 \\ &= (n_1 - \bar{n}_1)^2 + (n_2 - \bar{n}_2)^2 - 2(n_1 - \bar{n}_1)(n_2 - \bar{n}_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Tomando el promedio, hallamos

$$\begin{aligned} \overline{(n_1 - n_2)^2} &= \overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} + \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} \\ &\quad - 2\overline{(n_1 - \bar{n}_1)(n_2 - \bar{n}_2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Hasta ahora, todo lo que hemos escrito se aplica tanto al aire como al agua. Vamos ahora a la diferencia crucial: para el aire, las dos regiones 1 y 2 son completamente “independientes”, en el sentido que las fluctuaciones de n_1 (a un instante dado) son independientes de las de n_2 . (Para agua no es éste el caso. Todas las moléculas se tocan. Si queremos empujar una molécula en la región 1, debemos hacerle un lugar sacando de su lugar a las del otro lado.) Por consiguiente, para *el aire*, promedio de los productos de $(n_1 - \bar{n}_1)$ y $(n_2 - \bar{n}_2)$ es el producto de los dos promedios independientes:

$$\overline{(n_1 - \bar{n}_1)(n_2 - \bar{n}_2)} = \overline{(n_1 - \bar{n}_1)} \cdot \overline{(n_2 - \bar{n}_2)} = (\bar{n}_1 - \bar{n}_1) \cdot (\bar{n}_2 - \bar{n}_2) = 0. \quad (9)$$

(La cuestión crucial fue reconocer que, para el aire, la fluctuación de n_1 es independiente a la de n_2 .) A continuación calculamos el promedio cuadrático de las fluctuaciones de n_1 y n_2 alrededor de sus valores medios. En el caso del aire hay “abundancia de espacio” en la región 1 (o la región 2); no hay apiñamiento de moléculas. El hecho de que pueda haber un exceso de moléculas en la región 1 a un instante dado, no influye para que una molécula adicional pueda entrar en la región. En este caso (como puede verse en el Vol. V), el número de moléculas en la región 1 (o región 2) obedece a una función de distribución de probabilidad (llamada “la distribución de Poisson”) para la que la desviación cuadrática media de n_1 (respecto de su valor medio) es igual al valor medio mismo:

$$\overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} = \bar{n}_1, \quad \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} = \bar{n}_2. \quad (10)$$

Esta relación se verifica para las moléculas de aire, pero *no* para las moléculas de agua, puesto que la presencia de un pequeño exceso inhibe la entrada de moléculas adicionales. Para el agua tenemos

$$\overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} \ll \bar{n}_1, \quad \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} \ll \bar{n}_2. \quad (11)$$

El promedio temporal de la intensidad de las dos regiones está así dado para el aire

$$\begin{aligned} I &= \overline{(n_1 - n_2)^2} I_1 \\ &= \overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} I_1 + \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} I_1 + 0 \\ &= \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_1 \\ &= \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Esta intensidad es justamente la suma de las *intensidades* con que contribuyen las moléculas de aire de la región 1 más la contribución de las moléculas de la región 2. Para el agua tenemos, en realidad

$$I = \overline{(n_1 - n_2)^2} I_1 \ll \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_2. \quad (13)$$

Si n_1 y n_2 fueran siempre exactamente iguales, tendríamos la “perfectamente rígida y uniforme agua” que da intensidad nula.

Por un experimento muy simple e ingenioso, R. W. Wood ha mostrado que la intensidad de la luz dispersada a 90° es proporcional a las moléculas contribuyentes, como predice la ecuación (12). Puede repetir el experimento. Véase por ejemplo, la descripción en M. Minnaert, *Light and colour*, párrafos 172 y 174 (Dover Publications, Inc., Nueva York, 1964).

9 Ondas electromagnéticas en medios materiales

La discusión aquí será más general que en el grueso del libro. No evitaremos discutir la parte absorbente de la constante dieléctrica ni evitaremos usar números complejos.

Ecuaciones de Maxwell. Comenzaremos por escribir las ecuaciones de Maxwell en la forma más general (en ues)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{tot}} = 4\pi\rho_{\text{libre}} - 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{tot}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{libre}} + \left(4\pi \nabla \times \mathbf{M} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4)$$

[Para la ecuación (1) véase Vol. II, pág. 368, ecuación (1); para la ecuación (2) véase Vol. II, pág. 340, ecuación (57); para la ecuación (3) véase Vol. II, pág. 352, ecuación (79) las cuales se verifican cuando \mathbf{M} es cero, y pág. 398, ecuación (50) que se verifica cuando $\partial \mathbf{p}/\partial t$ y $\partial \mathbf{E}/\partial t$ son cero; para la ecuación (4) véase Vol. II, pág. 248, ecuación (30)].

Otra forma de escribir las ecuaciones (1) a (4) es como sigue:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \{\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}\} = 4\pi\rho_{\text{libre}} \quad (6)$$

$$\nabla \times \{\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}\} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \{\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}\} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{libre}} \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (8)$$

La combinación $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ se llama \mathbf{D} . La combinación $\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ se llama \mathbf{H} :

$$\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \equiv \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \equiv \mathbf{H}. \quad (9)$$

Sin embargo, evitaremos usar los símbolos \mathbf{D} y \mathbf{H} .

Medios lineales isotrópicos. La fuerza sobre una carga puntual localizada en un punto x, y, z a un tiempo determinado t está dado por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}, \quad (10)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{B} son los campos instantáneos locales. En la discusión de los medios continuos usamos la fuerza promedio por unidad de carga, promediada sobre un volumen pequeño, para definir los valores promedios espaciales de \mathbf{E} y \mathbf{B} . Consideraremos que estos campos actúan sobre una carga "promedio", cuya carga y velocidad son promediadas sobre un elemento de volumen, y corresponden a la carga y densidad de corriente en el elemento de volumen.

Las fuerzas sobre las cargas y las corrientes en el medio son debidas a los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} en el medio. Estas fuerzas modifican las cargas y las corrientes (la distribución de ellas) y contribuyen a \mathbf{P} y \mathbf{M} . Los medios se dicen ser *isotrópicos* si la polarización \mathbf{P} se produce según $\pm \mathbf{E}$, y la magnetización \mathbf{M} se produce según $\pm \mathbf{B}$. Ello implica también que \mathbf{P} sea cero cuando \mathbf{E} es cero y \mathbf{M} sea cero cuando \mathbf{B} es cero. Lo que supone asimismo que (por ejemplo) P_x depende sólo de E_x y no de E_y o E_z . (En algunos cristales, si se estimulan los electrones de los átomos con una fuerza proporcional a \mathbf{E} , su desplazamiento, que es fuente de \mathbf{P} , no es según la dirección de \mathbf{E} debido a que la fuerza de vínculo del cristal hace que sea más fácil moverlos en ciertas direcciones.) Así, para un medio isotrópico tenemos, por ejemplo,

$$P_x = \chi E_x + \alpha E_x^2 + \beta E_x^3 + \dots \quad (11)$$

Para campos suficientemente débiles los términos superiores al primer orden en la ecuación (11) son despreciables. Éste es el caso para las intensidades ordinarias de los campos electromagnéticos. (Para campos suficientemente fuertes, como los que se pueden producir con un laser de rubí, la contribución no lineal a \mathbf{P} puede ser detectada y estudiada.) Se dice que un medio es *lineal* si se pueden despreciar los términos αE_x^2 , βE_x^3 , etc., en la ecuación (11). Se ve que la "linealidad" no es exactamente una propiedad del medio, sino del campo presente.

Definición de χ , χ_m , ϵ y μ para campos estáticos. Para un medio lineal isotrópico, la susceptibilidad eléctrica χ y la susceptibilidad magnética χ_m se definen para campos independientes del tiempo como sigue:

$$P_x(x, y, z) = \chi(x, y, z) E_x(x, y, z) \quad (12)$$

$$M_x(x, y, z) = \frac{\chi_m}{\mu} B_x(x, y, z). \quad (13)$$

La constante dieléctrica ϵ y la permeabilidad magnética μ se definen por

$$E_x + 4\pi P_x = \epsilon E_x \quad (14)$$

$$B_x - 4\pi M_x = \frac{1}{\mu} B_x. \quad (15)$$

Combinando estas definiciones tenemos

$$1 + 4\pi\chi = \epsilon \quad (16)$$

$$1 - 4\pi \frac{\chi_m}{\mu} = \frac{1}{\mu}. \quad (17)$$

[Para la ecuación (14), véase Vol. II, pág. 338, ecuación (38). Para la ecuación (15), véase Vol. II, pág. 402, ecuación (55) para la ecuación $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, y pág. 398, ecuación (52) para la definición $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$. La definición más amplia $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ da la ecuación (15).]

Susceptibilidades para campos dependientes del tiempo. Deseamos extender estas relaciones de manera que se verifiquen para campos dependientes del tiempo en un medio isotrópico lineal. Podríamos esperar que una vez que hemos medido, por ejemplo, χ para los campos eléctricos estáticos, podríamos generalizar la ecuación (12) escribiendo $P_x(x, y, z, t) = \chi E_x(x, y, z, t)$ donde χ es el valor obtenido para medidas estáticas. Esta esperanza debe ser abandonada como veremos. En general, es necesario hacer un análisis de Fourier para las varias frecuencias componentes del campo. Así no existe un χ que pueda ser factor de las contribuciones a \mathbf{P} de las distintas frecuencias.

Una vez que hemos hallado que las susceptibilidades dependen de la frecuencia, podríamos esperar que la ecuación (12) podría generalizarse así

$$P_x(x, y, z, \omega t) = \chi(x, y, z, \omega) E_x(x, y, z, \omega t), \quad (18)$$

con una expresión similar para M_x . Sin embargo, se tiene que la ecuación (18) es una sobresimplificación, puesto que implica que P_x es proporcional a E_x en cualquier instante, es decir, que P_x está en *fase* (excepto un posible signo menos) con E_x . En forma más general, debemos incluir la posibilidad de una componente de P_x que esté en *cuadratura* con E_x (es decir, $\pm 90^\circ$ fuera de fase con E_x). Se hallará que la parte de P_x que está en fase con E_x no origina absorción electromagnética del medio. Por consiguiente, llamaremos “elástica” o “dispersiva” a esta parte. La parte de P_x que está en cuadratura con E_x da la absorción de energía y, por consiguiente, será llamada para “absorbente” de P_x . Podemos escribir $P_x(x, y, z, \omega t)$ como la suma de una parte elástica y una parte absorbente. Para medios isotrópicos lineales, la parte elástica

es proporcional a $E_x(x, y, z, \omega t)$ con una constante de proporcionalidad $\chi_{el}(x, y, z, \omega)$. La parte absorbente puede tomarse proporcional a $E_x(x, y, z, \omega t - \pi/2)$, con una constante de proporcionalidad $\chi_{ab}(x, y, z, \omega)$:

$$P_x(x, y, z, \omega t) = \chi_{el}(x, y, z, \omega)E_x(x, y, z, \omega t) + \chi_{ab}(x, y, z, \omega)E_x(x, y, z, \omega t - \frac{1}{2}\pi). \quad (19)$$

Consideremos una situación dada e indiquémosla por x, y, z . Supongamos que allí tenemos

$$E_x(\omega t) = E_0 \cos(\omega t - \varphi). \quad (20)$$

Entonces, por la ecuación (19)

$$P_x(\omega t) = \chi_{el}E_x(\omega t) + \chi_{ab}E_x(\omega t - \frac{1}{2}\pi), \quad (21)$$

es decir,

$$P_x(\omega t) = \chi_{el}E_0 \cos(\omega t - \varphi) + \chi_{ab}E_0 \sin(\omega t - \varphi). \quad (22)$$

Modelo simple de un medio lineal isotrópico. Suponga que en un pequeño entorno de una situación dada, el medio consiste de N “átomos” neutrales por unidad de volumen. Cada átomo consiste de una partícula (un electrón) que tiene masa M , carga q (con q algebraico, es decir, sin especificar el signo) por un resorte de constante $M\omega_0^2$ a un “núcleo” muy pesado que tiene una carga de igual magnitud y signo opuesto a q . (También podemos incluir el caso en que ω_0 es cero. En este caso tenemos un plasma neutral.) Despreciando el relativamente pequeño movimiento del núcleo y, por consiguiente, despreciando su contribución a \mathbf{P} . Los átomos no tienen momento magnético, y no se inducen por un campo magnético exterior. Así que la magnetización es nula. Despreciamos las fluctuaciones y las irregularidades en el movimiento de las partículas individuales y suponemos que todas las partículas se comportan como una partícula ficticia “promedio”. Se supone que la partícula M es accionada por el resorte, por el campo eléctrico $E_x(\omega t)$ en su posición y por la fuerza de amortiguamiento, que es la responsable de la pérdida de energía de la partícula por colisiones con las vecinas (o por radiación). Despreciamos la fuerza $q(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ de la partícula M comparada con la fuerza $q\mathbf{E}$. Esto es, porque suponemos que no hay presentes campos magnéticos estáticos y además porque suponemos también que \mathbf{v}/c es siempre pequeño. (Éste es el caso aun para campos eléctricos intensos producidos por un laser de rubí.) Por consiguiente, para la componente x del movimiento de q tenemos

$$M\ddot{x} = -M\omega_0^2 x - M\Gamma\dot{x} + qE_x, \quad (23)$$

con

$$E_x(\omega t) = E_0 \cos(\omega t - \varphi). \quad (24)$$

La fuerza de amortiguamiento $-M\Gamma\dot{x}$ representa la transferencia de energía de la carga oscilante al medio. Esta energía no está ni en las componentes del campo electromagnético de frecuencia ω ni en la energía de oscilación de M a la frecuencia ω , sino que está en forma de energía transaccional y rotacional de los átomos, y también en las vibraciones “casuales” a otras frecuencias. Se llama *calor*.

Al escribir la ecuación (24) suponemos que la amplitud E_0 y la fase φ depende sólo de la posición de equilibrio de la carga q y no del desplazamiento instantáneo $x(t)$ de q de su posición de equilibrio. Por consiguiente, suponemos que la amplitud de vibración de q es pequeña comparada con la longitud de onda de las ondas electromagnéticas que da la dependencia temporal y espacial de E_x . Por otra parte, deberíamos incluir la dependencia en x de E_0 y φ .

Suponemos que el campo local E_x que aparece en la ecuación (23) para el movimiento de nuestra carga promedio, es el mismo promedio espacial que aparece en la ecuación (21). Éste es aproximadamente el caso para los gases y algunos cristales. (En muchos cristales el campo que actúa sobre una carga dada está apantallado por las cargas vecinas. De manera que el promedio del campo local no coincide con el promedio del campo espacial.)

De acuerdo con la Sección 3.2, la solución estacionaria de la ecuación (23) tiene la forma

$$x(t) = A_{el} \cos(\omega t - \varphi) + A_{ab} \sin(\omega t - \varphi),$$

donde $A_{el} \cos(\omega t - \varphi)$ es la componente elástica del desplazamiento x , es decir, la parte en fase con la fuerza estimuladora, y $A_{ab} \sin(\omega t - \varphi)$ es la parte absorbente del desplazamiento, es decir, la parte en cuadratura con la fuerza estimuladora. Las amplitudes elásticas y absorbentes están dadas por:

$$A_{el} = \frac{qE_0}{M} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad (25)$$

$$A_{ab} = \frac{qE_0}{M} \frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}. \quad (26)$$

La polarización P_x es N (la densidad numérica) veces el momento dipolar qx correspondiente al desplazamiento x de q de su posición de equilibrio. Así, tenemos

$$P_x(t) = Nqx(t) \quad (27)$$

es decir,

$$P_x(t) = NqA_{el} \cos(\omega t - \varphi) + NqA_{ab} \sin(\omega t - \varphi), \quad (28)$$

es decir,

$$P_x(\omega t) = \frac{NqA_{el}}{E_0} E_x(\omega t) + \frac{NqA_{ab}}{E_0} E_x(\omega t - \frac{1}{2}\pi). \quad (29)$$

Por comparación de la ecuación (29) con la (21) hallamos

$$\chi_{el} = \frac{NqA_{el}}{E_0} = \frac{Nq^2}{M} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad (30)$$

$$\chi_{ab} = \frac{NqA_{ab}}{E_0} = \frac{Nq^2}{M} \frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}. \quad (31)$$

Uso de cantidades complejas en las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell no contienen la raíz cuadrada de -1 . Ni tampoco la tienen las magnitudes **E**, **B**, **P**, o **M**. Sin embargo, podemos simplificar enormemente el álgebra utilizada para describir las ondas electromagnéticas en medios *donde hay absorción* haciendo uso de números complejos.

Cuando la absorción puede despreciarse, la ecuación (21) se reduce a la forma más simple $P_x(\omega t) = \chi(\omega) E_x(\omega t)$, donde $\chi(\omega)$ es χ_{el} . Ésta es la forma de la ecuación (18), que es similar a la relación que se verifica para campos estáticos, ecuación (12). En este caso, las definiciones de constante dieléctrica y permeabilidad magnética dadas por las ecuaciones (12) a la (17), pueden usarse para campos dependientes del tiempo.

Cuando la absorción no puede ser despreciada, la ecuación (18) debe reemplazarse por una más complicada dada por la ecuación (21). Eso se debe a que hemos de incluir la "cuadratura", así como también las componentes "en fase" de **P** (y similarmente de **M**) cuando no podemos despreciar la absorción. En tal caso debemos seguir separadamente **E**(ωt), **E**($\omega t - \pi/2$), **B**(ωt), **B**($\omega t - \pi/2$), y las correspondientes polarizaciones y magnetizaciones que están en fase o en cuadratura con **E**(ωt) y **B**(ωt).

Una bonita forma de realizarlo es hacer uso de las cantidades complejas, a las que llamaremos **E**, **B**, **P** y **M**, entendiendo que *los campos físicos reales son la parte real de estos "campos complejos"*. La dependencia temporal de los campos complejos se toma como $\exp(-i\omega t)$, donde el signo menos es la convención usada en óptica. [En ingeniería eléctrica, la convención usual es $\exp(+i\omega t)$.] En mecánica cuántica, la convención es siempre $\exp(-i\omega t)$. Así introducimos la cantidad compleja E_x (en una posición dada) dada por

$$E_x(\omega t) = E_0 e^{i\varphi} e^{-i\omega t} = E_0 \cos(\omega t - \varphi) - iE_0 \sin(\omega t - \varphi). \quad (32)$$

El campo físico correspondiente al campo complejo E_x es la parte real de E_x y es así igual a $E_0 \cos(\omega t - \varphi)$ de acuerdo con la ecuación (32).

La simplificación que hacemos al usar la dependencia temporal compleja $\exp(-i\omega t)$ es la que resulta del hecho de que la variación de fase en 90° es meramente equivalente a multiplicar por i :

$$e^{-i[\omega t - (1/2)\pi]} = e^{i(1/2)\pi} e^{-i\omega t} = ie^{-i\omega t}.$$

Así:

$$E_x(\omega t - \frac{1}{2}\pi) = iE_x(\omega t). \quad (33)$$

Susceptibilidad compleja. Usando o no campos complejos, la polarización física está relacionada con el campo eléctrico físico por la relación lineal (para un medio isotrópico lineal)

$$P_x(\omega t) = \chi_{el} E_x(\omega t) + \chi_{ab} E_x(\omega t - \tfrac{1}{2}\pi), \quad (34)$$

donde todas las cantidades son reales y, por consiguiente, físicas. Ahora hacemos uso del complejo $E_x(\omega t)$ dado por la ecuación (32) y reinterprete (34) con P_x y E_x complejos (χ_{el} y χ_{ab} se mantienen reales):

$$\begin{aligned} P_x(\omega t) &= \chi_{el} E_x(\omega t) + \chi_{ab} E_x(\omega t - \tfrac{1}{2}\pi) \\ &= \chi_{el} E_x(\omega t) + i\chi_{ab} E_x(\omega t) \end{aligned}$$

es decir,

$$P_x(\omega t) = \chi(\omega) E_x(\omega t), \quad (35)$$

donde

$$\chi(\omega) = \chi_{el} + i\chi_{ab}. \quad (36)$$

La polarización física según x es la parte real de la cantidad compleja P_x dada por la ecuación (35). Comprende la parte real, χ_{el} , y la parte imaginaria, χ_{ab} , de la susceptibilidad compleja $\chi_{el} + i\chi_{ab}$. (Por supuesto, χ_{el} y χ_{ab} son ambas cantidades reales). Por ejemplo [tomando $\varphi = 0$ en la ecuación (32)] tenemos

$$E_x = E_0 e^{-i\omega t} = E_0 \cos \omega t - iE_0 \sin \omega t \quad (37)$$

$$\begin{aligned} P_x &= \chi E_x = (\chi_{el} + i\chi_{ab})(E_0 \cos \omega t - iE_0 \sin \omega t) \\ &= \chi_{el} E_0 \cos \omega t + \chi_{ab} E_0 \sin \omega t + i \cdot (\text{parte imaginaria}). \end{aligned} \quad (38)$$

La parte real de P_x como la dada por la ecuación (38), la parte real de E_x como la dada por la ecuación (37) y las cantidades reales χ_{el} y χ_{ab} que satisfacen la ecuación (34), se verifican para campos físicos (reales).

Constantes dieléctricas complejas. Debido a la introducción de los campos complejos E_x y P_x hemos obtenido la muy simple expresión $P_x = \chi E_x$ dada por la ecuación (35) en lugar de la expresión más complicada de la ecuación (34). El precio de esto ha sido que ahora tenemos la susceptibilidad compleja $\chi(\omega)$ dada por la ecuación (36). Debido a que la ecuación (35) es similar en forma a la ecuación (12) (que se verifica para campos estáticos, se pueden extender las definiciones dadas por las ecuaciones (12) a la (17) de manera que se verifique para campos dependientes del tiempo. Esto significa que cuando no podamos despreciar la absorción debemos usar constante dieléctrica compleja y

constante de permeabilidad magnética compleja si queremos que las ecuaciones (12) a la (17) se verifiquen. Entonces de acuerdo con las ecuaciones (16) y (36) tenemos

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + 4\pi\chi_{el} + i4\pi\chi_{ab}. \quad (39)$$

Así,

$$\epsilon = \text{Re } \epsilon + i \text{Im } \epsilon,$$

donde

$$\text{Re } \epsilon = 1 + 4\pi\chi_{el} \quad (40)$$

$$\text{Im } \epsilon = 4\pi\chi_{ab}. \quad (41)$$

Para $\omega = 0$, todas las cantidades se reducen a sus valores estáticos.

Constante dieléctrica compleja para el modelo simple de un medio lineal isotrópico. Para nuestro modelo simple tenemos $\mathbf{M} = 0$. Por consiguiente, $\chi_m = 0$ y $\mu = 1$ de acuerdo con las ecuaciones (13), (15) y (17). La susceptibilidad eléctrica tiene parte real (es decir, elástica) e imaginaria (es decir, absorbente) dada por las ecuaciones (30) y (31). Así, la ecuación (39) da

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi Nq^2}{M} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} + i \frac{4\pi Nq^2}{M} \cdot \frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}. \quad (42)$$

Podemos remarcar que una vez que hemos decidido usar números complejos la solución de la ecuación de movimiento de q , ecuación (23), es muy simple:

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{q}{M} E_x = \frac{q}{M} E_0 e^{-i\omega t}, \quad (43)$$

con E_0 complejo. Ahora $x = x_0 \exp(-i\omega t)$. Entonces, $\dot{x} = -i\omega x$ y $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Sustituyendo en la ecuación (43) da

$$(-\omega^2 - i\omega\Gamma + \omega_0^2)x = \frac{q}{M} E_x,$$

es decir,

$$x(\omega t) = \frac{q}{M} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\Gamma} E_x(\omega t). \quad (44)$$

Entonces, la susceptibilidad compleja está dada por

$$\chi(\omega) = \frac{P_x}{E_x} = \frac{Nqx}{E_x} = \frac{Nq^2}{M} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\Gamma}. \quad (45)$$

La constante dieléctrica compleja ϵ está dada por

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi Nq^2}{M} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\Gamma}. \quad (46)$$

Se puede verificar fácilmente que las ecuaciones (46) y (42) son equivalentes, multiplicando el numerador y denominador por $\epsilon - 1$ [en la ecuación (46)] por $(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma$ y tratar de escribir ϵ como la suma de $\text{Re } \epsilon + i \text{Im } \epsilon$. Algunas veces es más conveniente dejar ϵ en la forma de la ecuación (46).

Ecuaciones de Maxwell para medios lineales isotrópicos. Comenzaremos con las ecuaciones generales de Maxwell dadas por las ecuaciones (5) a la (8). Entonces suponemos las relaciones lineales entre P_x y E_x y entre M_x y B_x dadas por las ecuaciones (12) a la (17). Estas relaciones sólo son válidas para cantidades reales si tomamos $\omega = 0$, que se verifican para frecuencias arbitrarias ω sólo si tomamos todas las cantidades complejas, como ya hemos visto. Así obtenemos las ecuaciones de Maxwell que relacionan los campos complejos \mathbf{B} y \mathbf{E} (cuyas partes reales son los campos físicos):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (47)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho_{\text{libre}} \quad (48)$$

$$\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \frac{1}{c} \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{libre}} \quad (49)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (50)$$

Para el caso general de ϵ dependiente de la frecuencia y μ dependiente de la frecuencia, estas ecuaciones están referidas a una frecuencia dada ω . Puesto que las físicas ρ_{lib} y \mathbf{J}_{lib} pueden cada una tener partes proporcionales a $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$, serán generalmente las partes reales de las cantidades complejas que aparecen arriba. Por supuesto, que en el caso especial de medio donde ϵ y μ no dependen de la frecuencia, todas las cantidades son reales.

Ecuaciones de Maxwell para medios homogéneos neutrales lineales e isotrópicos. En las ecuaciones (48) y (49), la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética son funciones complejas de la frecuencia ω y también de x, y, z , puesto que no se ha supuesto que todo el medio tenga las mismas propiedades. Por ejemplo, en nuestro modelo simple podemos tomar la densidad numérica como función de la posición, $N = N(x, y, z)$. Ahora consideraremos el caso especialmente simple e importante en que el medio es *homogéneo*, lo que significa que μ y ϵ

no dependen de x , y y z . Con estas suposiciones, ϵ y μ son constantes en las ecuaciones (48) y (49). También supondremos que el medio es *neutral*, con lo que significamos que ρ_{lib} y \mathbf{J}_{lib} son ambos nulos. (Nuestro modelo simple consiste de un gas neutral o un sólido amorfo o plasma.) Entonces las ecuaciones de Maxwell (47) a la (50) son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (51)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (52)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (53)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (54)$$

Nótese que si $\mu = 1$ y $\epsilon = 1$, obtenemos las ecuaciones de Maxwell para el vacío. Para el caso que nos interesa, μ y ϵ son en general complejos, de manera que \mathbf{E} y \mathbf{B} son complejos. Por ejemplo, para nuestro simple modelo, $\mu = 1$ y ϵ es complejo. Entonces \mathbf{E} y \mathbf{B} son complejos y los campos físicos son sus partes reales.

Ecuación de ondas. Las ecuaciones (51) a la (54) son ecuaciones lineales diferenciales. Las ecuaciones (53) y (54) son ecuaciones "acopladas" que relacionan \mathbf{B} y \mathbf{E} . Se obtiene una ecuación de segundo orden desacoplada como sigue. Tomemos el rotor de la ecuación (53) y usemos la (54):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (55)$$

Similarmente, tomemos el rotor de la ecuación (54) y usemos la (53):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (56)$$

Ahora apliquemos la identidad vectorial [Apéndice, ecuación (39)]

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C}) \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{C}) - \nabla^2 \mathbf{C} \quad (57)$$

al primer miembro de la ecuación (55) y, similarmente, a la (56) y usemos el hecho que $\nabla \cdot \mathbf{E}$ y $\nabla \cdot \mathbf{B}$ son ambos nulos. Esto da

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (58)$$

Las ecuaciones (58) consisten realmente de seis ecuaciones separadas, cada una de la forma

$$\nabla^2 \psi(x, y, z, t) - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (59)$$

donde $\psi(x, y, z, t)$ representa a cada una de las seis cantidades $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$.

Para los casos especiales en que ϵ y μ son reales y positivas e independientes de la frecuencia, la ecuación (59) es la clásica ecuación de onda para medios no dispersivos. Que en el caso del vacío, donde tenemos $\mu = \epsilon = 1$. Estamos interesados en el caso general de un medio lineal neutral e isotrópico, donde ϵ y μ son complejos y dependientes de la frecuencia. En ese caso tenemos \mathbf{E} y \mathbf{B} como cantidades complejas con la dependencia temporal $\exp(-i\omega t)$. Así, para las seis cantidades representadas por $\psi(x, y, z, t)$ tenemos

$$\psi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi. \quad (61)$$

Substituyendo la ecuación (61) en la (59) y simplificando $\exp(-i\omega t)$ da la ecuación diferencial que satisface la dependencia espacial $\varphi(x, y, z)$:

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z) + k^2 \varphi(x, y, z) = 0, \quad (62)$$

donde definimos la constante compleja k^2 por

$$k^2 = \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (63)$$

Índice de refracción compleja. También definiremos la constante compleja n^2 , llamada *cuadrado del índice de refracción complejo*, así

$$n^2 = \mu \epsilon. \quad (64)$$

Entonces

$$k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (65)$$

Note que siendo ϵ y μ complejos, también lo es k^2 y n^2 . Podemos tomar la raíz cuadrada de k^2 o de n^2 . La raíz cuadrada de un número complejo es también compleja. Así tenemos un k complejo y un índice de refracción complejo.

Soluciones en ondas planas. La solución general de la ecuación (62) puede escribirse como una superposición de términos de la forma

$$\varphi(x, y, z) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \exp i(k_x x + k_y y + k_z z), \quad (66)$$

donde

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (67)$$

Entonces la solución general de la ecuación (59) puede ser escrita como una superposición de ondas planas propagándose de la forma

$$\psi(x, y, z, t) = e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (68)$$

con k^2 complejo.

Ondas planas propagándose según el eje z . Como un caso especial consideraremos el caso en el que sólo k_z es diferente de cero. Entonces, la solución general es una onda plana que se propaga según $+z$ y otra que lo hace según $-z$:

$$\psi(z, t) = [A^+ e^{+ikz} + A^- e^{-ikz}] e^{-i\omega t}, \quad (69)$$

donde $+k$ y $-k$ son las raíces cuadradas de k^2 , A^+ y A^- son constantes complejas. Puesto que queremos que $\exp[i(kz - \omega t)]$ represente una onda plana propagándose en la dirección $+z$, la raíz cuadrada de k^2 deberá tener una parte real positiva, siempre que k tenga una parte real. Si resulta que k es imaginario puro, entonces la raíz cuadrada de k^2 es igual a $+i|k|$.

Relación entre \mathbf{E} y \mathbf{B} para ondas planas. La ecuación (69) debe verificarse para cualquiera de las seis cantidades $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ puesto que todas las cantidades satisfacen la ecuación de onda (59). En la obtención de la ecuación de onda (ecuación de segundo orden) hemos perdido cierta información contenida en las ecuaciones de primer orden (ecuaciones de Maxwell). Ahora retornaremos a las ecuaciones de Maxwell e incorporaremos toda la información. De $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ concluimos que B_z y E_z son constantes (para \mathbf{k} en la dirección de eje z). Puesto que no estamos considerando el caso especial de frecuencia cero, esta constante es cero. Debemos tener sólo E_x, E_y, B_x, B_y a considerar. Por simplicidad, consideraremos sólo polarización lineal con E_x distinta de cero y E_y igual a cero. Entonces, de acuerdo con la ecuación (69), tenemos

$$E_x(z, t) = (E^+ e^{ikz} + E^- e^{-ikz}) e^{-i\omega t}, \quad (70)$$

donde E^+ y E^- son complejos constantes. De las ecuaciones de Maxwell (53) y (54) hallamos que B_x es cero y que B_y E_x están relacionadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= -c \frac{\partial E_x}{\partial z}.\end{aligned}\quad (71)$$

Usando el hecho que B_y tiene la forma dada por la ecuación (69) y usando las ecuaciones (71) hallamos

$$B_y(z, t) = n(E^+ e^{ikz} - E^- e^{-ikz}) e^{-i\omega t}. \quad (72)$$

Así, si E_x está dado [ver ecuación (70)], entonces B_y está completamente determinado [por la ecuación (72)]. Resultados similares se obtienen considerando E_y no nula. Éstos son los resultados generales para el campo propagándose en la dirección $\pm \hat{z}$, así \mathbf{B} y \mathbf{E} están relacionados por

$$\mathbf{B}^+ = +\hat{z} \times (n\mathbf{E}^+), \quad \mathbf{B}^- = -\hat{z} \times (n\mathbf{E}^-), \quad (73)$$

donde los superíndices se refieren a la propagación según $+\hat{z}$ o $-\hat{z}$. En todas estas relaciones, n y k son generalmente complejos.

Ejemplo numérico de índice de refracción complejo. Supongamos que tenemos un medio con $\mu = 1,0$ y $\epsilon = 1 + i\sqrt{3}$ a una frecuencia dada ω . Entonces,

$$n^2 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \exp(i\frac{1}{3}\pi). \quad (74)$$

$$n = \sqrt{2} \exp i \frac{\pi}{6} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} i \right) = 1,225 + 0,707i$$

$$k = n \frac{\omega}{c} = 1,225 \frac{\omega}{c} + 0,707i \frac{\omega}{c}.$$

Supongamos que la onda está linealmente polarizada según el eje x y la dirección de propagación $+z$. Entonces $E^- = 0$. Tenemos $E^+ = E_0$ donde E_0 es real. Entonces

$$E_x = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{-0,707(\omega/c)z} e^{i\omega[(1,225z/c) - t]}$$

$$B_y = nE_x = \sqrt{2}E_x \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right).$$

En este ejemplo, la onda se propaga en la dirección $+z$. Su longitud de onda (distancia a la cual la fase aumenta en 2π a un tiempo fijo t)

es $(1,225)^{-1}$ veces la de la onda en el vacío. La amplitud de onda decrece exponencialmente con la distancia. El campo magnético es $\sqrt{2}$ veces mayor en magnitud que el campo eléctrico y retrasado en 60° .

Reflexión y transmisión de ondas planas. Suponga que los medios 1 y 2 son diferentes medios homogéneos que tiene el plano $z = 0$ como interfase. El medio 1 ocupa todo el espacio correspondiente a z negativo, el medio 2 ocupa el correspondiente a z positivo. Una onda plana es generada por una fuente en $z = -\infty$. Esto da una onda incidente que se propaga en la dirección $+z$ en el medio 1. La discontinuidad genera una onda reflejada y otra transmitida. Para simplificar, sólo consideraremos la incidencia normal. Sea la onda incidente polarizada según x y con amplitud compleja unidad para E_x . Sean R_{12} y T_{12} las amplitudes complejas de la E_x reflejada y transmitida. Así tenemos:

$$E_x(1) = 1 \cdot e^{i(k_1 z - \omega t)} + R_{12} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \quad (75)$$

$$E_x(2) = T_{12} e^{i(k_2 z - \omega t)}, \quad (76)$$

Donde $E_x(1)$ es la total en el medio 1 (es decir, la incidente más la reflejada), $E_x(2)$ es la total (es decir, la transmitida) en el medio 2 y R_{12} y T_{12} son constantes complejas incógnitas, que deben determinarse.

Podemos usar la ecuación (72) para hallar B_y en ambos medios, una vez que E_x se conoce:

$$B_y(1) = n_1 e^{i(k_1 z - \omega t)} - n_1 R_{12} e^{-i(k_1 z + \omega t)}, \quad (77)$$

$$B_y(2) = n_2 T_{12} e^{i(k_2 z - \omega t)}. \quad (78)$$

Condiciones de contorno en $z = 0$. Siendo que tenemos una discontinuidad en $z = 0$, no podemos usar las ecuaciones de Maxwell para medios homogéneos cuando se considera la región que bordea al plano $z = 0$. En realidad usamos las ecuaciones de Maxwell (47) a la (50) para un medio lineal isotrópico. Suponemos que ambos miembros son neutros y que no hay cargas superficiales o corrientes en el plano de discontinuidad. Las dos ecuaciones de Maxwell que nos interesan son las que se incluyen el rotor:

$$\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \frac{1}{c} \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon \mathbf{E} \quad (79)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B} \quad (80)$$

donde $\mathbf{E} = \hat{x}E_x$ y $\mathbf{B} = \hat{y}B_y$ para nuestro problema. De acuerdo con el teorema de Stokes, cualquier vector \mathbf{C} satisface

$$\int (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l}, \quad (81)$$

donde dA es un elemento de superficie y dl es un elemento de longitud del contorno que encierra el área. Aplicamos la ecuación (81) a $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{y}} (B_y/\mu)$ usando un contorno que va según la dirección $+\mathbf{y}$ sobre un lado del plano $z = 0$ y vuelve según la dirección $-\mathbf{y}$ sobre el otro lado del plano con una pequeña separación Δz entre las dos partes del contorno. Cuando Δz tiende a cero, el área del contorno también lo hace. De aquí que la integral superficial del primer miembro de la ecuación (81) tiende a cero, siempre que $\nabla \times \mathbf{C}$ no sea infinita (no lo es). Por consiguiente, la integral curvilínea del segundo miembro de la ecuación (81) es cero y entonces la componente tangencial de \mathbf{C} (tangencial al contorno) es la misma a cada lado del contorno. Así hallamos que la componente tangencial de $\mathbf{B}\mu$ es la misma a ambos lados del contorno; es decir, es continua en $z = 0$. Similarmente, la componente tangencial de \mathbf{E} es continua en $z = 0$.

La continuidad de E_x en $z = 0$ da [usando las ecuaciones (75) y (76)]

$$1 + R_{12} = T_{12}. \quad (82)$$

La continuidad de $H_y = B_y/\mu$ en $z = 0$ da [usando las ecuaciones (77) y (78)]

$$\frac{n_1}{\mu_1}(1 - R_{12}) = \frac{n_2}{\mu_2}T_{12}. \quad (83)$$

Definiendo la impedancia característica (a menos de una constante de proporcionalidad)

$$Z = \frac{\mu}{n} = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (84)$$

y resolviendo las ecuaciones (82) y (83) obtenemos

$$R_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad T_{12} = 1 + R_{12}. \quad (85)$$

Para el caso especial en que la permeabilidad magnética μ es la unidad, tenemos $Z = n^{-1}$. Entonces la ecuación (85) se transforma en

$$R_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad T_{12} = 1 + R_{12}. \quad (86)$$

Para el caso particular en que el medio 1 es el vacío con $n_1 = 1$ y el medio 2 es un medio con índice complejo $n = n_R + in_I$, la ecuación (86) da

$$R_{12} = \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{(1 - n_R) - in_I}{(1 + n_R) + in_I} \equiv |R| \exp i\varphi. \quad (87)$$

La amplitud de la onda reflejada es $|R|$ veces la de la onda incidente. La dependencia temporal $\exp(-i\omega t)$ de la onda incidente se transforma en $\exp(-i\omega t + i\varphi)$ para la onda reflejada, de manera que φ es el *retardo* de fase introducido por la reflexión. La intensidad fraccional es $|R_{12}|^2$, donde de acuerdo con la ecuación (87)

$$|R_{12}|^2 = \frac{(1 - n_R)^2 + n_I^2}{(1 + n_R)^2 + n_I^2}. \quad (88)$$

Ejemplo: Modelo simple para la relación de dispersión del conductor

Suponemos que podemos aplicar nuestro modelo simple. Tomamos la constante del resorte $M\omega_0^2$ como cero. Esto significa que la carga promedio obedece la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} = \frac{q}{M} E_x. \quad (89)$$

Primero consideraremos un campo eléctrico estacionario que fue establecido bruscamente a $t = 0$. La velocidad \dot{x} es exponencial respecto al tiempo hasta que alcanza la velocidad final dada por la ecuación (89) poniendo $\ddot{x} = 0$. Para un campo constante E_x establecido bruscamente a $t = 0$, la solución de la ecuación (89) es:

$$\dot{x} = \frac{qE_x}{\Gamma M} (1 - e^{-\Gamma t}), \quad \dot{x} = \frac{qE_x}{\Gamma M} \quad \text{cuando} \quad t \gg \Gamma^{-1}. \quad (90)$$

Así Γ , que tiene dimensiones de frecuencia, da la rapidez de alcance de la velocidad final. Poniéndolo en forma diferente, Γ^{-1} es el tiempo medio de relajación cuando el campo es cambiado bruscamente para tomar otro valor constante.

Rango de frecuencias puramente resistivo. Para “pequeños” ω (significamos por ω pequeños: pequeño respecto de Γ), las cargas estarán siempre en, esencialmente, la velocidad final correspondiente al campo instantáneo E_x . En este caso, la relación de fase entre \dot{x} y E_x es prácticamente la misma que para frecuencia cero. (Es decir, para campos constantes.) Se dice entonces que el medio es *puramente resistivo*. Entonces, la ecuación (90) da

$$\dot{x}(t) = \frac{qE_x(t)}{\Gamma M}, \quad \omega \ll \Gamma. \quad (91)$$

La densidad de corriente \mathbf{J}_x es proporcional a E_x (esto se denomina *ley de Ohm*). La conductividad puramente resistiva σ_{PR} está relacionada a Γ como sigue:

$$\mathbf{J}_x = Nq\dot{x} = Nq\left(\frac{qE_x}{\Gamma M}\right) \equiv \sigma_{PR} E_x, \quad (92)$$

es decir,

$$\sigma_{PR} = \frac{Nq^2}{\Gamma M}, \quad \omega \ll \Gamma. \quad (93)$$

Para el caso general de frecuencia arbitraria, la velocidad \dot{x} tendrá no sólo componente en fase con E_x , como para el caso de campo constante, sino también una componente en cuadratura con E_x . Entonces debemos usar cantidades complejas, que tienen una dependencia temporal $\exp(-i\omega t)$. La solución estacionaria de la ecuación (89) se obtiene fácilmente. [Poner $\omega_0 = 0$ en la ecuación (44).] La conductividad compleja $\sigma(\omega)$ está dada por

$$\mathbf{J}_x = Nq\dot{x} = Nq(-i\omega x) = -i\omega P_x = -i\omega\chi E_x \equiv \sigma(\omega)E_x. \quad (94)$$

Así,

$$\sigma(\omega) = -i\omega\chi = -i\omega(\chi_{el} + i\chi_{ab}) = \omega\chi_{ab} - i\omega\chi_{el}. \quad (95)$$

Vemos que si $\sigma(\omega)$ es real, \dot{x} está en fase con E_x , y σ es proporcional a la susceptibilidad eléctrica absorbente.

En lugar de separar $\chi(\omega)$ o $\sigma(\omega)$ en sus partes reales e imaginarias, se acostumbra a veces escribirlas con el denominador complejo como en la ecuación (45). Así tenemos [poniendo $\omega_0 = 0$ en la ecuación (45)]

$$\chi(\omega) = \frac{Nq^2}{M} \cdot \frac{1}{-\omega^2 - i\omega\Gamma} \quad (96)$$

$$\sigma(\omega) = -i\omega\chi(\omega) = \frac{Nq^2}{M} \cdot \frac{i\omega}{\omega^2 + i\omega\Gamma}. \quad (97)$$

En el límite $\omega \ll \Gamma$ podemos despreciar ω^2 comparado con $\omega\Gamma$, de manera que en el límite *puramente resistivo* o límite de campo constante tenemos

$$\chi(\omega) = i \frac{Nq^2}{M} \frac{1}{\omega\Gamma}, \quad \omega \ll \Gamma \quad (98)$$

y

$$\sigma(\omega) = \frac{Nq^2}{M\Gamma} = \sigma(0) = \sigma_{PR}, \quad \omega \ll \Gamma. \quad (99)$$

Vemos que para el rango de frecuencias puramente resistivas $0 \leq \omega \ll \Gamma$, la conductividad $\sigma(\omega)$ es real e igual a su valor para campo constante (frecuencia cero). La velocidad \dot{x} está entonces en fase con E_x .

La susceptibilidad eléctrica compleja $\chi(\omega)$ es imaginaria pura para $\omega \ll \Gamma$, de acuerdo con la ecuación (98). La raíz cuadrada del índice de refracción n^2 , está entonces dado para $\omega \ll \Gamma$ por

$$n^2 = 1 + 4\pi\chi = 1 + i \frac{4\pi Nq^2}{M} \frac{1}{\omega\Gamma} = 1 + i \frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}, \quad (100)$$

donde

$$\omega_p^2 \equiv \frac{4\pi Nq^2}{M}. \quad (101)$$

Hay dos casos límites de un medio puramente resistivo con características físicas cualitativamente diferentes.

Caso 1: «Medio resistivo diluido»

Esto significa que ω , Γ y ω_p satisfacen las relaciones

$$\omega_p \ll \Gamma, \quad \frac{\omega_p^2}{\Gamma} \ll \omega \ll \Gamma. \quad (102)$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación (100) tenemos

$$n = \left[1 + i \frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma} \right]^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} i \frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma}, \quad (103)$$

despreciando términos de orden superior. Entonces

$$k = n \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c} + i \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{c\Gamma} = \frac{\omega}{c} + \frac{2\pi i}{c} \sigma_{PR}, \quad (104)$$

donde usamos las ecuaciones (101) y (93) en la última igualdad. La parte real de k es igual a ω/c , como en el vacío. La parte imaginaria es mucho más pequeña que la parte real. La parte imaginaria de k da una atenuación exponencial de la onda plana. La longitud de atenuación media es grande comparada con una longitud de onda. La *intensidad* de la onda plana es proporcional al valor absoluto del cuadrado de la amplitud compleja. Por consiguiente, se atenúa con la distancia con un factor $\exp(-2k_I z)$, donde k_I es la parte imaginaria de k . La distancia $d \equiv (2k_I)^{-1}$ es la distancia a la cual la *intensidad* se atenúa en un factor e^{-1} y está dada por la ecuación (104):

$$\frac{1}{d} \equiv 2k_I = \frac{4\pi}{c} \sigma_{PR}, \quad \text{es decir} \quad \frac{\rho_{PR}}{d} = \frac{4\pi}{c}. \quad (105)$$

La “resistencia por cuadrado”, de una plancha cuadrada de medio resistivo diluido que tiene un espesor d y una longitud de lado L , es

la resistividad de campo constante dividida por d . Que es igual a $4\pi/c = 377$ ohms por cuadrado, de acuerdo con la ecuación (105). Recordar que 377 ohms por cuadrado es la impedancia característica para “la perfecta terminación” de una onda electromagnética. (Véase capítulo 5.) Por supuesto que la onda no es absorbida en la longitud d de decaimiento de la intensidad. Sin embargo, prácticamente no es reflejada, y es eventualmente absorbida.

Para ser más exactos, la parte real de n es esencialmente la unidad y la parte imaginaria es pequeña comparada con la unidad, la intensidad relativa reflejada para la onda incidiendo normalmente desde el vacío está dada por:

$$|R|^2 = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} \approx \frac{0 + n_I^2}{2^2 + n_I^2} \approx \frac{n_I^2}{4} \ll 1. \quad (106)$$

Usando las ecuaciones (103) y la (105) esto da

$$|R|^2 \approx \frac{1}{16} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega \Gamma} \right)^2 = \left(\frac{\chi}{4d} \right)^2 \ll 1, \quad (107)$$

donde $\chi \equiv c/\omega$ es la longitud de onda reducida en el vacío.

Caso 2: «Medio resistivo denso»

Esto significa que las relaciones

$$\omega \ll \Gamma, \quad \omega \ll \omega_p, \quad \omega \Gamma \ll \omega_p^2. \quad (108)$$

Entonces n^2 es esencialmente un número imaginario, de acuerdo con la ecuación (100). Cuando tomamos la raíz cuadrada de n^2 , hacemos uso del hecho que la raíz cuadrada de i es $\exp(i\pi/2)^{1/2} = \exp(i\pi/4)$, la cual es $2^{-1/2}(1 + i)$. Lo que da

$$n = \left[i \frac{\omega_p^2}{\omega \Gamma} \right]^{1/2} = \left(\frac{\omega_p^2}{2\omega \Gamma} \right)^{1/2} (1 + i) = |n| \frac{(1 + i)}{\sqrt{2}} \quad (109)$$

Entonces

$$\begin{aligned} k = n \frac{\omega}{c} &= \sqrt{\frac{\omega}{c}} \left(\frac{\omega_p^2}{2c\Gamma} \right)^{1/2} (1 + i) \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{c}} \left(\frac{2\pi\sigma_{PR}}{c} \right)^{1/2} (1 + i). \end{aligned} \quad (110)$$

Entonces la parte real e imaginaria de k son iguales. Cualquiera es larga comparada con el valor en el vacío de k (que es ω/c). La distancia media de penetración para la amplitud, k_I^{-1} , es pequeña comparada con la longitud de onda en el vacío. Entonces volvemos a la onda plana que incide

desde el vacío a un medio resistivo que se refleja sin prácticamente ninguna absorción. Esto se debe a que la penetración es pequeña, de manera que relativamente pocas cargas sufren el campo eléctrico. Las que lo experimentan están a la velocidad final en fase con E_x , y por consiguiente absorben energía. Sin embargo, son tan pocas, que la onda escapa sin pérdida de su intensidad.

Con mayor exactitud, la intensidad relativa reflejada está dada por

$$\begin{aligned} |R|^2 &= \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} \approx \frac{|n|^2 - 2n_R}{|n|^2 + 2n_R} = \frac{|n|^2 - \sqrt{2}|n|}{|n|^2 + \sqrt{2}|n|} \\ &\approx 1 - \frac{2\sqrt{2}}{|n|} = 1 - 2\sqrt{2}\left(\frac{\omega\Gamma}{\omega_p^2}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (111)$$

Así, $|R|^2 \approx 1$, ya que $\omega\Gamma \ll \omega_p^2$.

La longitud a la cual se atenúa e veces la intensidad, $d \equiv (2k_I)^{-1}$ está dada por:

$$d = \lambda \sqrt{\frac{\omega\Gamma}{2\omega_p^2}} \ll \lambda.$$

Aunque este d es pequeño comparado con la longitud de onda, es mayor en un factor $(\lambda/2d)$ que el espesor que da 377 ohms por cuadrado para campo constante. Por consiguiente, la impedancia es pequeña comparada con la que da terminación perfecta. Esto se debe a que el signo de E_x se invierte en la reflexión.

Vemos que hay una gran diferencia cualitativa entre un medio resistivo diluido y uno denso. Un medio diluido es esencialmente "negro". Es casi completamente absorbente. En contraste, un medio resistivo denso actúa como una impedancia muy pequeña. Da reflexión casi completa.

Finalmente, debemos recordar que nuestras frases descriptivas son meramente nombres para las condiciones expresadas por las desigualdades (102) y (108). Estos nombres omiten el hecho importante que un conductor dado tiene diferentes propiedades para diferentes frecuencias. Por ejemplo, de acuerdo con la ecuación (108), cualquier conductor se comporta como un medio resistivo denso si ω es suficientemente pequeña. Por otra parte, un conductor no puede ser un medio resistivo "diluido" a cualquier frecuencia a menos que $\Gamma \gg \omega_p$. Si esa condición se satisface, en un medio resistivo diluido sólo en el rango de frecuencias dado por la ecuación (102).

Rango de frecuencia puramente elástico. La ecuación de movimiento para una única carga promedio está dada en la ecuación (89). Para la dependencia compleja del tiempo $\exp(-i\omega t)$ esta ecuación puede escribirse así

$$-i\omega\dot{x} + \Gamma\dot{x} = \frac{q}{M} E_x. \quad (112)$$

El rango de frecuencias puramente resistivas fue aquel para el cual podíamos despreciar ω comparado con Γ . El rango puramente elástico es aquel para el cual ω es muy grande comparado con Γ . Así, para el rango de frecuencia *puramente elástico* tenemos

$$\dot{x} = \frac{iq}{\omega M} E_x, \quad \omega \gg \Gamma. \quad (113)$$

Entonces la velocidad está en cuadratura con la fuerza y no se realiza trabajo neto en un ciclo. No hay absorción. La conductividad compleja es un término imaginario puro, dado por [usando la ecuación (113)]

$$J_x = Nq\dot{x} = i \frac{Nq^2}{\omega M} E_x \equiv \sigma(\omega) E_x,$$

es decir,

$$\sigma(\omega) = i \frac{Nq^2}{\omega M}, \quad \omega \gg \Gamma. \quad (114)$$

[Véase también la ecuación (97), con $\omega\Gamma$ despreciable comparado con ω^2 .]

El cuadrado del índice de refracción complejo, n^2 , está dado por

$$n^2 = 1 + 4\pi\chi = 1 - \frac{4\pi Nq^2}{M\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega \gg \Gamma. \quad (115)$$

Hay dos rangos de frecuencias puramente elásticas con diferencias cualitativas.

Caso 1: Rango de frecuencias dispersivas

Esto significa que tenemos

$$\Gamma \ll \omega_p \leq \omega. \quad (116)$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación (115), tenemos:

$$0 \leq n^2 < 1, \quad (117)$$

es decir,

$$0 \leq n \leq 1. \quad (118)$$

Así, para un conductor en su rango de frecuencia dispersiva el índice n es real y está entre 0 y 1. El medio es transparente. No hay absorción. La velocidad de fase es mayor que c . La intensidad relativa reflejada es $(n-1)^2/(n+1)^2$.

Caso 2: Rango de frecuencias reactivas

Esto significa

$$\Gamma \ll \omega \leq \omega_p. \quad (119)$$

Entonces, la ecuación (115) da

$$-\frac{\omega_p^2}{\Gamma^2} \ll n^2 \leq 0. \quad (120)$$

Así, n^2 es negativa y n es un término imaginario puro:

$$n = i|n| = i \left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right]^{1/2},$$

y

$$k = n \frac{\omega}{c} = i \frac{\omega}{c} |n| = i|k|.$$

Una onda plana en un medio reactivo tiene la forma

$$E_x = [A^+ e^{-|k|z} + A^- e^{+|k|z}] e^{-i\omega t}.$$

Si el medio se extiende a $z = +\infty$, entonces A^- es cero. Así una onda plana incidiendo desde el vacío a tal medio deberá ser totalmente reflejada sin absorción. Mas exactamente, la intensidad relativa está dada por

$$|R|^2 = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} \approx \frac{1 + n_I^2}{1 + n_I^2} = 1.$$

En el grueso del texto hemos evitado la discusión del índice complejo de refracción y el número de onda complejo k para evitar la discusión de medios absorbentes. Para el rango de frecuencias reactivas usamos el símbolo κ en lugar del que hemos llamado la magnitud compleja k , $|k|$, para el rango reactivo. Para el rango dispersivo usamos k , la que corresponde a nuestro k complejo presente, que es real.

Resumen de las propiedades de los conductores. Ahora podemos resumir las propiedades de cualquier conductor (en la extensión que nuestro modelo simple lo permite):

(i) Para frecuencias suficientemente bajas, cualquier conductor es un medio resistivo denso. Dando entonces reflexión completa con muy poca absorción.

(ii) Para frecuencias suficientemente bajas cualquier conductor es un medio dispersivo y, por consiguiente, transparente.

Los conductores pueden dividirse, someramente, en tres clases, de acuerdo con la magnitud relativa de la rapidez con que alcanzan la velocidad máxima, Γ , y la frecuencia de oscilación del plasma, ω_p .

(i) Un conductor con $\Gamma \gg \omega_p$ tiene un rango de frecuencia para el cual es un medio resistivo diluido. Tal conductor no tiene comportamiento reactivo a ninguna frecuencia. Por tal motivo nunca da reflexión total.

(ii) Un conductor con $\Gamma \ll \omega_p$ tiene un rango para el cual se comporta reactivamente. Pudiendo en tal rango dar reflexión total sin absorción. No tiene rango de frecuencia para un medio resistivo diluido. Así nunca puede absorber completamente una onda plana.

(iii) Un conductor con $\Gamma \approx \omega_p$ no tiene ningún rango de frecuencias para el cual su comportamiento es como medio resistivo diluido ni ninguno para el que se comporte como puramente reactivo. Por supuesto, tendrá la propiedad de que para ω suficientemente bajo es un medio resistivo denso, y para ω suficientemente alto es transparente.

Aplicación: Plata sólida

Supongamos que la plata sólida puede aproximarse por nuestro modelo simple. Las cargas móviles son los electrones de conducción, que son suministrados por los "electrones de valencia" de los átomos de la plata. La valencia es uno. El peso atómico es 107,9 g por mol. La densidad de masa es 10,5 g/cm³. El número de Avogadro es 6×10^{23} por mol. Entonces N es $(6 \times 10^{23})(10,5)/(107,9) = 5,8 \times 10^{22}$. Suponiendo que M y q son la masa y la carga del electrón libre, hallamos

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{M}} = 1,36 \times 10^{16} \text{ rad/seg.}$$

La resistividad ρ_{PR} es $1,59 \times 10^{-6}$ ohm cm. Pero 30 ohms es c^{-1} estatohm, con $c = 3 \times 10^{10}$ cm/seg. Así que la resistividad es $1,8 \times 10^{-18}$ estatohm cm. Entonces, la rapidez de alcance de la velocidad final, Γ , está dado por

$$\Gamma = \frac{Ne^2}{M\sigma_{PR}} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \rho_{PR} = 2,7 \times 10^{13} \text{ seg}^{-1}.$$

Vemos que, para la plata sólida, $\Gamma \ll \omega_p$. Para $\omega \ll 2,7 \times 10^{13}$ rad/seg la plata es un medio resistivo denso, de acuerdo al modelo. (Éste es el caso para microondas, por ejemplo.) Para $\omega \gg 2,7 \times 10^{13}$ rad/seg es puramente elástica. Para el rango puramente elástico $\omega < 1,36 \times 10^{16}$ rad/seg es puramente reactiva. (Este rango incluye la luz visible.) Para el rango puramente elástico $\omega > 1,36 \times 10^{16}$ rad/seg es transparente. (Éste es el rango ultravioleta lejano y la región de rayos X.) Por supuesto la plata real no se comporta exactamente de acuerdo con este modelo. (Debido a que hemos despreciado la contribución de los electrones "ligados".)

Aplicación: Grafito

Supongamos que la valencia es 4, la densidad 2, el peso atómico 12. Entonces el modelo simple da

$$\omega_p = 0,36 \times 10^{17} \text{ rad/seg.}$$

La resistividad ρ_{PR} es $1,57 \times 10^{-15}$ estatohm cm. Esto da

$$\Gamma = 1,6 \times 10^{17} \text{ seg}^{-1}.$$

Para $\omega \ll 1,6 \times 10^{17}$ rad/seg, el grafito es puramente resistivo, de acuerdo al modelo. Para $\omega \ll 8 \times 10^{15}$ rad/seg es un medio resistivo denso. Para $8 \times 10^{15} \ll \omega \ll 1,6 \times 10^{17}$ es un medio resistivo diluido. Siendo que el rango cubre sólo un factor de 20 en la frecuencia, ambas desigualdades no pueden ser satisfechas, y por consiguiente no es completamente negro a ninguna frecuencia. El grafito no tiene rango de frecuencia reactivo. Para $\omega \gg 1,6 \times 10^{17}$ es transparente, de acuerdo con el modelo.

Predigamos la reflectividad $|R|^2$ para luz visible del grafito idealizado. Para luz verde de longitud de onda en el vacío 5500 Å tenemos $\omega = 2(3,14)(3 \times 10^{10})/(5,5 \times 10^{-8}) = 3,42 \times 10^{15}$ rad/seg. Esto no está en el rango de frecuencias correspondiente al "medio resistivo denso", dado por $\omega \ll 8 \times 10^{15}$. Así que no podemos esperar un 100 % de reflectividad. Tampoco podemos esperar una reflectividad muy pequeña. Tenemos

$$\begin{aligned} n^2 &= \epsilon = \epsilon_R + i\epsilon_I, \\ \epsilon_R &= 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \Gamma^2} \\ &= 1 - \frac{(36)^2}{(3,42)^2 + (160)^2} = 0,951 \\ \epsilon_I &= \frac{\omega_p^2\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} = \frac{\omega_p^2(\Gamma/\omega)}{\omega^2 + \Gamma^2} \\ &= \frac{160}{3,42} \frac{(36)^2}{(3,42)^2 + (160)^2} = 2,36 \\ n^2 &= 0,951 + 2,36i = 2,55 \exp i\varphi, \end{aligned}$$

donde

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{2,36}{0,951} \approx 68 \text{ gr.}$$

Entonces

$$n = \sqrt{2,55} \exp(i\frac{1}{2}\varphi) = 1,60 (\cos 34^\circ + i \sin 34^\circ) = 1,33 + i0,90.$$

Entonces

$$|R|^2 = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} = \frac{(.33)^2 + (.90)^2}{(2.33)^2 + (.90)^2} = 0,15.$$

Así, de acuerdo con el modelo, una superficie pulida de grafito refleja aproximadamente 15 % de la intensidad de la luz verde incidiendo normalmente.

Apéndice

A.1	Serie de Taylor	620
A.2	Series usadas comúnmente	620
	sen x y cos x	620
	Exponencial e^{ax}	620
	senh x y cosh x	621
	Relaciones que incluyen la exponencial	621
	tg x	622
	Desarrollo en serie del binomio $(1 + x)^n$	622
A.3	Superposición de funciones armónicas	622
A.4	Identidades vectoriales	624

A.1 Serie de Taylor

Supongamos que $f(x)$ puede expresarse como una serie infinita de la forma

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \dots, \quad (1)$$

donde las c son constantes. Entonces se dice que $f(x)$ está expresada como “un desarrollo alrededor del punto x_0 ”. Para hallar c_0 , ponemos $x = x_0$; entonces todos los términos del segundo miembro se anulan, excepto el primero. Así $c_0 = f(x_0)$. Para hallar c_1 , debemos derivar la ecuación (1) una vez respecto a x y entonces ponemos $x = x_0$. Todos los términos se anulan excepto el correspondiente a c_1 ; así hallamos $c_1 = (df/dx)_0$, donde el subíndice cero significa que df/dx está calculada en $x = x_0$. Similarmente,

$$(d^m f/dx^m)_0 = m! c_m, \quad (2)$$

y entonces la ecuación (1) se transforma en

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_0 + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_0 + \dots \quad (3)$$

A.2 Series usadas comúnmente

sen x y cos x . Usamos $d(\text{sen } x)/dx = \cos x$, $d(\cos x)/dx = -\text{sen } x$, $\cos(0) = 1$, $\text{sen}(0) = 0$ y $x_0 = 0$ en la ecuación (3) para obtener

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad (4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (5)$$

Exponencial e^{ax} . Usamos $d(e^{ax})/dx = ae^{ax}$, $e^0 = 1$ y $x_0 = 0$ en la ecuación (3) para obtener

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2!} + \frac{a^3 x^3}{3!} + \frac{a^4 x^4}{4!} + \dots \quad (6)$$

senh x y cosh x . Estas funciones pueden definirse por $d(\sinh x)/dx = \cosh x$, $d(\cosh x)/dx = \sinh x$, $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$ y entonces la ecuación (3) con $x_0 = 0$ da

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad (7)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots. \quad (8)$$

Relaciones que incluyen la exponencial. Si ponemos $a = +1$ en la ecuación (6) y comparamos con las ecuaciones (7) y (8), y haciendo lo mismo con $a = -1$, hallamos

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad (9)$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x, \quad (10)$$

De donde se obtiene

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (11)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (12)$$

Si ponemos $a = +i \equiv +\sqrt{-1}$ en la ecuación (6), obtenemos

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots. \quad (13)$$

Análogamente, si ponemos $a = -i$ en la ecuación (6), obtenemos

$$e^{-ix} = 1 - ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots. \quad (14)$$

Sumando o restando las ecuaciones (13) y (14) y comparando los resultados con las ecuaciones (4) y (5), obtenemos

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x, \quad (15)$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x, \quad (16)$$

de donde

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (17)$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \quad (18)$$

tg x. Usamos $\operatorname{tg} x \equiv \operatorname{sen} x / \cos x$, $d(\operatorname{sen} x)/dx = \cos x$ y $d(\cos x)/dx = -\operatorname{sen} x$ para obtener $d(\operatorname{tg} x)/dx = \cos x^{-2}$, $d^2(\operatorname{tg} x)/dx^2 = 2 \operatorname{sen} x (\cos x)^{-3}$, $d^3(\operatorname{tg} x)/dx^3 = 2 (\cos x)^{-2} - 6 \operatorname{sen}^2 x (\cos x)^{-4}$, etc. Entonces, para $x = 0$ la ecuación (3) da

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (19)$$

Desarrollo en serie del binomio $(1+x)^n$. Usamos $d(1+x)^n/dx = n(1+x)^{n-1}$, $d^2(1+x)^n/dx^2 = n(n-1)(1+x)^{n-2}$, $d^3(1+x)^n/dx^3 = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$, etc., y entonces la ecuación (3) con $x_0 = 0$ da

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots \quad (20)$$

Ésta se verifica para cualquier n positivo o negativo, y para cualquier x positivo o negativo si x satisface la relación $x^2 < 1$.

A.3 *Superposición de funciones armónicas*

Las siguientes superposiciones de N funciones armónicas se encuentran en los fenómenos ondulatorios:

$$u(t) = \cos \omega_1 t + \cos (\omega_1 + \alpha)t + \cos (\omega_1 + 2\alpha)t + \dots + \cos [\omega_1 + (N-1)\alpha]t; \quad (21)$$

$$u(z) = \cos kz + \cos (kz + \beta) + \cos (kz + 2\beta) + \dots + \cos [kz + (N-1)\beta]. \quad (22)$$

Ambas son de la forma

$$u = \cos \theta_1 + \cos (\theta_1 + \gamma) + \cos (\theta_1 + 2\gamma) + \dots + \cos [\theta_1 + (N-1)\gamma]. \quad (23)$$

Deseamos hallar una expresión conveniente para la ecuación (23). Notemos que u puede ser expresada como parte real de v , donde:

$$v = e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\gamma)} + e^{i(\theta_1+2\gamma)} + \dots + e^{i[\theta_1+(N-1)\gamma]} = e^{i\theta_1} S, \quad (24)$$

donde S es una serie geométrica de N términos, dados por:

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{N-1}, \quad \text{con } a = e^{i\gamma}. \quad (25)$$

Multiplicando S por a , y luego restando S de aS , término a término, tenemos

$$aS - S = a^N - 1, \quad (26)$$

es decir,

$$S = \frac{a^N - 1}{a - 1} = \frac{e^{iN\gamma} - 1}{e^{i\gamma} - 1} = \frac{e^{(1/2)iN\gamma} (e^{(1/2)iN\gamma} - e^{-(1/2)iN\gamma})}{e^{(1/2)i\gamma} (e^{(1/2)i\gamma} - e^{-(1/2)i\gamma})} \\ = e^{(1/2)i(N-1)\gamma} \frac{\text{sen } \frac{1}{2}N\gamma}{\text{sen } \frac{1}{2}\gamma}, \quad (27)$$

donde usamos la ecuación del Apéndice (16) en el último paso. Insertando la ecuación (27) en la ecuación (24)

$$v = e^{i[\theta_1 + (1/2)(N-1)\gamma]} \frac{\text{sen } \frac{1}{2}N\gamma}{\text{sen } \frac{1}{2}\gamma}. \quad (28)$$

Tomando la parte real, obtenemos el resultado deseado,

$$u = \cos [\theta_1 + \frac{1}{2}(N-1)\gamma] \frac{\text{sen } \frac{1}{2}N\gamma}{\text{sen } \frac{1}{2}\gamma}. \quad (29)$$

El resultado expresado por la ecuación (29) puede ponerse en otra forma más útil. En la ecuación (23), θ_1 es el argumento del primer término, el del segundo término al que hemos llamado θ_2 , está dado por:

$$\theta_2 \equiv \theta_1 + (N-1)\gamma. \quad (30)$$

El promedio del primer y último argumento θ_1 y θ_2 es entonces:

$$\theta_{pr} \equiv \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{1}{2}\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1 + \frac{1}{2}(N-1)\gamma. \quad (31)$$

Así, el primer factor en la ecuación (29) es $\cos \theta_{pr}$. Usando esto y el hecho que γ es $(\theta_2 - \theta_1)/(N-1)$ [de acuerdo con la ecuación (30)], escribimos la ecuación (29) en la forma

$$u = \cos \theta_{pr} \frac{\text{sen } [\frac{1}{2}N(\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]}{\text{sen } [\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]}. \quad (32)$$

La ecuación (29) da el incremento γ entre los argumentos de términos sucesivos en la suma, ecuación (23). La ecuación (32) es equivalente a la ecuación (29), pero da la primera y la última contribución, θ_1 y θ_2 , y su promedio. Note que $\cos \theta_{pr}$ es una oscilación armónica de la misma forma que cada uno de los términos de la superposición, ecuación (23); pero en lugar de amplitud unidad tiene amplitud $A(\theta_1, \theta_2, N)$ dada por la expresión

$$A(\theta_1, \theta_2, N) = \frac{\text{sen } [\frac{1}{2}N(\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]}{\text{sen } [\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]}. \quad (33)$$

La expresión más compacta de nuestro resultado es entonces

$$u = A(\theta_1, \theta_2, N) \cos \theta_{pr}. \quad (34)$$

El caso $N = 2$ corresponde para oscilaciones temporales [ec. (21)], al fenómeno de “pulsaciones” y para oscilaciones espaciales [(ec. 22)] a la configuración de interferencia de dos ranuras. Para oscilaciones temporales, grandes N dan “modulaciones” que producen un comportamiento pulsátil en $u(t)$ en el límite cuando $N \rightarrow \infty$. Para oscilaciones en el espacio, grandes N dan la configuración de interferencia para ranuras múltiples, y el límite $N \rightarrow \infty$ da la configuración de difracción de una ranura con una banda de muchas longitudes de onda.

A.4 *Identidades vectoriales*

Usaremos A , B y C para indicar funciones escalares de x , y y z , o sea $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ y $C(x, y, z)$. Análogamente, \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} para indicar funciones vectoriales de x , y y z . Así, \mathbf{A} significa $\hat{x}A_x(x, y, z) + \hat{y}A_y(x, y, z) + \hat{z}A_z(x, y, z)$, donde \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} son vectores. Deseamos aprender a trabajar con el objeto ∇ que es un operador “derivada” vectorial. La treta es escribir las ecuaciones que consideran su aspecto vectorial y las que tiene en cuenta su aspecto de “operador derivada”. Por ejemplo en:

$$\nabla(AB) = (\nabla A)B + A(\nabla B) = B\nabla A + A\nabla B, \quad (35)$$

la primera igualdad proviene de la regla de derivación del producto: primero B se mantiene constante, luego A . La segunda igualdad sale de sacar los paréntesis, pues por convención, ∇ sólo deriva a los que están a su derecha. Podemos temporalmente simbolizar esto escribiendo ∇_a cuando opera solo sobre A (o \mathbf{A}) y ∇_b cuando opera sobre B (o \mathbf{B}). En esta forma tenemos en cuenta la regla de derivación del producto agregando subíndices. Entonces movemos los operadores y vectores de manera que las cantidades que no deban ser derivadas estén a salvo a la izquierda de ∇ , asegurando que satisfacemos las reglas vectoriales como lo hacemos comúnmente. Finalmente, eliminamos los subíndices a y b . Así:

$$\nabla(AB) = \nabla_a(AB) + \nabla_b(AB) = B\nabla_a A + A\nabla_b B = B\nabla A + A\nabla B. \quad (36)$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \nabla \times (AB) &= \nabla_a \times (AB) + \nabla_b \times (AB) = B\nabla_a \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla_b B \\ &= B\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla B. \end{aligned} \quad (37)$$

Después de alguna práctica no necesitará escribir los pasos intermedios.

Ahora deseamos hallar una identidad para $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C})$. Suponemos que conoce la identidad

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{regla } \mathbf{BAC} \text{ menos } \mathbf{CAB}) \quad (38a)$$

$$= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (38b)$$

Podemos usar esta regla, sustituyendo ∇ por \mathbf{A} y ∇ por \mathbf{B} . Debemos tener cuidado de mantener ambos ∇ a la izquierda de \mathbf{C} , puesto que suponemos que actúan sobre \mathbf{C} . Así que no podemos usar la ecuación (38a); debemos usar la (38b). Entonces tenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{C}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{C}. \quad (39)$$

En función de las componentes x , y y z la ecuación (39) es

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C})]_x = \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{C})}{\partial x} - \nabla^2 C_x, \quad (40)$$

con expresiones similares para y y z , donde

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (41)$$

Lecturas suplementarias

Referencias generales

[Lo indicado entre paréntesis al final de cada referencia corresponde a capítulos o problemas del volumen III de la serie del curso de física del B.P.C. (Berkeley Physics Course).]

Instituto Americano de Física, reimpresiones escogidas, *Polarized Light* (American Institute of Physics, Nueva York, 1963). Reimpresión de 18 artículos escogidos por su interés e importancia.

Instituto Americano de Física, reimpresiones escogidas, *Quantum and Statistical Aspects of Light* (American Institute of Physics, Nueva York, 1963). Incluye el experimento de Brown y Twiss mencionado en el texto.

Arthur H. Benade, *Horns, Strings and Harmony* (Anchor Books, Science Study S 11, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N. Y., 1960). Véase libro de física delicioso para músicos.

George H. Darwin, *The Tides, and Kindred Phenomena in the Solar System* (W. H. Freeman & Company, San Francisco, 1962). Este clásico popular, escrito en 1898, tiene descripciones fascinantes: de las oscilaciones del agua en el lago de Ginebra producidas por el viento, del oleaje de las mareas, de la historia del pasado y futuro de la tierra y la luna descifrada de las mareas, etc.

Donald G. Fink y David M. Lutyens, *The Physics of Television* (Anchor Books, Science Study Series S 8, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N. Y., 1960).

Winston Kock, *Sound Waves and Light Waves* (Anchor Books, Science Study Series S 40, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N. Y., 1965).

E. H. Land, "Some Aspects of the Development of Sheet Polarizers", *J. Opt. Soc. Am.* 41, 957 (1951).

M. Mimicert, *Light and Colour in the Open Air* (Dover Publications, Inc., Nueva York, 1954). Un clásico lleno de experimentos "al aire libre". (Véase también el Cap. 8 y el Tema suplementario 8.)

P. S. S. C. (Physical Science Study Committee, Física 2.ª edición (EDITORIAL REVERTÉ, S. A., Barcelona, Buenos Aires, México).

John R. Pierce, *Electrons and Waves* (Anchor Books, Science Study Series S 38, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N. Y., 1964). Una clara introducción a la electrónica y a la comunicación, hecha por un físico que ha contribuido notablemente en ambos campos.

William A. Shurcliff y Stanley S. Ballard, *Luz polarizada* (Volumen n.º 7 de la colección de momentum book, EDITORIAL REVERTÉ, S. A., Barcelona, Buenos Aires, México). Ejemplos dramáticos y fascinantes del uso y producción de la luz polarizada en numerosas ramas de la física.

Ivan Simon, *Radiación infrarroja* (Volumen n.º 12 de momentum book, EDITORIAL REVERTÉ, S. A. Barcelona, Buenos Aires, México).

Alex G. Smith y Thomas D. Carr, *Radio exploración del sistema planetario* (Volumen número 2 de momentum book, EDITORIAL REVERTÉ, S. A., Barcelona, Buenos Aires, México).

Elizabeth A. Wood, *Cristales y luz, introducción a la cristalografía óptica* (Volumen número 5 de momentum book, EDITORIAL REVERTÉ, S. A., Barcelona, Buenos Aires, México). Encuadernado en cartóné, éste es un pequeño y estupendo libro que describe el estado de los cristales, el uso de los microscopios de polarización, etc. Contiene en el interior del libro una pieza de polaroide para realizar experimentos en casa, pieza que sugirió al autor la invención de los experimentos caseros del volumen III del B.P.C.

Referencias específicas

- G. L. Berge y G. A. Seielstad, "The Magnetic Field of the Galaxy", *Scientific American*, pág. 46 (junio 1965). (Véase Cap. 8.)
- G. R. Bird y M. Parrish Jr., *J. Opt. Soc. Am* **50**, 886 (1960). "Evaporation of gold onto a plastic diffraction grating". (Véase Cap. 8.)
- N. Broten y colaboradores, "Long Base-line Interferometry Using Atomic Clocks and Tape Recorders", *Science* **156**, 1592 (junio 23, 1967). (Véase Prob. 9.57.)
- R. Hanbury Brown y R. O. Twiss, "The Question of Correlation between Photons in Coherent Light Rays", *Nature* **178**, 1447 (1956). (Véase Cap. 9.)
- B. A. Burgel, "Dispersion, Reflection, and Eigenfrequencies on the Wave Machine", *Am. J. Phys.* **35**, 913 (1967). (Véase Prob. 4.14.)
- W. Calvert, R. Knecht y T. Van Zandt, "Ionosphere Explorer I Satellite: First Observations from the Fixed-Frequency Topside Sounder", *Science* **146**, 391 (16 oct. 1964). (Véase Cap. 4.)
- D. D. Coon, *Am. J. Phys.* **34**, 240 (1966). (Véase Cap. 7.)
- A. de Maria, D. Stetser y W. Glenn Jr., "Ultrashort Light Pulses", *Science* **156**, 1557 (junio 23, 1967). (Véase Prob. 6.23.)
- A. J. de Witte, "Interference in Scattered Light", *Am. J. Phys.* **35**, 301 (abril 1967). (Véase Prob. 9.56.)
- Rene Dubos, *Pasteur and Modern Science* (Anchor Books, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N. Y., 1960). (Véase Cap. 8.)
- R. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, Cap. 33 (Addison Wesley, Reading, Mass., 1963). (Véase Cap. 8.)
- A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen y P. O. Johnson, "Photoelectric Mixing of Incoherent Light", *Phys. Rev.* **99**, 1691 (1955). (Véase Cap. 1 y el tema suplementario 7.)
- J. M. Fowler, J. T. Brooks y E. D. Lambe, "One-dimensional Wave Demonstration", *Am. J. Phys.* **35**, 1065 (1967). (Véase Cap. 4.)
- Martin Gardner, *The Ambidextrous Universe* (Basic Books, Inc., Publishers, New York, 1964). Descripción de la destreza en los organismos vivos y en las interacciones débiles de las partículas elementales. (Véase Cap. 8.)
- J. A. Giordmaine, "The Interaction of Light with Light", *Scientific American*, pág. 38 (abril 1964). (Véase Prob. 1.13.)
- T. Gold, "Radio Method for the Precise Measurement of the Rotation Period of the Earth", *Science* **157**, 302 (julio 21, 1967). (Véase Prob. 9.57.)
- Eckhard H. Hess, "Attitude and Pupil Size", *Scientific American*, pág. 46 (abril 1965). (Véase Prob. 9.33.)
- J. Lovelock, D. Hitchcock, P. Fellgett, J. y P. Connes, L. Kaplan y J. Ring, "Detecting Planetary Life from Earth", *Science Journal*, pág. 56 (abril 1967). (Véase Prob. 6.33.)
- G. J. F. MacDonald, "Implications for Geophysics of the Precise Measurement of the Earth's Rotation", *Science* **157**, 304 (julio 21, 1967). (Véase Prob. 9.57.)
- J. S. Mayo, "Pulse-Code Modulation", *Scientific American*, pág. 102 (marzo 1968). (Sec. 6.2.)
- R. Pflieger y L. Mandel, "Interference of Independent Photon Beams", *Phys. Rev.* **159**, 1084 (1967). (Véase Cap. 9.)
- F. Press y D. Harkrider, "Air-Sea Waves from the Explosion of Krakatoa", *Science* **154**, 1325 (9 dic., 1966). (Véase Prob. 6.12.)
- S. J. Smith y E. M. Purcell, "Visible Light from Localized Surface Charges Moving across a Grating", *Phys. Rev.* **92**, 1069 (1953). (Véase Prob. 7.28.)
- J. R. Tessman y J. T. Finnell Jr., *Am. J. Phys.* **35**, 523 (1967). (Véase Cap. 7.)
- Karl von Frisch, *Bees, Their Vision, Chemical Sense, and Language* (Cornell University Press, Ithaca, N. Y., 1950). (Véase Cap. 8.)

Índice alfabético

Los problemas específicos se indican mediante una *p* y el número del mismo, todo entre paréntesis, a continuación de la cita de la página.

A

Aberración cromática, 539
 esférica, 539
 Acoplamiento de E y B, 381, 422
 Actividad óptica, 453-454
 Acústica de las habitaciones, 285
 Agua ideal, propiedades del, 371-372
 prisma de, 235
 Alambrado paralelo, 435
 Alta frecuencia, corte de, 133
 Amoniaco, reloj de, 578
 Amortiguación de modos, 41 (*p* 1.6)
 Amortiguador, 244, 251, 284
 Amortiguamiento, constante, 111, 128
 crítico, 111, 162
 débil, 112
 Amplitud absorbente, 114, 127, 129, 196
 de la onda estacionaria, 59
 de la oscilación armónica, 3
 de las ondas de propagación, 168
 de un sonido dolorosamente elevado, 216
 escasamente audible, 216
 elástica, 113, 118, 127, 130, 196
 modulada, ondas de radio de, 293
 Análisis de Fourier y condiciones de contorno, 103 (*p* 2.29)
 Ancho de banda, 33
 de radio AM, 296
 de TV, 307
 de una pulsación cuadrada repetida, 104
 en número de onda, 315

Ancho de banda, intervalo de tiempo, producto del, 305
 y coherencia, 455-458, 482
 de frecuencia resonante, 117
 para un tubo de embalaje, 162
 de línea, 403
 natural, 403
 Anchura angular de ranura simple, 518
 de un haz, 502-506, 518
 de un máximo principal, 527
 Ángulo crítico, 367, 408
 de Brewster, 443, 472
 de incidencia, 193
 de refracción, 193
 pequeño, aproximación, 539
 sólido, 229, 401
 Anomalía, dispersión, 198
 Aproximación de pequeña reflexión, 266
 Atenuación, constante (K), 147
 de amplitud con la distancia, filtro, 133, 147
 Audiofrecuencias, 73, 295
 Aumento angular del microscopio, 548
 de Lemwenhoek, 551
 del telescopio, 548
 lateral, 543
 longitudinal, 563
 producido por un pequeño orificio, 547
 simple, 546
 Autofunciones, 77
 de la cuerda inhomogénea, 76
 de las ondas de Broglie, 77
 Azúcar, actividad óptica del, 453-454
 dextrógiro, 454

B

Baja frecuencia, corte de, 134
 Banda, 136
 lateral, 295, 347
 Barn (10^{-24} cm²), 407
 Botella de whisky como resonador, 236
 Boyle, ley, 180
 Brewster, ángulo de, 443, 472
 ventana de, 446
 Brillo superficial, 228
 tabla, 231
 Brown y Twiss, experiencia de, 497

C

Caja de óptica, 438, 462, 463, 475
 red de difracción en, 527
 Calidad de tono de una cuerda de piano, 74
 de un slinky, 98
 Calor específico, razón de, 181, 214
 Campo cercano, 484-487
 lejano, 484-487
 Candela-pie, 231
 Capacidad por unidad de longitud de líneas de transmisión de alambres paralelos, 186
 de placas paralelas, 187
 Capa no reflectora, 265-267, 280
 Caracol, 73
 Carga distribuida, 246
 puntual efectiva, 422

Celofán, 447
lámina de media onda de, 468
Cielo azul, brillantez del, 590
polarización del, 440
Circuito LC, 12, 88
dos circuitos acoplados, 29
el significado de k_a para, 89
relación de dispersión, 89
solución general, 89
Coeficiente de reflexión, 253
en un extremo fijo, 257
libre, 257
de transmisión, 256
Coherencia y cielo azul, 590
Comportamiento oscilatorio, 4
Condición de coherencia, 502
Condiciones de contorno a infinito, 145
163 (p 3.30)
Condiciones de contorno a infinito en una discontinuidad, 607
para una cuerda con cuentas, 82
de extremos fijos, 62
libres, 74, 101 (p 2.12), 107
sobre continuidad, 255, 276, 282
y longitudes de onda, 61
iniciales, 6
de péndulos acoplados, 37
de una cuerda continua, 64
superposición de, 15, 46 (p 1.14)
Configuración de difracción de dos ranuras, 522-524
 κ de ranuras simples, 513-518
de varias ranuras, 524
de interferencia de ranuras múltiples, 525-527
Conjunto completo de funciones, 75
modos de una cuerda homogénea, 75
inhomogénea, 75, 76
para el estado de polarización, 430-431
Constante de amortiguamiento, 111, 128
de atenuación (κ), 147
de fase, 4
de un modo, 77
insensibilidad del detector de ley cuadrática, 73
del oído, 72, 98, 278
relativa en ondas estacionarias, 279
en una onda estacionaria, 59
de resorte (κ) de resortes en serie, 86, 87
dieléctrica (ϵ), 196, 195, 596-602
compleja, 601
elástica (κ), 7
solar, 224, 237
Contadores de fotones, 226
Continuidad, 255
de la fuerza restauradora, 255
de la velocidad, 255
ecuación de, 371, 392
Convención del momento angular, 426

Convención del momento angular, óptica de tirabuzón, 426
para oscilaciones longitudinales, 26
polares esféricas, 399-400
Corneta exponencial, 269
Corte de alta frecuencia, 133
de baja frecuencia, 134, 146, 149
de guía de onda, 361-363
en la ionosfera, 94, 150, 200
Corte de baja frecuencia en medio dispersivo, 185
para el sistema de péndulos acoplados, 146-149
velocidad de grupo en el, 339
Cuadratura, 596
Cuerda con cuentas, modos transversales de una, 54, 78
ondas de propagación transversales en una, 176, 208
relación de dispersión, 81
continua, modos transversales de, 54
y análisis de Fourier, 64
homogénea y funciones sinusoidales, 75
inhomogénea, ecuación de onda para, 75
modos de, 75
y modos no sinusoidales, 75
Curvas de resonancia, 119

D

De Broglie, ondas de, 578-588
Decibel (db), 215
Degeneración de modos, 19, 29
Demodulación y no linealidad, 346
Denominador de resonancia, 120
Densidad (N) del número de electrones en la ionosfera terrestre, 94-97
en plata sólida, 163
Depolarización, 442
Desviación por una superficie esférica, 549
por un prisma, 554
delgado, 539
Detector de ley cuadrática, 33
efecto fotoeléctrico, 35
en el oído, 34, 73
Detectores de radiación, 226
Determinante de los coeficientes de las ecuaciones lineales homogéneas, 23
Dextrógira DNA, 454
polarización circular, 426
Diagrama de interferencia, 484
de dos fuentes coherentes, 486-493
independientes, 496-500
de un «haz», 505
de varias ranuras estrechas, 524-527
del vector rotante, 301
Diferencia de camino, 490

Difracción de Fraunhofer, 519
de Fresnel, 519
e interferencia, 508
haz limitado por la, 503-507, 518
por un obstáculo opaco, 529
red de, 528
utilizando la construcción de Huygens, 512
Dioptría, 545
Dispersión, 63, 77, 175, 190-207
anómala, 198
del prisma, 192
del sonido, 241
del vidrio, 194
normal, 198
por moléculas de leche, 412
por un prisma, 539
sección transversal para, 406-407
 ω (κ), relación de [véase Relación de dispersión ω (κ)]
Dispersivo, rango de frecuencias, para péndulos acoplados, 155
Doble refracción, 447-455
con celofán, 447
Dappler, ensanchamiento, 458

E

Ecuación de continuidad, 371
de ondas clásicas, 58, 102 (p 2,18), 333
tridimensionales, 358, 379
diferencial no homogénea de un oscilador armónico forzado, 112
Ecuaciones acopladas, 21, 22
diferenciales inhomogéneas, 16
principio de superposición para, 16
lineales homogéneas, 14
principio de superposición de, 14
inhomogéneas, 16
homogéneas, 14
diferenciales, 14
ordinarias, 22
sistema de, 381, 417
Eficiencia luminosa, 228, 238
absoluta, 228
Ejes de transmisión máxima, 438
ópticos, 447-453
dirección ordinaria y extraordinaria, 453
Ejes ópticos, rápidos y lentos, 448
Energía almacenada en el oscilador, 115
densidad, 384
disipada por fricción, 115
irradiada por una carga puntual, 398-
oscilador débilmente amortiguado, 112
radiada del transmisor, 210
transferida entre péndulos idénticos acoplados, 39, 41 (p 1.5)

Energía transportada por una onda de propagación en una línea de transmisión, 218-220
 ondas de sonido, 213-216
 ondas electromagnéticas planas, 222-224
 sobre una cuerda, 212
 Enfoque, condiciones necesarias para, 541
 Escala musical científica («exacto»), 98-100
 de equitemperancia, 98-100
 intervalos, 99
 Espectro de Fourier, 312
 Espectroscopia interferométrica múltiple (EFIM), 350-352
 Espejismos, 417
 Espejo elipsoidal, 536
 esférico, 538
 parabólico, 537
 plano, 533
 Estereorradales, 401
 Estroboscopia, 276, 302

F

Fabry-Perot, franjas de, 271, 275, 557
 Fase relativa e índice de refracción, 204-206
 Feldespato de Islandia, 475
 Fermat, principio de, 534-536
 Fibra óptica, 408
 Filtro de banda, 136, 146
 mecánica, 136
 mecánico, 133-138, 160
 banda de paso, 136
 pasabajas, 136, 146
 pasabajos, 137, 138
 mecánico, 136, 137
 Filtros, 131-141
 de banda eléctrica, 138
 eléctricos, 138-141
 Filtros eléctricos para una fuente de corriente continua, 140
 pasabajos, 139
 Flujo de energía, 430
 de fotones, 227, 455, 491
 Forma de línea, 121
 Formas de resonancia, 119, 124-125
 Fotomultiplicador, 227, 238
 Fotones, contadores de, 226
 flujo de, 227
 Fourier, análisis de, 64
 la función delta, 326
 la onda cuadrada $f(z)$, 71
 para el oído, 72
 pulsaciones, 317-330
 una fuente coherente, 520-522
 una función periódica $F(t)$, 70
 $F(z)$, 66

Fourier, una onda cuadrada, 323, 340
 casi periódica, 341
 diente de sierra, 106 (p 2.32)
 una pulsación cuadrada repetida periódicamente, 104 (p 2.30)
 un oscilador amortiguado, 326
 un paquete de ondas, 330-335
 y condiciones de contorno 103 (p 2.29)
 y cuerda continua, 64
 en el piano, 98
 coeficientes para una función periódica, 68-70
 espectro de frecuencias de, 312
 integral de, 312, 322
 Franjas de interferencia, 269-272
 de Fabry-Perot, 271
 Fraunhofer, difracción de, 519
 líneas de, 558
 Frecuencia (ν), 3
 ancho de banda, 105
 angular (ω), 3-4
 corte de valores, 133-135
 definición, 3-4
 significado físico para sistemas con un grado de libertad, 4
 para una cuerda de piano, 84
 para un modo, 25
 armónica, 62, 63
 banda de, 33
 de resonancia y de un modo, 127
 de TV «estroboscopia», 40 (p 1.3)
 de un modo, 18, 61, 76
 dominante, 118
 fundamental, 62, 84
 Frecuencia, modulación de, 346
 modulada (FM), 569
 multiplexión de, 348-350
 portadora, 295
 promedio, 32
 rango de sonidos audibles, 73
 resonante, ancho, 117
 para un tubo de embalaje, ancho, 162
 sucesión armónica de, 62, 64
 Fresnel, difracción de, 519
 Fuente extensa, 500
 lineal, 482
 puntual, 500
 real, 533
 virtual, 533
 Fuentes coherentes, 482
 independientes, 496
 Fuerza de amortiguamiento en la radiación del transmisor, 210, 245
 de retorno e inercia, 6, 207
 por unidad de desplazamiento por unidad de masa (ω^2), 4, 24, 54, 133, 142
 de terminación, 252
 restauradora por unidad de masa por unidad de desplazamiento (ω^2), 376

Función de fase [$\varphi(z, t)$], 171
 delta de frecuencia, 344
 de tiempo, 326
 periódica de distancia (Z), 65
 construcción de, 66
 Funciones de ondas complejas y ecuaciones de Maswell, 600-608
 y flujo de energía, 430
 y polarización, 428-433
 ortonormales, 430
 exponenciales, 146

G

Gases adiabáticos, ley, 181
 Gauss, ley de, 392
 Goma, tiras de, 241
 Grados de libertad, dos grados, 126
 un grado, 3
 Guía de ondas, 363-365
 rectangular, 360-365
 velocidad de fase y de grupo, 363-365

H

«Haz» de ondas progresivas, 503-508
 limitado por la difracción, 503-507, 518
 Hertz (Hz), 4
 Huygens, antenas de, 513
 construcción de, 508-513

I

Identidades vectoriales, 624-625
 Iluminación, 231
 Imagen real, 542
 virtual, 544
 Impedancia (Z), 208-231
 amortiguador de, 246,
 compensación de, 246, 265, 274
 del sonido, 213-214, 240
 de ondas longitudinales sobre una cuerda, 212-213
 de una línea de transmisión de placas paralelas, 220
 pasabajos, 218
 para ondas sonoras, 214
 transversales en una cuerda, 208-210
 y velocidad de fase, 207
 Incoherencia, 496-497
 Índice de refracción (n), 190-207
 compleja, 604-607
 de materiales comunes, 191
 dependencia de la frecuencia, 194-197

Índice (n) discusión cualitativa del, 204
 expresión aproximada para, 413-414
 Inductancia por unidad de longitud de una línea de transmisión de alambres paralelos, 186
 de placas paralelas, 188
 Infrarrojos, 224
 Intensidades normales de luz, 228-231
 de sonido, 215
 Interferencia constructiva y destructiva, 483
 diagrama de, 484
 en películas delgadas, 269, 273
 entre dos ondas de diferente frecuencia, 589
 franjitas de, 269-272
 y difracción, 508
 Interferómetros estelares, 566
 Ionosfera, 94
 dispersión en la, 199
 frecuencia de corte de la, 150
 impulsada a una frecuencia inferior al corte, 151
 longitud de atenuación de amplitud, 160 (p 3.17)
 oscilaciones a la frecuencia de plasma (ω_p), 94-96, 200
 velocidad de fase, 183
 de grupo, 298
 Islandia, feldespato de, 475

K

Kappa (κ), 145, 199
 Klein-Gordon, ecuación de onda de 144, 359, 589
 soluciones de las ecuaciones de ondas exponenciales, 145
 sinusoidales, 145

L

Lámina con gradación, 268, 269
 de cuarto de onda, 450, 463, 467
 de media onda, 463
 de retardo, 448-453
 propiedades de, 450, 464, 468
 Lámpara de proyector, 482
 Láser, 307, 342, 446, 507
 Leeuwenhoek, microscopio de, 551
 Lente convergente, 486, 543
 de aumento simple, 546
 delgada, 540
 fórmula para, 543
 divergente, 544
 gruesa, 549
 objetivo, 548
 ocular, 548
 poder del, 545
 Lentes, fórmula del constructor de, 542

Ley del cielo azul de Rayleigh, 405
 de los gases adiabáticos, 181
 Límite continuo, 83, 86
 de péndulos acoplados, 143
 para oscilaciones longitudinales, 88
 de longitud de onda larga, 83
 Línea de transmisión de alambres paralelos, 186
 inductancia por unidad de longitud, 186
 Línea de transmisión de placas paralelas, 187-189
 energía de flujo, 220
 impedancia, 220
 inductancia por unidad de longitud, 188
 velocidad de fase, 187-189
 pasabajos, 185
 forma de, 121
 Líneas de transmisión rectoparalelas, 187
 espectrales, 557
 Longitud de atenuación (δ), 149
 de onda, 60
 definida, 60
 inversa, 62
 para condiciones de contorno, 61
 Lorentz, forma de línea de, 121
 radio del electrón, 407
 Luna, brillo de, 229, 231, 237
 Luz blanca, 192
 y máximo principal, 527
 infrarroja, 224
 intensidades normales de, 228-231
 no polarizada, 459, 464
 solar, 224, 238
 Lyot, filtro, 469
 Lloyd, espejos de, 556

M

Malus, ley de, 439
 Máximo principal, 488, 525, 527
 Maxwell, ecuación general de, 391, 594
 para el vacío, 379
 para medios lineales isotrópicos, 602
 Mediciones nulas, 98
 Medio reactivo, 149-153, 163, 197
 rango de frecuencias para péndulos acoplados, 155-157
 Medios lineales isotrópicos, 595
 Membrana basilar, alinealidad en, 45
 insensibilidad de fase de la, 73
 Mesones K , 578
 Microscopio, 548
 de Leeuwenhoek, 551
 aumento angular, 551
 en contraste de fase, 570
 Modo bamboleanante de la ionosfera, 199
 en un recipiente de agua, 164

Modos, configuración característica de, 18
 con N grados de libertad, 53, 77
 coordenadas normales, 20
 de dos péndulos acoplados, 91, 128
 de una cuerda con cuentas, 53, 80
 homogénea, 75
 inhomogénea, 75
 de un sistema continuo, 53
 no continuos, 77
 ET, 361
 frecuencia característica de, 62
 ligados de péndulos acoplados, 153, 584
 propiedades de, 18
 salpicanes en el lago de Ginebra, 49 (p 1.25)
 en una batea de agua, 49 (p 1.24)
 solución general, 24, 46 (p 1.17)
 sistemática para, 22
 transversales de una cuerda continua, 54
 Modulación, 32, 289
 de amplitud (AM), 290, 345
 de fase, 347, 570
 de frecuencia, 346
 (ω_{mod}), 32, 291
 del número de ondas, 291
 velocidad de, 291
 Molécula de amoníaco, 576
 de vidrio, modelo simple, 196
 Momento angular, 386-391, 471, 473
 convención del, 426
 dipolar por unidad de volumen (P), 195, 200
 lineal en una onda plana, 386
 Multiplexión, 348-350
 de frecuencia, 348-350

N

Newton, error de, 181
 Nodo, 54
 modos de una cuerda inhomogénea, 76
 No linealidad, 14
 en el oído, 43 (p 1.13)
 y demodulación, 346
 Número de onda ($\lambda^{-1} \equiv \sigma$), 62
 angular (κ), 62, 355

O

Objetivo, 548
 Ocular, 548
 Oído, insensibilidad del, 72, 98

- Oído, membrana basilar del, 43
 Ojo, contracciones de pupila, 548
 imagen en la retina, 547
 partículas que flotan en el, 548, 561
 resolución angular del, 518
 Onda casi esférica, 490
 clásica, ecuación de (véase Ecuación de ondas clásicas)
 cuadrada, análisis de Fourier de, 69, 323
 repetida periódicamente, 104 (p 2.30)
 de propagación casi sinusoidal, 291, 295
 dispersiva, 63
 medio, 78
 y onda no dispersiva, 64
 larga, límite de longitud, 83
 longitud de, 60
 no dispersiva, 64
 en aguas bajas, 105
 profundas, 378
 media, 78
 ($\lambda^{-1} \equiv \sigma$), número de, 62
 velocidad para una cuerda continua, 60
 y sistema continuo, 52
 Ondas armónicas de propagación, 169
 de agua, 298-300, 369-378
 de propagación, 378, 416
 estacionarias, 372-374
 velocidad de (Tabla), 300
 de aguas profundas, forma de 374
 ley de dispersión para, 106
 de de Broglie, 578-588
 de marea, 338, 345
 de propagación, 156
 entrelazadas, 363
 en una línea de transmisión de placas paralelas, 220
 pasabajos, 218-220
 exponenciales, 175
 en zigzag, 175
 longitudinales en resorte con cuentas, 177, 212-213
 relación de dispersión, 173
 sinusoidal, 174
 Ondas de propagación transversal en una cuerda con cuentas, 176
 continua, 208
 de radio de amplitud modulada, 293
 de torsión, 235 (p 4.14)
 dispersivas, medio, 359
 y no dispersivas, 175
 electromagnéticas no dispersiva, 297
 planas, 379-391
 radiación de una carga puntual, 391-407
 estacionarias, 53
 de una cuerda continua, 59
 diente de sierra en agua poco profunda, 105, 164
 Ondas en la superficie del agua, 165
 en tres dimensiones, 357
 sinusoidales y homogeneidad, 75
 exponenciales, 145-146, 149, 199, 201
 en zigzag, 156
 penetración de, 151, 161, 202
 medio dispersivo en función del medio reactivo, 149
 no dispersivas (caso especial), 332-335
 paquete de, 314-316
 planas, 205-255, 355-359, 380-391
 penetración en una región reactiva, 151, 161
 rectas, 370
 y paralelas, 248
 sinusoidales, 145
 para $\omega^2 > \omega_0^2$, 145, 147
 tipo mixtas, 358
 torsionales, 236
 tsunami, 338
 Operador de proyección, 476
 Óptica geométrica, 531-552
 leyes de, 531
 Orificio pequeño, aumento producido por, 547
 Oscilación armónica, 3, 6
 movimiento circular uniforme, 40 (p 1.2)
 casi armónica, 33, 123
 estacionaria bajo una fuerza impulsora armónica, 113
 longitudinal de una cuerda continua, 55
 de un sistema de resortes y masas, 85
 Oscilaciones amortiguadas, 6, 111
 casi armónicas, 33, 290, 308
 del plasma, 94
 Oscilaciones del plasma, frecuencia, 94, 95, 200
 relación de dispersión, 94, 199-202
 forzadas de dos péndulos acoplados, 128
 de muchos péndulos acoplados, 131, 141
 solución exacta, 154
 de un oscilador amortiguado, 110
 estacionarias, 113-121
 transitorias, 121-126
 libres, 3
 decaimiento transitorio, 111
 de electrones en la ionosfera, 200
 de sistemas con dos grados de libertad, 17
 con muchos grados de libertad, 52
 con un grado de libertad, 3
 longitudinales de dos masas acopladas, 24
 de masa y resortes, 7
 en ondas de propagación de un muelle con cuentas, 212
 sonoras, 213-217
 Oscilaciones de masa y resortes, 7
 pequeñas, aproximación, 57, 78
 sinusoidales en el espacio de un sistema homogéneo, 76
 sobreamortiguadas, 112
 subamortiguadas, 112
 transversales de dos masas acopladas, 27
 de masa y resortes, 8
 de una cuerda con cuentas, 78-80
 continua, 54, 55
 libres de masa y resortes, 8
 Oscilador amortiguado, 110
 decaimiento transitorio de oscilaciones libres, 111
 armónico bidimensional, 19
 forzado, ecuación diferencial no homogénea, 112
 Osciladores débilmente acoplados, 576
 P
 Pantalla opaca, 509
 agujero en, 510
 Parámetros distribuidos de slinky, 87
 y parámetros empaquetados, 86
 empaquetados y parámetros distribuidos, 86
 Pasaaltos, filtro, 136, 146
 Pasabajos, filtro, 137, 138
 Péndulo simple, 5, 40 (p 1.2)
 Péndulos acoplados, 36
 como filtro mecánico, 133, 136, 162
 como filtros pasaaltos, 146
 ecuación de ondas, 144
 en latas, 159
 ley de dispersión de, 157, 161
 modos de dos, 92
 oscilaciones forzadas de dos, 128
 de muchos, 131, 142, 154
 relación de dispersión para, 93, 149
 sistema, 91, 103 (p 2.26)
 solución exacta para las oscilaciones forzadas de, 154
 esféricos, 16, 19
 Penetración de la luz a través de barreras, 368
 de ondas en una región reactiva, 151, 161
 Pequeña reflexión, aproximación de, 266
 Período, 4
 de la función periódica de distancia (λ), 65
 Permeabilidad magnética (μ), 190, 596-602
 Piano, análisis de Fourier de un aplauso, 324
 escala de equitemperancia, 98-100
 medición de frecuencia, 41 (p 1.4)
 relación de dispersión para, 63, 84

Piano, sobretonos, 100
 sonido de un acorde, 72
 Placas paralelas, línea de transmisión, 187-189
 Plano focal, 542
 Poisson, distribución de, 593
 Polarización circular, convenciones de giro, 426
 dextrógira, 427
 representación de, 432
 de la luz de la luna, 472
 de la tierra, 472
 del arco iris, 447
 del slinky, 465, 468
 de ondas transversales, 422
 producción de, 434-447
 propiedades de, 427-434
 eléctrica por unidad de volumen (**P**), 195, 200
 elíptica, 382, 428
 Polarización lineal, 55, 382, 423
 mediciones de, 459-462
 parcial, 465
 por dispersión simple, 440, 471
 por reflexión especular, 443
 Polarizador circular, 425, 462-463, 470
 Polaroiide, 437-439
 cruzado, 439, 447
 Potencia consumida en promedio temporal, oscilaciones forzadas, 115
 disipada por fricción, 115
 en candelas, 228, 238
 instantánea, oscilaciones forzadas, 114
 radiada en una cuerda, 210
 transportada en una cuerda, 212
 en una línea de transmisión de placas paralelas, 220
 en un muelle, 212
 por propagación de onda en una línea de transmisión pasabajos, 218-220
 Poynting, vector de, 385
 Presión de radiación, 386, 410
 medida, 33, 72
 en la onda de sonido, 215
 para la intensidad de sonido dolorosa, 216
 Principio de superposición para ecuaciones diferenciales homogéneas, 14
 inhomogéneas, 16
 y linealidad, 13, 14
 Prisma de agua, 235
 delgado, 539
 desviación por, 539
 retrodirector, 365
 y dispersión, 192, 540
 Producto del ancho de banda-intervalo de tiempo, 305
 Profundidad de foco, 563
 Pulsaciones, 31, 300-329
 construcción de, 303
 entre dos diapasones, 33, 43

Pulsaciones, modos normales, 36
 entre fuentes de luz, 34
 entre oscilaciones acopladas no idénticas, 47
 interminables, 123
 tiempo de duración de, 303
 transitorias, 124, 158, 161 (*p* 3.22)
 Pulsos ópticos, 589
 Punto focal, 541
 Puntos de semi potencia, 116, 118
 Pupila, 559

R

Radiación cuadrupolar, 564
 de ondas en una cuerda, 209
 de sincrotrón, ancho de banda de, 105 (*p* 2.30)
 detectores, 226
 de una carga puntual, 391-407
 dipolar, 402, 411
 eléctrica, 402, 411
 para un átomo unidimensional, 588
 por una capa de carga, 413
 Radio del electrón de Lorentz, 407
 Ranuras múltiples, configuración de interferencia, 525-527
 Rayleigh, criterio de, 519
 ley del cielo azul de, 405
 Rayo, 532
 Rayos paraxiales, 540
 Red de difracción, 528
 de reflexión, 532
 Reflejos, eliminación de, 449
 Reflexión, 244-285
 coeficiente de (*véase* Coeficiente de reflexión)
 de la luz en un vidrio, 264, 272
 de las ondas de sonido, 259-262
 del sonido, 259
 en líneas de transmisión, 262-264
 en películas delgadas, 269
 especular, 532
 relaciones de fase para, 44, 473
 metálica, 455, 474
 múltiple, 281
 total de la luz en el vidrio, 365-368
 en un espejo plateado, 163
 de ondas de radio en la ionosfera, 150
 Refracción, 192-194, 533
 índice (*véase* Índice de refracción)
 Relación de dispersión $\omega(k)$ para péndulos acoplados, 157, 173
 y condiciones de retorno, 191
 de las ondas de propagación, 173
 del conductor, 609
 en la ionosfera, 150, 199
 en tres dimensiones, 357
 para el circuito *LC*, 89
 para las ondas de de Broglie, 578

Relación de dispersión, para ondas de agua, 105, 376-377
 gravitacionales, 376-378
 para oscilaciones longitudinales de slinky, 88
 para oscilaciones de una cuerda con cuentas, 85
 transversales de una cuerda con cuentas, 81
 continua, 62
 para una cuerda de piano real, 63, 78
 para un sistema de péndulos acoplados, 93, 131, 149
 $\omega(k)$ 63, 76
 Reloj de amoníaco, 578
 Resistencia por unidad de área, 247-248, 277
 Resistividad, 247
 Resolución angular, criterio de Rayleigh, 519
 del ojo, 518
 Resonancia, ancho completo de frecuencia ($\Delta\omega$), relación del tiempo de decaimiento, (τ), 118
 ancho de frecuencia ($\Delta\omega$), 117
 curvas, 119
 del oscilador forzado, 117
 denominador de, 120
 de transmisión, 282, 283
 en globos de juguete, 284
 en sistemas con dos grados de libertad, 126
 en tubos de encomienda, 278
 en un sistema de péndulos acoplados, 154, 163
 en un slinky, 158
 formas de, 119, 124-125
 Resorte con cuentas, ondas de propagación longitudinales en, 177
 Retrodirección de la luz por Scotchlite, 551
 por un prisma, 365, 367
 por un reflector triédrico, 554 (*p* 9.14)

S

Saran, 448, 467, 468, 475
 Scotchlite, 551
 Schrödinger, ecuación de onda de, 582, 587
 Sección transversal, 406
 de Thomson, 407
 para dispersión, 406-407
 Seiches en el lago de Ginebra, 49 (*p* 1.25)
 en una batea de agua, 48 (*p* 1.24)
 Semipotencia, puntos de, 116, 118
 Series usadas comúnmente, 620-622
 Sistema continuo, 52

Sistemas abiertos, 168
 Slinky, 87
 aproximación, 57, 78
 «calidad de tono», 98
 Como sistema continuo, 97
 dependencia entre la frecuencia y la longitud, 97
 péndulos hechos con latas y acoplados a, 136
 polarización del, 427, 435, 465, 468
 resonancia en un, 158
 velocidad de fase, 233, 241
 Smith-Purcell, fuente de luz de 415
 Snell, ley de, 192, 194, 367, 533-535
 Sobretono, 64, 84
 de la cuerda de piano real, 100
 Sobretonos en diapasones, 280
 Sombra, 529
 longitud de, 530
 Sonido, dispersión del, 241
 doloroso, 216
 escasamente audible, 216
 impedancia del, 213-214, 240
 intensidades normales del, 215
 patrón de intensidad (I_0), 215
 reflexión del, 259
 velocidad del, 178-183, 233 (*p* 4.6), 237
 Subarmónicas, 98 (*p* 2.6)
 y acoplamiento asimétrico, 165
 Sucesión armónica de frecuencia, 62, 64
 Superposición de condiciones iniciales, 15, 46 (*p* 1.14)
 de dos modos, 19
 movimientos independientes, 16, 17
 de modos forzados, 129
 de ondas de propagación, 258, 273 (*p* 5.3)
 estacionarias, 258
 Susceptibilidad eléctrica (χ), 595-602
 magnética (χ_m), 595-602

T

Tela espacial, 248
 Telescopio, 548
 Terminación perfecta, 244
 de una cuerda, 244, 256
 Terminación perfecta de una línea de transmisión, 246-248
 de una onda plana, 249
 de un haz de linterna, 251
 Thomson, dispersión clásica de, 407
 Tiempo de coherencia, 458-459
 y fuentes independientes, 496
 y pulsos ópticos, 589
 de decaimiento del oscilador armónico amortiguado, 6, 111
 para un tubo de cartón, 117
 de medición, 460
 retardado (t'), 397
 Tiras de goma, 241
 Tono, calidad del de una cuerda de piano, 74
 del de un slinky, 98
 fundamental, 62, 84
 Tonos de combinación, 43
 Tsunami, 338
 Tubo de cartón, tiempo de decaimiento para un, 117
 TV, ancho de banda, 307
 como estroboscopio, 40 (*p* 1.3)

U

Uniaxiales, materiales, 453
 tabla de materiales, 453

V

Vector, diagrama del, 301
 de propagación (\mathbf{k}), 355

Velocidad de fase de guía de onda, 363
 de las ondas progresivas armónicas, 169-173
 de líneas de transmisión paralelas y rectilíneas, 189
 del sonido, 178-181
 de ondas electromagnéticas en la ionosfera, 183
 de una línea de transmisión de placas paralelas, 187
 pasabajos, 185-187
 de una onda plana, 357
 e impedancia, 207
 mayor que C , 183-186, 198
 para las ondas de de Broglie, 584
 Velocidad de grupo, 288-301
 de guía de ondas, 364-365
 de ondas de de Broglie, 584
 en el corte, 339
 del sonido, 178-183, 233 (*p* 4.6), 237
 de modulación, 291
 de onda para una cuerda continua, 60
 Ventana de Brewster, 446
 Vidrio, dispersión del, 194
 índice de refracción del, 191

W

Wood, R. W., 594

Z

Zigzag, modo de una cuerda con cuentas en 54, 55, 78, 82
 ondas de propagación exponenciales en, 175
 estacionarias exponenciales, 156
 Zona cercana de una carga oscilante, 401

El espectro electromagnético

Nombre habitual de la radiación electromagnética	Unidades prácticas*		Orden de magnitud		
	λ	$h\nu$, ν , ν/c	$\lambda(\text{cm})$	$\nu(\text{Hz})$	$h\nu(\text{eV})$
Rayos X de frenado o "bremsstrahlung" (energía máxima) de:					
Aceleración lineal de electrones de Stanford —	0,067 F	18 GeV	10^{-11}	10^{24}	10^{10}
Sincrotrón de electrones típico —	4 F	300 MeV	10^{-13}	10^{23}	10^9
Rayos gamma:					
Decaimiento del mesón pi neutro $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ —	19 F	67 MeV	10^{-12}	10^{22}	10^8
Decaimiento del núcleo excitado —	100 F	10 MeV	10^{-11}	10^{21}	10^7
Rayos X (átomos excitados o bremsstrahlung de electrones) —	0,1 Å	100 keV	10^{-9}	10^{19}	10^5
Luz ultravioleta (átomos excitados) —	100 Å	100 eV	10^{-6}	10^{16}	10^2
Luz visible: Límite de visibilidad del azul oscuro —	3900 Å	2,5 eV	10^{-5}	10^{15}	10^1
Azul de vapor de mercurio en luz ambiental —	4358 Å	22 940 cm^{-1}			
Verde del vapor de mercurio en luz ambiental —	5461 Å	18 310 cm^{-1}			
Amarillo del vapor de mercurio en luz ambiental —	5770 Å	17 330 cm^{-1}			
Luz roja del laser de helio-neón —	6328 Å	15 800 cm^{-1}			
Luz visible: límite de visibilidad del rojo oscuro —	7600 Å	1,6 eV	10^{-4}	10^{14}	10^0
Infrarrojo —					
Radiación térmica dominante ($h\nu \approx 3kT$) de					
Superficie del sol ($T \approx 6000^\circ\text{K}$) —	1 μ	1 eV	10^{-4}	10^{14}	10^0
Temperatura ambiente ($T \approx 300^\circ\text{K}$) —	20 μ	15 000 GHz	10^{-3}	10^{13}	10^{-1}
Globo de fuego primitivo universal (3°K) —	2 mm	150 GHz	10^{-1}	10^{11}	10^{-2}
Microondas y ondas de radio —					
Reloj atómico de amoníaco —	1,5 cm	20 GHz	10^0	10^{10}	10^{-3}
Radar (banda S) —	10 cm	3 GHz	10^1	10^9	10^{-4}
Línea de hidrógeno interestelar —	21 cm	1,5 GHz	10^1	10^9	10^{-4}
Ultra-alta-frecuencia (UHF)† —	37 cm	800 Mc	10^1	10^9	10^{-4}
Frecuencia ordinaria de TV (VHF)† —	75 cm	400 Mc	10^2	10^8	10^{-5}
Radio comercial de FM (VHF)† —	1,5—5,5 m	210 a 55 Mc	10^2	10^8	10^{-5}
Radio comercial de FM (VHF)† —	2,8—3,4 m	108 a 88 Mc	10^2	10^8	10^{-5}
Bandas de aficionados (HF)† —	10 m	30 Mc	10^3	10^7	10^{-6}
Radio comercial de onda media (MF)† —	100 m	3 Mc	10^4	10^6	10^{-7}
Radio comercial de onda media (MF)† —	200 m	1500 kc	10^4	10^6	10^{-7}
Radio comercial de onda media (MF)† —	600 m	500 kc	10^5	10^5	10^{-8}
Audio frecuencias (VLF)† —	10 km	30 kc	10^6	10^4	10^{-9}
Audio frecuencias (VLF)† —	10^4 km‡	30 cps	10^9	10^1	10^{-12}

* Las unidades "prácticas" son las más utilizadas por el físico experimental. Cuando se superponen campos distintos o cuando la tecnología evoluciona rápidamente pueden utilizarse nombres y unidades diferentes para la misma región de frecuencias. Por ejemplo, cuando los rayos X se detectan por foto-contadores, es natural utilizar unidades energéticas (eV, keV, MeV); si se detectan por difracción de cristales es lógico utilizar unidades de longitud (Å). Otro ejemplo: Los lasers están desarrollándose ahora fundamentalmente por ingenieros eléctricos, quienes tienden a utilizar unidades de frecuencia (Mc o MHz, GHz, etcétera), mientras que los espectroscopistas son más partidarios de utilizar unidades de longitud de onda (Å, μ , etc.).

† U = ultra, H = alta, F = frecuencia, V = muy, M = medio, L = baja.

‡ Longitudes de onda de las ondas de radio de audio-frecuencias, no de las ondas sonoras en el aire.